

方程式 $(3x^2 - y^2)(3y^2 - x^2) = z^2$ の整数解

大塚美紀生

[2]において $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = a^2 \\ 3y^2 - 2x^2 = b^2 \end{cases}$ を, [3]において $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 2a^2 \\ 3y^2 - 2x^2 = b^2 \end{cases}$ を解いてきた。

本稿では, 残り一つの組についても解決しておこうと思う。

定理 1 自然数 x, y, z が

$$(3x^2 - y^2)(3y^2 - x^2) = z^2$$

を満たすならば, $x = y$ である。

定理 2 自然数 x, y, a, b が, 2つの方程式

$$3x^2 - y^2 = 2a^2$$

$$3y^2 - x^2 = 2b^2$$

を同時に満たすならば, $x = y$ である。

3つの平方数の関係式が2つ連立していれば, 条件は一意に定まり $x = y$ となるのは当然だと思われるかもしれない。ところが, 連立の条件は決定的というほどではなく, 例えば連立方程式

$$\begin{cases} 5x^2 - 2y^2 = 3a^3 \\ 5y^2 - 2x^2 = 3b^2 \end{cases}$$

は, $x = y$ でない整数解

$$5 \times 11^2 - 2 \times 7^2 = 3 \times 13^2$$

$$5 \times 7^2 - 2 \times 11^2 = 3 \times 1^2$$

を持つ。実際には, この連立方程式は無数に自然数解をもつようである。

自然数解が $x = y$ に限られる連立方程式を特定するのは, 思いのほか難しい問題である。今しばらくは, 平方数の連立方程式の整数解を丹念に求めていくことで, 理解をより深めていく必要があるように思われる。

定理 1 の証明

$$(3x^2 - y^2)(3y^2 - x^2) = z^2 \tag{1}$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) の中に

$$x \neq y$$

であるものが存在すると, そのうち

$$x \text{ が最小}$$

である場合が存在するはずである。

$\gcd(x, y) = \delta$ とすると, $\delta^4 | z^2$ より

$$x = \delta x_1, y = \delta y_1, z = \delta^2 z_1$$

を満たす自然数 x_1, y_1, z_1 が存在して

$$(3x_1^2 - y_1^2)(3y_1^2 - x_1^2) = z_1^2$$

が成り立つ。 z の最小性より $\delta = 1$, すなわち,

x と y は互いに素

である。ここで x が偶数であるとすれば, 必然的に y は奇数であり,

$$(3x^2 - y^2)(3y^2 - x^2) = -3x^4 + 10x^2y^2 - 3y^4 \equiv -3 \pmod{8}$$

となって $z \equiv 1 \pmod{8}$ と矛盾する。 y を偶数としても同様に矛盾するから,

x, y はともに奇数

である。

$\gcd(x, y) = 1$ より

$$\gcd(3x^2 - y^2, x^2) = \gcd(y^2, x^2) = 1,$$

$$\begin{aligned} \gcd(3x^2 - y^2, 3y^2 - x^2) &= \gcd(3x^2 - y^2, 3(y^2 - 3x^2) + 8x^2) \\ &= \gcd(3x^2 - y^2, 8x^2) \\ &= \gcd(3x^2 - y^2, 8) \\ &= 1, 2, 4, 8 \end{aligned}$$

であるから, (1)より

$$\begin{aligned} (3x^2 - y^2, 3y^2 - x^2) &= (a^2, b^2), (-a^2, -b^2) \\ &\quad (2a^2, 2b^2), (-2a^2, -2b^2) \\ &\quad (4a^2, 4b^2), (-4a^2, -4b^2) \\ &\quad (8a^2, 8b^2), (-8a^2, -8b^2) \end{aligned}$$

のいずれかが成り立つような互いに素な自然数 a, b が存在する。

$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であり,

$$3x^2 - y^2 \equiv 3y^2 - x^2 \equiv 2 \pmod{8}$$

であるから,

$$3x^2 - y^2 = 2a^2 \tag{2}$$

$$3y^2 - x^2 = 2b^2 \tag{3}$$

の場合に限られてしまう。^{注1}

$$y \neq a \text{ かつ } x \neq b$$

と仮定して [1] の定理を適用すると, (2)より

$$x = k^2 + 2\ell^2, y = |k^2 + 4k\ell - 2\ell^2|, a = |k^2 - 2k\ell - 2\ell^2|$$

