

# 方程式 $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$ の整数解

大塚美紀生

整数論的に興味深い問題として、

$3x^2 - 2y^2$ ,  $3y^2 - 2x^2$  がともに平方数となる正の整数  $x, y$  は  
 $x = y$  の場合に限られるか

を考えることにする。個別には、

$$3x^2 - 2y^2 = z^2$$

を満たす正の整数の組  $(x, y, z)$  は  $x \neq y$  でないものも無数に存在することもあり、1組の連立だけで定まるにせよ。1組の連立だけでは定まらないにせよ、どちらに転んでもおいしいことになる。直接証明する定理は

定理 1 正の整数  $x, y, z$  が

$$(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2 \tag{1}$$

を満たすならば、 $x = y$  である。

この定理の系として、得られる結論は

定理 2 連立方程式

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = a^2 \\ 3y^2 - 2x^2 = b^2 \end{cases}$$

を満たす正の整数  $x, y, a, b$  が存在するのは、 $x = y$  ( $= a = b$ ) の場合に限られる。

定理 1 の証明

(1) を満たす正の整数の組  $(x, y, z)$  の中で  $x \neq y$  であるものが存在するとして、

$x + y$  が最小

のものであるとする。

$\gcd(x, y) = d$  とすると、 $d^4 \mid z^2$  であるから、

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = dz_1$$

となる正の整数  $x_1, y_1, z_1$  が存在し、(1) の両辺を  $d^4$  で割って、

$$(3x_1^2 - 2y_1^2)(3y_1^2 - 2x_1^2) = z_1^2$$

を満たすから、

$x$  と  $y$  は互いに素

であるときに定理を証明すればよい。このとき

$x$  も  $y$  も奇数

である。というのも、 $2|x$  であるとすれば、 $2|z$ 、 $2^2|6y^4 \implies 2|y$ <sup>注1</sup> となって、互いに素であることに反し、 $2|y$  とした場合も同様に矛盾するからである。

$$\begin{aligned} \delta &= \gcd(3x^2 - 2y^2, 3y^2 - 2x^2) \text{ とすると} \\ 3(3x^2 - 2y^2) + 2(3y^2 - 2x^2) &= 5x^2 \\ 2(3x^2 - 2y^2) + 3(3y^2 - 2x^2) &= 5y^2 \end{aligned}$$

より

$$\delta | 5x^2, \quad \delta | 5y^2$$

であるが、 $x$  と  $y$  は互いに素であるから  $\delta | 5$  であり、 $5$  は素数であるから

$$\delta = 1 \text{ または } 5$$

ここで、 $\delta = 5$  であるとすれば、(1)より

$$3x^2 - 2y^2 = 5a^2, \quad 3y^2 - 2x^2 = 5b^2$$

または

$$3x^2 - 2y^2 = -5a^2, \quad 3y^2 - 2x^2 = -5b^2$$

を満たす互いに素な正の整数  $a, b$  が存在するが、 $x, y, a, b$  は奇数であるから

$$x^2 \equiv y^2 \equiv a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$3x^2 - 2y^2 \equiv 3y^2 - 2x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$5a^2 \equiv 5b^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

であることより、上の等式は成り立たないから、

$$3x^2 - 2y^2 \text{ と } 3y^2 - 2x^2 \text{ は互いに素}$$

である。奇数の平方を 8 で割ると 1 余ることも考えると、

$$3x^2 - 2y^2 = a^2 \tag{2}$$

$$3y^2 - 2x^2 = b^2 \tag{3}$$

を満たす互いに素な正の整数  $a, b$  が存在する。(2)に [2] の定理を適用すると

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = |m^2 - 2mn - 2n^2|, \quad a = |m^2 + 4mn - 2n^2| \tag{4}$$

を満たす互いに素な (0 でない) 整数  $m, n$  が存在する。(3)に [2] の定理を適用すると

$$y = k^2 + 2\ell^2, \quad x = |k^2 - 2k\ell - 2\ell^2|, \quad b = |k^2 + 4k\ell - 2\ell^2| \tag{5}$$

を満たす互いに素な (0 でない) 整数  $k, \ell$  が存在する。

絶対値  $|m^2 - 2mn - 2n^2|$ 、 $|k^2 - 2k\ell - 2\ell^2|$  の外れ方について場合を分けて考える。

$$\text{Case I} \quad \begin{cases} m^2 + 2n^2 = k^2 - 2k\ell - 2\ell^2 \\ m^2 - 2mn - 2n^2 = k^2 + 2\ell^2 \end{cases}$$

