

方程式 $(5x^2 - 4y^2)(5y^2 - 4x^2) = z^2$ の整数解

大塚美紀生

本稿では、 $3x^2 - 2y^2 = z^2$ (\rightarrow [1]) および $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$ (\rightarrow [2]) に類似する方程式について考察する。[3]で経験したように、単なる類似にとどまらず、思わぬ結果につながる可能性も高い。

定理 1 不定方程式

$$4x^2 + y^2 = 5z^2 \quad (1)$$

の $x \neq y$ なる互いに素な自然数解^{注1}は、互いに素な自然数 m, n ^{注2}を用いて

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (m^2 + mn - n^2, m^2 - 4mn - n^2, m^2 + n^2), \\ &= (m^2 - mn - n^2, m^2 + 4mn - n^2, m^2 + n^2), \\ &= (m^2 + mn - n^2, -m^2 + 4mn + n^2, m^2 + n^2) \end{aligned} \quad (2)$$

のいずれかで表されるもので尽くされる。

定理 2 正の整数 x, y, z が

$$(5x^2 - 4y^2)(5y^2 - 4x^2) = z^2 \quad (3)$$

を満たすならば、 $x = y$ である。

系 連立方程式

$$\begin{cases} 5x^2 - 4y^2 = a^2 \\ 5y^2 - 4x^2 = b^2 \end{cases}$$

を満たす正の整数 x, y, a, b が存在するのは、 $x = y (= a = b)$ の場合に限られる。^{注3}

定理 1 の証明

x と y が共通の素因数 p をもつとすれば、(1)より $p^2 \mid 5z^2 \implies p \mid z$ となって、 x, y, z が互いに素であることに反するから、

x と y は互いに素

である。^{注1}

ここで x が偶数とすれば、 y, z は奇数であり、 $y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{8}$ 、 $4x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ 、 $5z^2 \equiv 5 \pmod{8}$ となって(1)に反するから

x は奇数

である。また、

$$(4x + y)(4x - y) = 16x^2 - y^2 = 16x^2 - (5z^2 - 4x^2) = 5(4x^2 - z^2)$$

より

$$5 \mid 4x + y \quad \text{または} \quad 5 \mid 4x - y$$

である。

1° $5 \mid 4x + y$ のとき

(1)を変形すると

$$(4x + y)^2 + 4(x - y)^2 = 20x^2 + 5y^2 = 5(4x^2 + y^2) = 5 \cdot 5z^2$$

y と z の偶奇が等しいことも考えて

$$\frac{5z + 4x + y}{2} \cdot \frac{5z - 4x - y}{2} = (x - y)^2$$

$4x + y$ は 5 で割り切れ、5 と 2 は互いに素であるから、

$$\frac{5z + 4x + y}{10}, \frac{5z - 4x - y}{10} \text{ は整数}$$

であり、 $x - y$ は 5 で割り切れるから

$$\frac{5z + 4x + y}{10} \cdot \frac{5z - 4x - y}{10} = \left(\frac{x - y}{5}\right)^2 \quad (4)$$

と書き換えられる。

$$\frac{5z + 4x + y}{10} \text{ と } \frac{5z - 4x - y}{10} \text{ が共通の素因数 } p \text{ をもつとすれば、}$$

$$\implies p \mid z \text{ かつ } p \mid \frac{4x + y}{5} \text{ かつ } p \mid \frac{x - y}{5}$$

$$\implies p \mid x = \frac{4x + y}{5} + \frac{x - y}{5} \text{ かつ } p \mid y = \frac{4x + y}{5} - 4 \cdot \frac{x - y}{5}$$

となって、 x と y が互いに素であることに反するから、

$$\frac{5z + 4x + y}{10} \text{ と } \frac{5z - 4x - y}{10} \text{ は互いに素}$$

であり、(4)より、 $x > y$ のとき

$$\frac{5z + 4x + y}{10} = m^2, \quad \frac{5z - 4x - y}{10} = n^2, \quad \frac{x - y}{5} = mn$$

を満たす互いに素な自然数 m, n が存在し、これを解き直して

$$\begin{aligned} z &= m^2 + n^2, \quad 4x + y = 5(m^2 - n^2), \quad x - y = 5mn \\ x &= m^2 + mn - n^2, \quad y = m^2 - 4mn - n^2, \quad z = m^2 + n^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$x < y$ のときは

$$x = m^2 - mn - n^2, \quad y = m^2 + 4mn - n^2, \quad z = m^2 + n^2 \quad (6)$$

2° $5 \mid 4x - y$ のとき

(1)を

$$(4x - y)^2 + 4(x + y)^2 = 20x^2 + 5y^2 = 5(4x^2 + y^2) = 5 \cdot 5z^2$$

と変形することで、 $y \mapsto -y$ と書き換えることにより、1° と同様の議論ができて、

$$x = m^2 + mn - n^2, \quad -y = m^2 - 4mn - n^2, \quad z = m^2 + n^2 \quad \text{注}^4 \text{ (7)}$$