を満たす互いに素な 0 でない整数 k, ℓ (k は奇数) が存在する。(3)より

$$y = m^2 + 2n^2, x = |m^2 + 4mn - 2n^2|, b = |m^2 - 2mn - 2n^2|$$

を満たす互いに素な 0 でない整数 m, n (m は奇数) が存在する。 x, y について

$$x = k^2 + 2\ell^2 = |m^2 + 4mn - 2n^2|$$

$$y = |k^2 + 4k\ell - 2\ell^2| = m^2 + 2n^2$$

絶対値のはずれ方について分けて考える。

I

$$x = k^2 + 2\ell^2 = m^2 + 4mn - 2n^2 \quad (4)$$

$$y = k^2 + 4k\ell - 2\ell^2 = m^2 + 2n^2 \quad (5)$$

のとき, (4) + (5) より

$$\begin{aligned} 2k^2 + 4k\ell &= 2m^2 + 4mn \\ k(k + 2\ell) &= m(m + 2n) \end{aligned} \quad (6)$$

$\gcd(k, m) = s$ とおくと,

$$k = st, \quad m = su \quad (7)$$

を満たす互いに素な奇数 t, u が存在する。(6) より

$$t(k + 2\ell) = u(m + 2n)$$

t と u は互いに素であるから

$$k + 2\ell = uv, \quad m + 2n = tv$$

を満たす整数 v が存在し,

$$2\ell = uv - st, \quad 2n = tv - su \quad (8)$$

ここで, m は奇数であるから $m + 2n$ も奇数であり,

$$m + 2n = tv \neq 0, \quad \text{特に } v \neq 0$$

(4) に (7), (8) を代入すると

$$2s^2t^2 + (uv - st)^2 = 2s^2u^2 + 4su(tv - su) - (tv - su)^2$$

$$3s^2(t^2 + u^2) - 8stuv + (t^2 + u^2)v^2 = 0$$

$$3(t^2 + u^2)\left(\frac{s}{v}\right)^2 - 8tu \cdot \frac{s}{v} + (t^2 + u^2) = 0$$

整数係数 2 次方程式が有理数 $\frac{s}{v}$ を解に持つから, 判別式 D は平方数であり,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (4tu)^2 - 3(t^2 + u^2)^2 \\ &= -3t^4 + 10t^2u^2 - 3u^4 \\ &= (3t^2 - u^2)(3u^2 - t^2) = w^2 \end{aligned} \quad (9)$$

を満たす自然数 w が存在する。(7), (4) より

$$|t| \leq s|t| = |k| \leq k^2 < k^2 + 2\ell^2 = x$$

であるから, (9) の成立は x の最小性に反する。

II

$$x = k^2 + 2\ell^2 = m^2 + 4mn - 2n^2 \quad (10)$$

$$y = -k^2 - 4k\ell + 2\ell^2 = m^2 + 2n^2 \quad (11)$$

のとき, (10) - (11) より

$$2k^2 + 4k\ell = 4mn - 4n^2$$

$$k^2 = 2(mn - n^2 - k\ell)$$

となって, k が奇数であることに反する。

III

$$x = k^2 + 2\ell^2 = -m^2 - 4mn + 2n^2 \quad (12)$$

$$y = k^2 + 4k\ell - 2\ell^2 = m^2 + 2n^2 \quad (13)$$

のとき, (12) + (13) より

$$2k^2 + 4k\ell = -4mn + 4n^2$$

$$k^2 = 2(-k\ell - mn + n^2)$$

となって, k が奇数であることに反する。

IV

$$x = k^2 + 2\ell^2 = -m^2 - 4mn + 2n^2 \quad (14)$$

$$y = -k^2 - 4k\ell + 2\ell^2 = m^2 + 2n^2 \quad (15)$$

のとき, (14) - (15) より

$$2k^2 + 4k\ell = -2m^2 - 4mn$$

$$k(k + 2\ell) = -m(m + 2n) \quad (16)$$

$\gcd(k, m) = s$ とおくと,

$$k = st, \quad m = su \quad (17)$$

を満たす互いに素な奇数 t, u が存在する。(16)より

$$t(k + 2\ell) = -u(m + 2n)$$

t と u は互いに素であるから

$$k + 2\ell = uv, \quad m + 2n = -tv \quad (18)$$

を満たす整数 v が存在し,

$$2\ell = uv - st, \quad -2n = tv + su \quad (19)$$

ここで, m は奇数であるから $m + 2n$ も奇数であり,

$$m + 2n = -tv \neq 0, \quad \text{特に } v \neq 0$$

(14) に (17), (19) を代入すると

$$2s^2t^2 + (uv - st)^2 = -2s^2u^2 + 4su(tv + su) + (tv + su)^2$$

$$3s^2(t^2 - u^2) - 8stuv + (u^2 - t^2)v^2 = 0$$

$$3(t^2 - u^2)\left(\frac{s}{v}\right)^2 - 8tu \cdot \frac{s}{v} + (u^2 - t^2) = 0$$

