

1 $\sqrt{4+\sqrt{6}}$ の小数部分を a とすると, $a - \frac{\sqrt{6}}{a} = \boxed{\text{アイ}}$ である。

(同志社女大)

2 a, b, c は 0 でない実数とする。 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$ が成り立つとき, この式の値を求めよ。

(東京女大)

- 3 $t \neq 3$ を満たす実数 t に対して, 2 次方程式 $2x^2 + tx + 1 = 0$ の解を α, β として,

$$A = \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\beta+1}$$

とおく。

- (1) A を t の式で表せ。
- (2) $A \geq 1$ が成り立つような t の範囲を求めよ。

この問題については, 答えだけではなく, 答えを導く過程も書くこと。

(学習院大)

- 4 1 以上 3 以下の範囲を動く実数 x, y, z に対して, $w = \frac{y+z+xy}{xy+xz}$ とする。

- (1) $y = 2, z = 3$ のとき, w のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $x = 1$ のとき, w のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) w のとり得る値の範囲を求めよ。

(法政大)

- 5 2つの2次方程式 $x^2 + ax - 6 = 0$, $x^2 - 2x + 3a = 0$ が共通な解をもつような定数 a の値とそのときの共通な解を求めよ。

(東北学院大)

6

- (1) $f(x) = x^2 - (p+5)x + 5p$ とする。不等式 $f(x) \leq 0$ の解は,

$$p < \boxed{\text{ア}} \text{ のとき } p \leq x \leq \boxed{\text{イ}},$$

$$\boxed{\text{ウ}} \leq p \text{ のとき } \boxed{\text{エ}} \leq x \leq p \text{ となる。}$$

- (2) $f(x) \leq 0$ を満たすどのような実数 x に対しても,

$$x^2 + 2px + p^2 - 3p - 1 > 0 \text{ が成り立つような実数 } p \text{ の範囲は,}$$

$$p < \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad \boxed{\text{ク}} < p \text{ である。}$$

(愛知学院大)

7

実数の定数 a, b に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1}$$

で定める. すべての実数 x で不等式

$$f(x) \leq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$$

が成り立つような点 (a, b) の範囲を図示せよ.

(京大)

8 実数 a に対して, $f(x) = x^4 + ax^3 + (a^2 - 2)x^2 + ax + 1$ とするとき, 以下の問いに答えなさい。

- (1) $x \neq 0$ に対して, $t = x + \frac{1}{x}$ とするとき, $\frac{f(x)}{x^2}$ を a と t の式で表しなさい。
- (2) x が 0 でない実数全体を動くとき, $t = x + \frac{1}{x}$ の取りうる値の範囲を求めなさい。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が少なくとも 1 つ実数解をもつような a の値の範囲を求めなさい。

(首都大)

9 円に内接する四角形 ABCD が, $AB = 3$, $BC = \sqrt{2}$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ のとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 対角線 AC の長さを求めよ。
- (2) 辺 AD と辺 CD の長さを求めよ。
- (3) 三角形 ABD の面積を求めよ。

(甲南大)

10 $AB = 3$, $BC = 7$, $CA = 5$ である $\triangle ABC$ の内心を I とし, 直線 AI と辺 BC の交点を P とする。

(1) $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}} \sqrt{\text{エ}}$ であり, 内接円の半径は $\frac{\text{オ}}{\text{カ}} \sqrt{\text{キ}}$,

外接円の半径は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \sqrt{\text{コ}}$ である。

(2) $\sin \angle CAP = \frac{\text{サ}}{\text{シ}} \sqrt{\text{ス}}$ であるから, 線分 CI の長さは $\sqrt{\text{セソ}}$ である。

(3) 線分 BP と CP の長さの比の値 $\frac{BP}{CP}$ と, 線分 AI と PI の長さの比の値 $\frac{AI}{PI}$ は,

それぞれ $\frac{\text{タ}}{\text{チ}}$ と $\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ である。

(東京理大)

11 円に内接する四角形 ABCD について、各辺の長さが $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 2$, $DA = 3$ であるとする。以下の間に答えよ。

(1) 対角線 AC の長さは $\sqrt{\boxed{1} \boxed{2}}$

また、 $\cos \angle ABC = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$

(2) 四角形 ABCD の面積は $\boxed{5} \sqrt{\boxed{6}}$

(3) 直線 AB と直線 CD は平行ではないので、1 点で交わる。この交点を E とおくととき、
 $EB = \boxed{7}$

(4) 点 E から四角形 ABCD に外接する円に接線を 2 本引き、それぞれの接点を P, Q とおくと、 $EP = EQ = \boxed{8} \sqrt{\boxed{9}}$

