

方程式 $(3x^2 - y^2)(3y^2 - 2x^2) = 2z^2$ の整数解

大塚美紀生

平方数の差についての関係式は、複 2 次ディオファントス方程式を解く際にしばしば現れる。意外な方程式に結びつくことを期待して、本稿では

$$3x^2 - y^2 = 2a^2 \text{ と } 3y^2 - 2x^2 = b^2$$

が同時に成り立つ状況を考える。[2] のアイデアがほぼそのまま通用するが、[2] の結果から明らかというわけにはいかず、[1] によるパラメタ表示に立ち戻って論じ直す必要がある。

定理 1 ^{注1} 自然数 x, y, a, b が、2 つの方程式

$$3x^2 - y^2 = 2a^2 \tag{1}$$

$$3y^2 - 2x^2 = b^2 \tag{2}$$

を同時に満たすならば、 $x = y$ である。

定理 2 ^{注1} 自然数 x, y, z が

$$(3x^2 - y^2)(3y^2 - 2x^2) = 2z^2$$

を満たすならば、 $x = y$ である。

定理 1 の証明

(1)かつ(2)を満たす自然数の組 (x, y, a, b) の中で

$$y \neq a \text{ かつ } x \neq b$$

となるものが存在するとして、そのうち

$$x \text{ が最小}$$

となる場合を考えることにする。

x と y が共通の素因数 p をもつとすれば、 $p^2 \mid 2a^2$, $p^2 \mid b^2$ より

$$x = px_1, y = py_1, a = pa_1, b = pb_1$$

を満たす自然数 x_1, y_1, a_1, b_1 が存在して、

$$3x_1^2 - y_1^2 = 2a_1^2, 3y_1^2 - 2x_1^2 = b_1^2$$

が成り立つが、 $x = px_1 > x_1$ より最小性に反するから、

$$x \text{ と } y \text{ は互いに素}$$

である。

(1)に[1]の定理を適用すると、 $y \neq a$ のとき

$$x = m^2 + 2n^2, a = |m^2 - 2mn - 2n^2|, y = |m^2 + 4mn - 2n^2|$$

を満たす互いに素な 0 でない整数 m, n (m は奇数) が存在する。

(2)に[1]の定理を適用すると、 $x \neq b$ のとき

$y = k^2 + 2\ell^2$, $x = |k^2 - 2k\ell - 2\ell^2|$, $b = |k^2 + 4k\ell - 2\ell^2|$
 を満たす互いに素な 0 でない整数 k, ℓ (k は奇数) が存在する。 x, y を抜き出すと

$$x = m^2 + 2n^2 = |k^2 - 2k\ell - 2\ell^2|$$

$$y = |m^2 + 4mn - 2n^2| = k^2 + 2\ell^2$$

以下, 絶対値の外れ方について, 4 つの場合に分けて考える。

I

$$x = m^2 + 2n^2 = k^2 - 2k\ell - 2\ell^2 \quad (3)$$

$$y = m^2 + 4mn - 2n^2 = k^2 + 2\ell^2 \quad (4)$$

のとき, (3) + (4) より

$$2m^2 + 4mn = 2k^2 - 2k\ell$$

$$m(m + 2n) = k(k - \ell) \quad (5)$$

$\gcd(m, k) = s$ とおくと, s は奇数であり,

$$m = st, \quad k = su \quad (6)$$

を満たす互いに素な奇数 t, u が存在する。(5) より

$$t(m + 2n) = u(k - \ell)$$

t と u は互いに素であるから

$$m + 2n = uv, \quad k - \ell = tv$$

を満たす整数 v が存在するが, $m + 2n$ が奇数であることより

$$v \neq 0$$

である。(6) とあわせると

$$2n = uv - st, \quad \ell = su - tv \quad (7)$$

(3) に (6), (7) を代入して

$$s^2 t^2 + \frac{(uv - st)^2}{2} = s^2 u^2 - 2su(su - tv) - 2(su - tv)^2$$

$$3s^2 \left(\frac{t^2}{2} + u^2 \right) - 7stuv + \left(\frac{u^2}{2} + 2t^2 \right) v^2 = 0$$

$$3(t^2 + 2u^2) \left(\frac{s}{v} \right)^2 - 14tu \cdot \frac{s}{v} + (4t^2 + u^2) = 0$$

