

## 方程式 $125x^4 + 25x^2y^2 + y^4 = z^2$ について

大塚美紀生

[2]において考察した方程式

$$27x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2$$

と同様の手法で，方程式

$$125x^4 + 25x^2y^2 + y^4 = z^2$$

の自然数解も考えてみる。3が5に代わるだけで単純に解決するかと思いきや，証明過程のところどころに意外に面倒なことが起きる。

定理 方程式

$$125x^4 + 25x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

定理の証明

(1)を満たす自然数(正の整数)  $x, y, z$  が存在すると仮定して， $x$  はそのとり得る最小の値であるとする。

$d = \gcd(x, y) > 1$  とすると， $x = dx_1, y = dy_1$  ( $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ ) と表されて，(1)より  $d^4 \mid z^2$  であるから， $z = d^2z_1$  ( $z_1 \in \mathbb{N}$ ) とおくことができ，

$$125x_1^4 + 25x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つ。したがって，はじめから

$$\gcd(x, y) = 1$$

として差し支えない。

ここで  $5 \mid y$  であるとする，(1)より

$$5 \mid y \implies 5^3 \mid z^2 \implies 5^2 \mid z \implies 5^4 \mid 5^3x^4 \implies 5 \mid x$$

となって  $x$  と  $y$  が互いに素であることに反するから，

$y$  は5で割り切れない。

$125x^4 + 25x^2y^2 = z^2 - y^4 = (z + y^2)(z - y^2)$  より  $z + y^2$  と  $z - y^2$  の少なくとも一方は5で割り切れるが，

$$(z + y^2) - (z - y^2) = 2y^2$$

は5で割り切れないから，

$z + y^2$  と  $z - y^2$  の一方は5で割り切れ，他方は5で割り切れない。

1°  $5 \nmid z + y^2, 5 \mid z - y^2$  のとき

$$\frac{z + y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数}) \tag{2}$$

とおくと,  $5 \nmid m$  であり,

$$z = \frac{m}{n}x^2 - y^2$$

(1)に代入して

$$\begin{aligned} 125x^4 + 25x^2y^2 &= \frac{m^2}{n^2}x^4 - \frac{2m}{n}x^2y^2 \\ \left(25 + \frac{2m}{n}\right)x^2y^2 &= \left(\frac{m^2}{n^2} - 125\right)x^4 \\ \therefore \frac{y^2}{x^2} &= \frac{m^2 - 125n^2}{n(2m + 25n)} \end{aligned} \quad (3)$$

$\gcd(m, n) = 1$  より

$$\gcd(m^2 - 125n^2, n) = \gcd(m^2, n) = 1$$

$m^2 - 125n^2 = -5n(2m + 25n) + m(m + 10n)$  より

$$\gcd(m^2 - 125n^2, 2m + 25n) = \gcd(2m + 25n, m(m + 10n))$$

$5 \nmid m$  および  $\gcd(m, n) = 1$  より

$$\gcd(2m + 25n, m) = \gcd(25n, m) = \gcd(n, m) = 1$$

$2m + 25n = 2(m + 10n) + 5n$  より

$$\begin{aligned} \gcd(2m + 25n, m + 10n) &= \gcd(m + 10n, 5n) \\ &= \gcd(m, 5n) \\ &= \gcd(m, n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \gcd(m^2 - 125n^2, n(2m + 25n)) = 1$$

よって,  $m > 0, n > 0$  も考えて, (3)より

$$x^2 = n(2m + 25n) > 0 \quad (4)$$

$$y^2 = m^2 - 125n^2 \quad (5)$$

に定まる。

$$(5) \iff (m + y)(m - y) = 125n^2$$

$$5 \nmid 2m = (m + y) + (m - y)$$

より,  $m + y$  と  $m - y$  の一方は 5 で割り切れ, 他方は 5 で割り切れないから,

$$\begin{cases} 5 \nmid m + y \text{ のとき } \frac{m + y}{n} = \frac{l}{k} \\ 5 \nmid m - y \text{ のとき } \frac{m - y}{n} = \frac{l}{k} \end{cases} \quad (k \text{ と } l \text{ は互いに素な自然数}) \quad (6)$$

とおくと,

$$\pm y = \frac{l}{k}n - m$$

であり, いずれの場合も (5)より

$$\frac{l^2}{k^2}n^2 - \frac{2l}{k}mn = -125n^2$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{k}{2l} \left( \frac{l^2}{k^2} + 125 \right) = \frac{125k^2 + l^2}{2kl}$$

(4)より

$$\frac{x^2}{n^2} = 2 \cdot \frac{m}{n} + 25 = \frac{125k^2 + 25kl + l^2}{kl} \quad (7)$$

$k$  と  $l$  は互いに素であるから

$$\gcd(125k^2 + 25kl + l^2, k) = \gcd(l^2, k) = 1$$

(6)より  $5 \nmid l$  であるから

$$\gcd(125k^2 + 25kl + l^2, l) = \gcd(125k^2, l) = \gcd(k^2, l) = 1$$

よって, (7)より

$$k = u^2, \quad l = v^2, \quad 125k^2 + 25kl + l^2 = w^2 \quad (8)$$

を満たす自然数  $u, v, w$  が存在し,  $k$  と  $l$  を消去すると

$$125u^4 + 25u^2v^2 + v^4 = w^2$$

(8), (6), (2)より

$$u^2 = k \leq n \leq x^2$$

$x$  の最小性より  $u = x, \quad k = n = x^2$  となり, (7)より

$$1 = k \cdot \frac{x^2}{n^2} = \frac{125k^2 + 25kl + l^2}{l} = \frac{125k^2}{l} + 25k + l$$