必要ならば、 $(m, n) \rightarrow (-m, -n)$  および  $(k, \ell) \rightarrow (-k, -\ell)$  と置き換えたと解釈して、初めから

$$m > 0, \quad k > 0$$

であるとしてよい。2 式の辺々を加えると

$$2m^2 - 2mn = 2k^2 - 2k\ell$$

$$m(m - n) = k(k - \ell)$$

$\gcd(m, k) = s$  とおくと、

$$m = st, \quad k = su \quad (6)$$

を満たす互いに素な正の整数  $t, u$  が存在し,

$$t(m - n) = u(k - \ell)$$

$t$  と  $u$  は互いに素であるから,

$$m - n = uv, \quad k - \ell = tv \quad (7)$$

を満たす 0 でない整数  $v$  が存在する。

(6), (7) を  $m^2 + 2n^2 = k^2 - 2kl - 2\ell^2$  に代入して

$$s^2t^2 + 2(st - uv)^2 = s^2u^2 - 2su(su - tv) - 2(su - tv)^2$$

$$3(t^2 + u^2)s^2 - 10stuv + 2(t^2 + u^2)v^2 = 0$$

$$3(t^2 + u^2)\left(\frac{s}{v}\right)^2 - 10tu \cdot \frac{s}{v} + 2(t^2 + u^2) = 0$$

整数係数 2 次方程式が有理数  $\frac{s}{v}$  を解に持つから

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = (5tu)^2 - 3(t^2 + u^2) \cdot 2(t^2 + u^2) = (3t^2 - 2u^2)(3u^2 - 2t^2)$$

は有理数の平方かつ整数であり,

$$(3t^2 - 2u^2)(3u^2 - 2t^2) = w^2 \quad (8)$$

を満たす正の整数  $w$  が存在する。  $x \neq y$  より

$$n \neq 0, \quad \ell \neq 0$$

であることに注意して, (6), (5), (4) より

$$t + u \leq m + k \leq m^2 + k^2 < m^2 + 2n^2 + k^2 + 2\ell^2 = x + y$$

$x + y$  の最小性より, (8) を満たす正の整数  $t, u$  は

$$t = u$$

を満たす。(6), (7) より

$$m = k, \quad n = \ell$$

となって, (4), (5) より

$$x = y$$

となるから,  $x \neq y$  と仮定したと矛盾する。

$$\text{Case II} \quad \begin{cases} m^2 + 2n^2 = -k^2 + 2kl + 2\ell^2 \\ m^2 - 2mn - 2n^2 = k^2 + 2\ell^2 \end{cases} \quad (9)$$

$$(10)$$

2 式の辺々を加えると

$$2m^2 - 2mn = 2kl + 4\ell^2$$

$$m(m - n) = \ell(k + 2\ell)$$

$\gcd(m, \ell) = s$  とおくと

$$m = st, \quad \ell = su \quad (11)$$

を満たす互いに素な 0 でない整数  $t, u$  が存在し,

$$t(m - n) = u(k + 2\ell)$$

$t$  と  $u$  は互いに素であるから,

$$m - n = uv, \quad k + 2\ell = tv \quad (12)$$

を満たす 0 でない整数  $v^{\neq 3}$  が存在する。

(11), (12) を  $m^2 + 2n^2 = -k^2 + 2kl + 2\ell^2$  に代入して

$$s^2 t^2 + 2(st - uv)^2 = -(tv - 2su)^2 + 2su(tv - 2su) + 2s^2 u^2$$

$$(3t^2 + 6u^2)s^2 - 10stuv + (t^2 + 2u^2)v^2 = 0$$

$$(3t^2 + 6u^2)\left(\frac{s}{v}\right)^2 - 10tu \cdot \frac{s}{v} + (t^2 + 2u^2) = 0$$

整数係数 2 次方程式が有理数  $\frac{s}{v}$  を解に持つから

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = (5tu)^2 - 3(t^2 + 2u^2)^2$$

は有理数の平方かつ整数であり,

$$(5tu)^2 - 3(t^2 + 2u^2)^2 = w^2 \quad (13)$$

を満たす正の整数  $w$  が存在する。

平方数を 5 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかであるが,  $t$  と  $u$  は互いに素であるからともに 5 で割れるということはなく,  $t^2 + 2u^2$  は 5 で割れない。したがって,

$$(t^2 + 2u^2)^2 \equiv 1 \text{ または } 4 \pmod{5}$$

であるから,

$$(5tu)^2 - 3(t^2 + 2u^2)^2 \equiv 2 \text{ または } 3 \pmod{5}$$

は平方剰余にならず, (13) と矛盾する。

$$\text{Case III} \quad \begin{cases} m^2 + 2n^2 = k^2 - 2kl - 2\ell^2 \\ -m^2 + 2mn + 2n^2 = k^2 + 2\ell^2 \end{cases}$$