整数係数 2 次方程式の解 $\frac{s}{v}$ が有理数であるから, 判別式 D は平方数であり,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (7tu)^2 - 3(t^2 + 2u^2)(4t^2 + u^2) \\ &= -12t^4 + 22t^2u^2 - 6u^4 \\ &= -2(6t^4 - 11t^2u^2 + 3u^4) \\ &= -2(2t^2 - 3u^2)(3t^2 - u^2) \\ &= 2(3t^2 - u^2)(3u^2 - 2t^2) = w^2 \end{aligned} \quad (8)$$

を満たす自然数 w が存在する。

u は奇数であるから $3u^2 - 2t^2$ は奇数であり,

$$\begin{aligned} \gcd(2(3t^2 - u^2), 3u^2 - 2t^2) &= \gcd(3t^2 - u^2, 3u^2 - 2t^2) \\ \gcd(t, u) &= 1 \text{ より} \\ \gcd(3t^2 - u^2, t^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(3t^2 - u^2, 3u^2 - 2t^2) &= \gcd(3t^2 - u^2, 7t^2 - 3(3t^2 - u^2)) \\ &= \gcd(3t^2 - u^2, 7t^2) \\ &= \gcd(3t^2 - u^2, 7) \\ &= 1 \text{ または } 7 \end{aligned}$$

t, u は奇数で $3u^2 - 2t^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから, (8) より

$$(2(3t^2 - u^2), 3u^2 - 2t^2) = ((2g)^2, h^2) \text{ または } (-7(2g)^2, -7h^2)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h (h は奇数) が存在する。

ここで, $2(3t^2 - u^2) = -7(2g)^2$, $3u^2 - 2t^2 = -7h^2$ であるとすれば, t を消去して

$$7u^2 = -7(2g)^2 - 21h^2$$

が導かれ, 左辺は正, 右辺は負となって矛盾するから,

$$3t^2 - u^2 = 2g^2, \quad 3u^2 - 2t^2 = h^2 \tag{9}$$

に定まる。(6), (3) より

$$|t| \leq |s||t| = |m| \leq m^2 < m^2 + 2n^2 = x$$

となって, (9) の成立は x の最小性に反する。

II

$$x = m^2 + 2n^2 = -k^2 + 2kl + 2\ell^2 \tag{10}$$

$$y = m^2 + 4mn - 2n^2 = k^2 + 2\ell^2 \tag{11}$$

のとき, (10) + (11) より

$$2m^2 + 4mn = 2kl + 4\ell^2$$

$$m(m + 2n) = \ell(k + 2\ell) \tag{12}$$

$m, m + 2n, k + 2\ell$ は奇数であるから

ℓ も奇数

となることを考えて,

$$\gcd(m, \ell) = s$$

とおくと,

$$m = st, \quad \ell = su \tag{13}$$

を満たす互いに素な奇数 t, u が存在する。(12) より

$$t(m + 2n) = u(k + 2\ell)$$

t と u は互いに素であるから,

$$m + 2n = uv, \quad k + 2\ell = tv \tag{14}$$

を満たす奇数 v が存在し, (13) かつ (14) より

$$2n = uv - st, \quad k = tv - 2su \tag{15}$$

(10) に (13), (15) を代入して

$$s^2 t^2 + \frac{(uv - st)^2}{2} = -(tv - 2su)^2 + 2su(tv - 2su) + 2s^2 u^2$$

$$3s^2 \left(\frac{t^2}{2} + 2u^2 \right) - 7stuv + \left(\frac{u^2}{2} + t^2 \right) v^2 = 0$$

$$3(t^2 + 4u^2) \left(\frac{s}{v} \right)^2 - 14tu \cdot \frac{s}{v} + (2t^2 + u^2) = 0$$