であるから  $\frac{125k^2}{l}$  は整数であり,  $\gcd(k, l) = 1, \quad 5 \nmid l$  より

$$l = 1$$

このとき

$$125k^2 + 25k = 25k(5k + 1) = 0$$

となって,  $k > 0$  に反する。

2°  $5 \mid z + y^2, \quad 5 \nmid z - y^2$  のとき

$(z - y^2)(z + y^2) = 125x^4 + 25x^2y^2 > 0$  より  $z - y^2 > 0$  であることにも注意して

$$\frac{z - y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数}) \quad (9)$$

とおくと,  $5 \nmid m$  であり,

$$z = \frac{m}{n}x^2 + y^2$$

(1)に代入して

$$125x^4 + 25x^2y^2 = \frac{m^2}{n^2}x^4 + \frac{2m}{n}x^2y^2$$

$$\left(25 - \frac{2m}{n}\right)x^2y^2 = \left(\frac{m^2}{n^2} - 125\right)x^4$$

$$\therefore \frac{y^2}{x^2} = \frac{m^2 - 125n^2}{n(25n - 2m)} \quad (10)$$

$\gcd(m, n) = 1$  より

$$\gcd(m^2 - 125n^2, n) = \gcd(m^2, n) = 1$$

$m^2 - 125n^2 = -5n(25n - 2m) + m(m - 10n)$  より

$$\gcd(m^2 - 125n^2, 25n - 2m) = \gcd(25n - 2m, m(m - 10n))$$

$5 \nmid m$  および  $\gcd(m, n) = 1$  より

$$\gcd(25n - 2m, m) = \gcd(25n, m) = \gcd(n, m) = 1$$

$25n - 2m = -2(m - 10n) + 5n$  より

$$\begin{aligned}\gcd(25n - 2m, m - 10n) &= \gcd(m - 10n, 5n) \\ &= \gcd(m, 5n) \\ &= \gcd(m, n) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\therefore \gcd(m^2 - 125n^2, n(25n - 2m)) = 1$$

よって, (10) より

$$x^2 = \pm n(25n - 2m), \quad y^2 = \pm(m^2 - 125n^2) \quad (\text{複号同順})$$

ここで,  $x^2 = -n(25n - 2m) > 0$  であるとすれば,

$$\frac{25}{2}n < m$$

$y^2 = -m^2 + 125n^2 > 0$  より

$$\frac{5^4}{4}n^2 < m^2 < 5^3n^2 \quad \therefore 5 < 4$$

となって矛盾するから,

$$x^2 = n(25n - 2m) \tag{11}$$

$$y^2 = m^2 - 125n^2 \tag{12}$$

に定まる。

$$(12) \iff (m + y)(m - y) = 125n^2$$

$$5 \nmid 2m = (m + y) + (m - y)$$

より,  $m + y$  と  $m - y$  の一方は 5 で割り切れ, 他方は 5 で割り切れないから,

$$\begin{cases} 5 \nmid m + y \text{ のとき } \frac{m + y}{n} = \frac{l}{k} \\ 5 \nmid m - y \text{ のとき } \frac{m - y}{n} = \frac{l}{k} \end{cases} \quad (k \text{ と } l \text{ は互いに素な自然数}) \tag{13}$$

とおくと,

$$\pm y = \frac{l}{k}n - m$$

であり, いずれの場合も (12) より

$$\frac{l^2}{k^2}n^2 - \frac{2l}{k}mn = -125n^2$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{k}{2l} \left( \frac{l^2}{k^2} + 125 \right) = \frac{125k^2 + l^2}{2kl}$$

(11)より

$$\frac{x^2}{n^2} = 25 - 2 \cdot \frac{m}{n} = \frac{-125k^2 + 25kl - l^2}{kl} \quad (14)$$

$k$  と  $l$  は互いに素であるから

$$\gcd(-125k^2 + 25kl - l^2, k) = \gcd(-l^2, k) = 1$$

(13)より  $5 \nmid l$  であるから

$$\gcd(-125k^2 + 25kl - l^2, l) = \gcd(-125k^2, l) = \gcd(-k^2, l) = 1$$

よって, (14)より

$$k = u^2, \quad l = v^2, \quad -125k^2 + 25kl - l^2 = w^2$$

を満たす自然数  $u, v, w$  が存在して,  $k, l$  を消去すると

$$-125u^4 + 25u^2v^2 - v^4 = w^2 \quad (15)$$

$k = u^2$  と  $l = v^2$  は互いに素であるから, 少なくとも一方は奇数である。

$u, v$  がともに奇数のときは,  $u^2 \equiv v^2 \equiv 1 \pmod{8}$  であり,

$$-125u^4 + 25u^2v^2 - v^4 \equiv -125 + 25 - 1 \equiv 3 \pmod{8}$$

$u$  が奇数,  $v$  が偶数のときは,  $u^2 \equiv 1, v^2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$  であり,

$$-125u^4 + 25u^2v^2 - v^4 \equiv -5 + v^2 \equiv 3, 7 \pmod{8}$$

$u$  が偶数,  $v$  が奇数のときは,

$$-125u^4 + 25u^2v^2 - v^4 \equiv u^2 - 1 \equiv 3, 7 \pmod{8}$$

$w^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$  であるから, いずれの場合も(15)は成り立たない。

(証明おわり)

### 参考文献

- [ 1 ] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $x^3 + y^3 = 2z^3$  について,  
早稲田数学フォーラム (2009)

<http://wasmath.la.coocan.jp/x3+y3=2z3.pdf>

- [ 2 ] 大塚美紀生, 方程式  $27x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2$  について,  
早稲田数学フォーラム (2011)

<http://wasmath.la.coocan.jp/27x4+9x2y2+y4=z2.pdf>

2016.1.7