ここで, $t^2 = u^2$ であるとすれば, $-8stuv = 0$ となって矛盾するから

$$t^2 \neq u^2$$

整数係数 2 次方程式が有理数 $\frac{s}{v}$ を解に持つから, 判別式 D は平方数であり,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (4tu)^2 - 3(t^2 - u^2) \cdot (u^2 - t^2) \\ &= 3t^4 + 10t^2u^2 + 3u^4 \\ &= (3t^2 + u^2)(t^2 + 3u^2) = u^2 \end{aligned} \quad (20)$$

を満たす自然数 w が存在する。

$\gcd(t, u) = 1$ より

$$\begin{aligned}\gcd(u^2, t^2 + 3u^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(3t^2 + u^2, t^2 + 3u^2) &= \gcd(3(t^2 + 3u^2) - 8u^2, t^2 + 3u^2) \\ &= \gcd(8u^2, t^2 + 3u^2) \\ &= \gcd(8, t^2 + 3u^2) \\ &= 1, 2, 4, 8\end{aligned}$$

であるが, t, u は奇数であるから

$$3t^2 + u^2 \equiv t^2 + 3u^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

であり,

$$\gcd(3t^2 + u^2, t^2 + 3u^2) = 4$$

に定まる。よって, (20) より

$$3t^2 + u^2 = 4g^2 \tag{21}$$

$$t^2 + 3u^2 = 4h^2 \tag{22}$$

を満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。

(21) \times 3 - (22) より

$$\begin{aligned}8t^2 &= 4 \cdot 3g^2 - 4h^2 \\ 2t^2 &= 3g^2 - h^2\end{aligned} \tag{23}$$

(22) \times 3 - (21) より

$$2u^2 = 3h^2 - g^2 \tag{24}$$

(23) と (24) の辺々をかけあわせると

$$(3g^2 - h^2)(3h^2 - g^2) = (2tu)^2 \tag{25}$$

(21), (17), (18), (14) より

$$\begin{aligned}4g^2 &= 3t^2 + u^2 \\ &\leq 3s^2t^2 + u^2v^2 = 3k^2 + (k + 2\ell)^2 \\ &= 4(k^2 + k\ell + \ell^2) \\ &\leq 4(k^4 + k^2\ell^2 + \ell^4) \\ &< 4(k^4 + 4k^2\ell^2 + 4\ell^4) = 4(k^2 + 2\ell^2)^2 = 4x^2\end{aligned}$$

となるから, (25) の成立は x の最小性に反する。

I, II, III, IV より

$$y = a \text{ または } x = b$$

であり,

$$y = a \text{ のときは (2) より } x = a,$$

$$x = b \text{ のときは (3) より } y = b$$

であるから, いずれの場合も

$$x = y$$

である。 ■

定理 2 の証明^{注 2}

自然数 x, y, a, b が , 2 つの方程式

$$3x^2 - y^2 = 2a^2$$

$$3y^2 - x^2 = 2b^2$$

を同時に満たすとするば , 辺々かけあわせて

$$(3x^2 - y^2)(3y^2 - x^2) = (2ab)^2$$

が成り立つ。このとき , 定理 1 より

$$x = y$$

である。 ■

注 1 定理 2 の証明を先に済ませておくと , 定理 1 の証明はここで終わる。

注 2 実質的には , 定理 1 の証明で定理 2 も証明されている。

参考文献

- [1] 大塚美紀生, 方程式 $3x^2 - 2y^2 = z^2$ の自然数解について,
早稲田数学フォーラム (2019),
<http://wasmath.la.coocan.jp/3x2-2y2=z2.pdf>
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2019),
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-2y2\)\(3y2-2x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-2y2)(3y2-2x2)=z2.pdf)
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $(3x^2 - y^2)(3y^2 - 2x^2) = 2z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2021),
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-y2\)\(3y2-2x2\)=2z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-y2)(3y2-2x2)=2z2.pdf)
- [4] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 14y^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2021),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+14y2y2+y4=z2.pdf>