整数係数 2 次方程式の解 $\frac{s}{v}$ が有理数であるから，判別式 D は平方数であり，

$$\frac{D}{4} = (7tu)^2 - 3(t^2 + 4u^2)(2t^2 + u^2) = w^2$$

を満たす自然数 w が存在する。これは (8) において t と u を入れかえた式であるから，
I と同様の議論により

$$3u^2 - t^2 = 2g^2, \quad 3t^2 - 2u^2 = h^2 \quad (16)$$

を満たす自然数 g, h が存在する。

(14), (10) より

$$|u| \leq |u||v| = |m + 2n| \leq |m| + 2|n| \leq m^2 + 2n^2 = x$$

ここで，すべての不等式で等号が成り立つとすれば，

$$mn > 0 \quad \text{かつ} \quad |m| = |n| = 1$$

となるが，(10), (11) より $x = y = 3$ となって互いに素であることに反するから

$$|u| < x$$

となる。したがって，(16) の成立は， x の最小性に反する。

III

$$x = m^2 + 2n^2 = k^2 - 2kl - 2\ell^2 \quad (17)$$

$$y = -m^2 - 4mn + 2n^2 = k^2 + 2\ell^2 \quad (18)$$

のとき，(17) - (18) より

$$2m^2 + 4mn = -2kl - 4\ell^2$$

$$m(m + 2n) = \ell(-2\ell - k) \quad (19)$$

$m, m + 2n, -2\ell - k$ は奇数であるから

ℓ も奇数

となることを考えて，

$$\gcd(m, \ell) = s$$

とおくと，

$$m = st, \quad \ell = su \quad (20)$$

を満たす互いに素な奇数 t, u が存在する。(19) より

$$t(m + 2n) = u(-2\ell - k)$$

t と u は互いに素であるから，

$$m + 2n = uv, \quad -k - 2\ell = tv$$

を満たす奇数 v が存在し，(20) とあわせると

$$2n = uv - st, \quad k = -2su - tv \quad (21)$$

(17)に(20), (21)を代入して

$$s^2 t^2 + \frac{(uv - st)^2}{2} = (2su + tv)^2 - 2su(-2su - tv) - 2s^2 u^2$$

$$3s^2 \left(\frac{t^2}{2} - 2u^2 \right) - 7stuv + \left(\frac{u^2}{2} - t^2 \right) v^2 = 0$$

$$(u^2 - 2t^2) \left(\frac{v}{s} \right)^2 - 14tu \cdot \frac{v}{s} + 3(t^2 - 4u^2) = 0$$

$u^2 - 2t^2 \neq 0$ ^{注2} であり, 整数係数2次方程式の解 $\frac{v}{s}$ が有理数であるから, 判別式 D は平方数であり,

$$\frac{D}{4} = (7tu)^2 - 3(t^2 - 4u^2)(u^2 - 2t^2) = w^2 \quad (22)$$

を満たす自然数 w が存在する。

$$6t^4 + 22t^2u^2 + 12u^4 = w^4$$

$$2(t^2 + 3u^2)(3t^2 + 2u^2) = w^2 \quad (23)$$

u は奇数であるから $3t^2 + 2u^2$ は奇数であり,

$$\gcd(2(t^2 + 3u^2), 3t^2 + 2u^2) = \gcd(t^2 + 3u^2, 3t^2 + 2u^2)$$

$\gcd(t, u) = 1$ より

$$\gcd(t^2 + 3u^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 + 3u^2, 3t^2 + 2u^2) &= \gcd(t^2 + 3u^2, 3(t^2 + 3u^2) - 7u^2) \\ &= \gcd(t^2 + 3u^2, 7u^2) \\ &= \gcd(t^2 + 3u^2, 7) \\ &= 1 \text{ または } 7 \end{aligned}$$

