

なぜ $0! = 1$ なのか？

正の整数 n に対して、 $n!$ は

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

によって定められる。そのルールでは $0!$ は定められそうにないのだが、

$$0! = 1$$

とされている。その理由は高校で習うはずなのだが、意外に知られていない。

1つの説明として、

n から順にかけているのではなく、1から順にかけているのだというものがある。

$$1! = 1, 2! = 1 \times 2, 3! = 1 \times 2 \times 3, \dots\dots$$

であり、

$0!$ は1に何もかけていないのだから1であるというわけである。

この説明は一見わかりやすいが、根本的なところをごまかしている。それは、

なぜ1からかけ始めるという前提を設けたのか？

という点である。それが、 $0! = 1$ の核心部分なのである。

$0! = 1$ である本当の理由は、

高校数学において組合せ論(場合の数)を基礎とする計算のみに

用いるという前提で、正の整数 n, r に対して成り立つ ${}_n C_r$ の

演算法則が ${}_n C_n = {}_n C_0 = 1$ とつじつまが合うように定めた

ということである。正の整数 n, r に対しては

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

が成り立つが、 ${}_n C_n = {}_n C_0 = 1$ とすれば、 $0! = 1$ と定めるしかないのである。こうすることで、高校で出てくるすべての計算が矛盾なく行なわれ、非常に都合が良い。

「1を基準にして掛け算を始める」という発想もそこから出てくるわけである。

しかし、このことは前提を変更すれば $0! = 1$ は成り立たなくなることをも同時に意味する。実際、ある専門分野において、 $0! = 0$ とすることで関数等式がうまく成り立つという話を聞いたことがある。したがって、大学で本格的に学問を学ぶ際には、どの前提で議論しているかを明確にしないと無用の混乱に陥る恐れがある。

結局、我々は

ものごとを拡張するときには、 $(-1) \times (-1) = 1$ を定めた

ときの発想をつねにお手本にしている

ということになる。これは、数学を学ぶ大切さの一つの理由であろう。