(5), (6), (7)をあわせて、(2)が得られる。 ■

定理 2 の証明

(3) を満たす正の整数の組 (x, y, z) の中で $x \neq y$ であるものが存在するとして、
 $x + y$ が最小

のものであるとする。

$\gcd(x, y) = d$ とすると、 $d^4 | z^2$ であるから、

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2 z_1$$

となる正の整数 x_1, y_1, z_1 が存在し、(3) の両辺を d^4 で割って、

$$(5x_1^2 - 4y_1^2)(5y_1^2 - 4x_1^2) = z_1^2$$

を満たすから、

x と y は互いに素

であるときに定理 2 を証明すればよい。

$\delta = \gcd(5x^2 - 4y^2, 5y^2 - 4x^2)$ とすると、

$$5(5x^2 - 4y^2) + 4(5y^2 - 4x^2) = 9x^2$$

$$4(5x^2 - 4y^2) + 5(5y^2 - 4x^2) = 9y^2$$

より

$$\delta | 9x^2, \quad \delta | 9y^2$$

であるが、 x と y は互いに素であり、 $\delta | 9 = 3^2$ であるから、

$$\delta = 1 \text{ または } 3 \text{ または } 9$$

平方数を 3 で割った余りは 0 または 1 であるから、 $5x^2 - 4y^2$ 、 $5y^2 - 4x^2$ がともに 3 で割れるのは x と y がともに 3 で割り切れるときに限られ、互いに素であることに反するから

$$\delta = 1$$

よって、(3) より

$$5x^2 - 4y^2 = a^2 \tag{8}$$

$$5y^2 - 4x^2 = b^2 \tag{9}$$

を満たす互いに素な自然数 a, b が存在する。 $x \neq y$ より

$$a \neq y, \quad b \neq x$$

であり、(8) に定理 1 を適用すると

$$x = m^2 + n^2, \quad y = m^2 + mn - n^2$$

を満たす互いに素な整数 m, n ($m > 0, n \neq 0$) が存在し、(9) に定理 1 を適用すると

$$y = k^2 + \ell^2, \quad x = k^2 + k\ell - \ell^2$$

を満たす互いに素な整数 k, ℓ ($k > 0, \ell \neq 0$) が存在する。

$$x = m^2 + n^2 = k^2 + k\ell - \ell^2 \tag{10}$$

$$y = m^2 + mn - n^2 = k^2 + \ell^2 \tag{11}$$

辺々加えると

$$2m^2 + mn = 2k^2 + k\ell$$

$$m(2m + n) = k(2k + \ell) \tag{12}$$

$\gcd(m, k) = s$ とすると

$$m = st, \quad k = su \tag{13}$$

を満たす互いに素な自然数 t, u が存在する。(12)より

$$t(2m + n) = u(2k + \ell)$$

t と u は互いに素であるから

$$2m + n = uv, \quad 2k + \ell = tv \tag{14}$$

を満たす整数 v が存在する。ここで $v = 0$ であるとするれば, $2m + n = 0$ より

$$y = m^2 + m(-2m) - 4m^2 = -5m^2 < 0$$

となって y が自然数であることに反するから

$$v \neq 0$$

(13), (14) を (10) に代入して

$$s^2 t^2 + (uv - 2st)^2 = s^2 u^2 + su(tv - 2su) - (tv - 2su)^2$$

$$5(t^2 + u^2)s^2 - 9stuv + (t^2 + u^2)v^2 = 0$$

$$5(t^2 + u^2)\frac{s^2}{v^2} - 9tu \cdot \frac{s}{v} + t^2 + u^2 = 0$$

この2次方程式を満たす有理数 $\frac{s}{v}$ が存在する条件は, 判別式

$$D = (9tu)^2 - 4 \cdot 5(t^2 + u^2)(t^2 + u^2)$$

$$= -20t^4 + 41t^2u^2 - 20u^4$$

$$= (5t^2 - 4u^2)(5u^2 - 4t^2)$$

が平方数となることであり,

$$(5t^2 - 4u^2)(5u^2 - 4t^2) = w^2 \tag{15}$$

を満たす自然数 w が存在する。(13), (11), (10)より

$$t + u \leq m + k \leq m^2 + k^2 < m^2 + n^2 + k^2 + \ell^2 = x + y$$

であり, (15)が成り立つことと $x + y$ の最小性より

$$t = u$$

となる。このとき, (13), (12)より

$$m = k, \quad n = \ell$$

(10), (11)より

$$x = y$$

となって, $x \neq y$ と仮定したことに矛盾する。

ゆえに, 正の整数 x, y, z が (3) を満たすならば, $x = y$ である。 ■

注1 本稿では用語を用いていないが、互いに素な非自明な整数解を原始解という。
 定理1の証明の冒頭で、 x, y, z が互いに素ならば x と y は互いに素であることを確認しているが、一般には6, 10, 15のように、互いに素な3数のうちの2数が互いに素であるとは限らない。

注2 定理1は、あくまでも(1)の自然数解を表現するものであり、逆は成り立たない。
 実際、 $m = 2$ と $n = 1$ が互いに素であっても、 $x = 5$ と $y = 5$ は互いに素でなく、 $m = 1, n = 2$ のとき $x < 0$ となって自然数解とはならない。

注3 (3) \iff (8), (9) であるから、定理2と系は実質的には同じ内容である。

注4 (7)は

$$\frac{5z + 4x - y}{10} = m^2, \quad \frac{5z - 4x + y}{10} = n^2, \quad \frac{x + y}{5} = mn$$

から得られる。

$$\frac{5z + 4x - y}{10} = -m^2, \quad \frac{5z - 4x + y}{10} = -n^2$$

の場合を見落としていると誤解されるかもしれないが、この場合は辺々加えると

$$z = -m^2 - n^2$$

となって矛盾するので、実際には起こり得ない。

参考文献

- [1] 大塚美紀生, 方程式 $3x^2 - 2y^2 = z^2$ の自然数解について,
 早稲田数学フォーラム (2019),
<http://wasmath.la.coocan.jp/3x2-2y2=z2.pdf>
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$ の整数解,
 早稲田数学フォーラム (2019),
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-2y2\)\(3y2-2x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-2y2)(3y2-2x2)=z2.pdf)
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 7y^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
 早稲田数学フォーラム (2019),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+7y2y2+y4=z2.pdf>