であるから, (23)より

$$(2(t^2 + 3u^2), 3t^2 + 2u^2) = (g^2, h^2) \text{ または } (7g^2, 7h^2)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h (h は奇数) が存在する。ところが,

$$3t^2 + 2u^2 \equiv 3 + 2 \equiv 5 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

より矛盾する。

IV

$$x = m^2 + 2n^2 = -k^2 + 2k\ell + 2\ell^2 \quad (24)$$

$$y = -m^2 - 4mn + 2n^2 = k^2 + 2\ell^2 \quad (25)$$

のとき, (24) - (25)より

$$2m^2 + 4mn = -2k^2 + 2k\ell$$

$$m(m + 2n) = k(-k + \ell) \quad (26)$$

$\gcd(m, k) = s$ とおくと,

$$m = st, \quad k = su \quad (27)$$

を満たす互いに素な奇数 t, u が存在する。(26)より

$$t(m+2n) = u(-k+\ell)$$

t と u は互いに素であるから,

$$m+2n = uv, \quad -k+\ell = tv$$

を満たす奇数 v が存在し, (27) とあわせると

$$2n = uv - st, \quad \ell = su + tv \tag{28}$$

(24) に (27), (28) を代入して

$$s^2 t^2 + \frac{(uv-st)^2}{2} = -s^2 u^2 + 2su(su+tv) + 2(su+tv)^2$$

$$3s^2 \left(\frac{t^2}{2} - u^2 \right) - 7stuv + \left(\frac{u^2}{2} - 2t^2 \right) v^2 = 0$$

$$3(t^2 - 2u^2) \left(\frac{s}{v} \right)^2 - 14tu \cdot \frac{s}{v} + (u^2 - 4t^2) = 0$$

$t^2 - 2u^2 \neq 0$ ^{注3} であり, 整数係数 2 次方程式の解 $\frac{s}{v}$ が有理数であるから, 判別式 D は平方数であり,

$$\frac{D}{4} = (7tu)^2 - 3(t^2 - 2u^2)(u^2 - 4t^2) = w^2$$

を満たす自然数 w が存在する。これは (22) において t と u を入れかえた式であるから, III と同様の議論により

$$(2(3t^2 + u^2), 2t^2 + 3u^2) = (g^2, h^2) \text{ または } (7g^2, 7h^2)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h (h は奇数) が存在する。ところが,

$$2t^2 + 3u^2 \equiv 2 + 3 \equiv 5 \pmod{8}, \quad h^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