$m, n$  と  $k, \ell$  の役割を入れ替えることにより, Case II と全く同じ議論になる。

$$\text{Case IV} \quad \begin{cases} m^2 + 2n^2 = -k^2 + 2kl + 2\ell^2 \\ -m^2 + 2mn + 2n^2 = k^2 + 2\ell^2 \end{cases}$$

必要ならば,  $(m, n) \rightarrow (-m, -n)$  および  $(k, \ell) \rightarrow (-k, -\ell)$  と置き換えたと解釈して, 初めから

$$n > 0, \quad \ell > 0$$

であるとしてよい。2 式の辺々を加えると

$$4n^2 + 2mn = 4\ell^2 + 2kl$$

$$n(2n + m) = \ell(2\ell + k)$$

$\gcd(n, \ell) = s$  とおくと

$$n = st, \quad \ell = su \quad (14)$$

を満たす互いに素な正の整数  $t, u$  が存在し,

$$t(2n + m) = u(2\ell + k)$$

$t$  と  $u$  は互いに素であるから,

$$2n + m = uv, \quad 2\ell + k = tv \quad (15)$$

を満たす 0 でない整数  $v^{\text{注4}}$  が存在する。

(14), (15) を  $m^2 + 2n^2 = -k^2 + 2kl + 2l^2$  に代入して

$$(uv - 2st)^2 + 2s^2t^2 = -(tv - 2su)^2 + 2su(tv - 2su) + 2s^2u^2$$

$$(6t^2 + 6u^2)s^2 - 10stuv + (t^2 + u^2)v^2 = 0$$

$$(6t^2 + 6u^2)\left(\frac{s}{v}\right)^2 - 10tu \cdot \frac{s}{v} + (t^2 + u^2) = 0$$

整数係数 2 次方程式が有理数  $\frac{s}{v}$  を解に持つから

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = (5tu)^2 - (6t^2 + 6u^2)(t^2 + u^2) = (3t^2 - 2u^2)(3u^2 - 2t^2)$$

は有理数の平方かつ整数であり,

$$(3t^2 - 2u^2)(3u^2 - 2t^2) = w^2 \tag{16}$$

を満たす正の整数  $w$  が存在する。  $x \neq y$  より

$$n \neq 0, \quad \ell \neq 0$$

であることに注意して, (14), (5), (4) より

$$t + u \leq n + \ell \leq n^2 + \ell^2 < m^2 + 2n^2 + k^2 + 2\ell^2 = x + y$$

$x + y$  の最小性より, (16) を満たす正の整数  $t, u$  は

$$t = u$$

を満たす。 (14), (15) より

$$n = \ell, \quad m = k$$

となって, (4), (5) より

$$x = y$$

となるから,  $x \neq y$  と仮定したことが矛盾する。

起こり得るすべての場合 (4 つの場合) をすべて調べ尽くしたので, 定理 1 の証明は完結した。 ■

定理 2 の証明

連立方程式

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = a^2 \\ 3y^2 - 2x^2 = b^2 \end{cases}$$

を満たす正の整数  $x, y, a, b$  が存在するならば,

$$(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = (ab)^2$$

が成り立つから, 定理 1 より

$$x = y$$

が得られる。 ■

注 1 (1)を展開して

$$-6x^4 + 13x^2y^2 - 6y^4 = z^2$$

と表示すればわかるように, もともと  $-6x^4$ ,  $-6y^4$  は 2 で割り切れ,  $2|x$  ならば,  $2^5|-6x^4$ ,  $2^2|13x^2y^2$  が成り立つ。

注 2  $m-n=0$  であるとすれば  $m^2-2mn-2n^2=m^2-2m^2-2m^2=-3m^2<0$ ,  
 $k-l=0$  であるとすれば  $k^2-2kl-2l^2=-3k^2<0$  となって矛盾する。

注 3  $m-n=0$  であるとすれば,  $m^2-2mn-2n^2=m^2-2m^2-2m^2=-3m^2<0$   
となって,  $k^2+2l^2$  と一致しない。  $k+2l$  は奇数であるから 0 でない。

注 4  $2n+m$  および  $2l+k$  はともに奇数であり, 0 にはならない。

#### 参考文献

[1] T.Nagell, *Introduction to number theory*, Chelsea (1981)

[2] 大塚美紀生, 方程式  $3x^2-2y^2=z^2$  の自然数解について,  
早稲田数学フォーラム (2019), <http://wasmath.la.coocan.jp/3x2-2y2=z2.pdf>