より矛盾する。

以上 I, II, III, IV より, $y \neq a$ かつ $x \neq b$ と仮定すると矛盾するから,

$$y = a \text{ または } x = b$$

が成り立つ。

$y = a$ のとき, (1) より

$$3x^2 = 3a^2 \text{ すなわち } x = a$$

$x = b$ のとき, (2) より

$$3y^2 = 3b^2 \text{ すなわち } y = b$$

いずれの場合も

$$x = y$$

が成り立つ。 ■

定理 2 の証明

自然数 x, y, z が

$$(3x^2 - y^2)(3y^2 - 2x^2) = 2z^2 \tag{29}$$

を満たすとする。

ここで、 x と y が共通の素因数 p をもつとすれば、

$$p^4 | 2z^2 \implies p^3 | z^2 \implies p^2 | z$$

であるから

$$x = px_1, \quad y = py_1, \quad z = p^2z_1$$

を満たす自然数 x_1, y_1, z_1 が存在し、

$$(3x_1^2 - y_1^2)(3y_1^2 - 2x_1^2) = 2z_1^2$$

が成り立つ。この操作を x と y の最大公約数の素因数に対して次々行なうと、

$$\gcd(x, y) = d \implies d^2 | z$$

が示されるから、はじめから

$$x \text{ と } y \text{ が互いに素}$$

として定理を証明すればよい。このとき

$$\begin{aligned} \gcd(3x^2 - y^2, x^2) &= \gcd(y^2 - 3x^2, x^2) = \gcd(y^2, x^2) = 1 \\ \gcd(3x^2 - y^2, 3y^2 - 2x^2) &= \gcd(3x^2 - y^2, 7x^2 - 3(3x^2 - y^2)) \\ &= \gcd(3x^2 - y^2, 7x^2) \\ &= \gcd(3x^2 - y^2, 7) \\ &= 1 \text{ または } 7 \end{aligned}$$

であるから、(27)より

$$\begin{aligned} (3x^2 - y^2, 3y^2 - 2x^2) &= (2a^2, b^2), (b^2, 2a^2), \\ &\quad (-2a^2, -b^2), (-b^2, -2a^2), \\ &\quad (14a^2, 7b^2), (7b^2, 14a^2), \\ &\quad (-14a^2, -7b^2), (-7b^2, -14a^2) \end{aligned}$$

のいずれかが成り立つような互いに素な自然数 a, b (b は奇数) が存在する。

x が偶数、 y が奇数のときは、 $3x^2 - y^2, 3y^2 - 2x^2$ はともに奇数であるから、いずれも成り立たない。

x が奇数、 y が偶数のときは、

$$3x^2 - y^2 \equiv 3 \pmod{4}, \quad 3y^2 - 2x^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

より

$$(3x^2 - y^2, 3y^2 - 2x^2) = (-b^2, -2a^2), (7b^2, 14a^2)$$

に限られるが、

$$3x^2 - y^2 \equiv 3 \pmod{8}, \quad 3y^2 - 2x^2 \equiv -2 \pmod{8}$$

または

$$3x^2 - y^2 \equiv 7 \pmod{8}, \quad 3y^2 - 2x^2 \equiv 2 \pmod{8}$$

であるから

$$-b^2 \equiv 7b^2 \equiv 7 \pmod{8}, \quad -2a^2 \equiv 14a^2 \equiv -2 \pmod{8}$$

と矛盾する。

したがって、

x, y はともに奇数

であり、

$$3x^2 - y^2 \equiv 2 \pmod{8}, \quad 3y^2 - 2x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

となる。 $3y^2 - 2x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より

$$3y^2 - 2x^2 = b^2 \text{ または } -7b^2$$

である組に限られるが、

$$-14a^2 \equiv -2, 0, 4 \pmod{8}$$

より

$$3x^2 - y^2 = 2a^2, \quad 3y^2 - 2x^2 = b^2$$

に定まり、定理 1 より

$$x = y$$

が成り立つ。 ■

注 1 定理 1 と定理 2 が同値であるとわかったあとでは、定理 2 で一本化する方が自然に思えるが、応用される際には定理 1 の形で現れることが多いので、問題提起の原型である定理 1 を残す形でまとめることにした。定理 2 の証明は、定理 1 に帰着できることだけを議論している。定理 2 が成り立てば定理 1 が成り立つことはほぼ明らかである。

注 2 $u^2 = 2t^2$ が成り立つとすれば、素因数分解したときの 2 の指数が左辺と右辺で異なるため、素因数分解の一意性に反する。

注 3 $t^2 = 2u^2$ が成り立つとすれば、素因数分解したときの 2 の指数が左辺と右辺で異なるため、素因数分解の一意性に反する。

参考文献

- [1] 大塚美紀生, 方程式 $3x^2 - 2y^2 = z^2$ の自然数解について,
早稲田数学フォーラム (2019),
<http://wasmath.la.coocan.jp/3x2-2y2=z2.pdf>
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2019),
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-2y2\)\(3y2-2x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-2y2)(3y2-2x2)=z2.pdf)
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 7y^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2019),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+7y2y2+y4=z2.pdf>