(関東学院大)

12 x は 1 より大きい実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 BC, CA, AB をそれぞれ $x : 1$ に内分する点をそれぞれ D, E, F とし、線分 BE と CF, CF と AD, AD と BE の交点をそれぞれ G, H, I とする。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 DEF の面積が $\frac{1}{2}$ となる x の値を求めよ。

(2) $FG : GC$ を x を用いて表せ。

(3) 三角形 GHI の面積が $\frac{1}{4}$ となる x の値を求めよ。

(17 奈良女大)

13 円に内接し対角線が直交する四角形 ABCD について，対角線の交点を E とし，その交点 E から辺 AD に垂線 EH を引く。また，線分 HE の延長と辺 BC の交点を M とする。このとき，次の各問に答えよ。

- (1) $\angle ADE = \angle CEM$ であることを示せ。
- (2) $BM = EM = CM$ であることを示せ。

(茨城大)

14 x, y を正の整数とする。

- (1) $17x - 36y = 1$ となる最小の x は である。
- (2) $17x^3 - 36y = 1$ となる最小の x は である。

(早大)

15 条件

$$xyz - 3(x + y + z) = 0 \text{ かつ } x \geq y \geq z > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす整数の組 (x, y, z) を求めたい。以下の各問に答えよ。

- (1) $xy - 3(x + y + 1) = 0$ かつ $x \geq y \geq 1$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。
- (2) $x \geq y \geq 4$ を満たす整数の組 (x, y) に対して, $4xy - 3(x + y + 4) > 0$ を証明せよ。
- (3) ① を満たす整数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

(成蹊大)

16

自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3}) = R(2^n)$ となることを示せ。
- (2) $R(2^{2017})$ を求めよ。
- (3) 自然数 m が $R(2^{2017}m + 2^{29}) = 5$ を満たすとき, $R(m)$ の値を求めよ。

(岡山大)

17

次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ.

- (i) N の正の約数は 12 個
- (ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12.

ただし, N の約数には 1 と N も含める.

(東工大)

18

自然数 n に対して, n のすべての正の約数(1 と n を含む)の和を $S(n)$ とおく。例えば, $S(9) = 1 + 3 + 9 = 13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) n が異なる素数 p と q によって $n = p^2q$ と表されるとき, $S(n) = 2n$ を満たす n をすべて求めよ。
- (2) a を自然数とする。 $n = 2^a - 1$ が $S(n) = n + 1$ を満たすとき, a は素数であることを示せ。
- (3) a を 2 以上の自然数とする。 $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ が $S(n) \leq 2n$ を満たすとき, n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。

(東京医歯大)

19 p を 2 でない素数とし, 自然数 m, n は

$$(m + n\sqrt{p})(m - n\sqrt{p}) = 1$$

を満たすとする。

(1) 互いに素な自然数の組 (x, y) で

$$m + n\sqrt{p} = \frac{x + y\sqrt{p}}{x - y\sqrt{p}}$$

を満たすものが存在することを示せ。

(2) x は (1) の条件を満たす自然数とする。 x が p で割り切れないことと, m を p で割った余りが 1 であることが, 同値であることを示せ。

(千葉大)

20 p を素数とするとき, 以下の命題を証明しなさい。

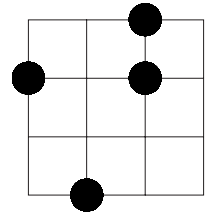
- (1) a, b, c を整数とするとき, $a^3 + pb^3 + p^2c^3 - p^3abc = 0$ ならば, a は p の倍数である。
- (2) a, b, c を整数とするとき, $a^3 + pb^3 + p^2c^3 - p^3abc = 0$ ならば, a, b, c はどれも p の倍数である。
- (3) a, b, c を整数とするとき, $a^3 + pb^3 + p^2c^3 - p^3abc = 0$ ならば, $a = b = c = 0$ である。
- (4) x, y, z を有理数とするとき, $x^3 + py^3 + p^2z^3 - p^3xyz = 0$ ならば, $x = y = z = 0$ である。

(聖マリアンナ医大)

21

座標平面の格子点 $\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ に n 個の碁石を置く。ここで、 n は正の整数とする。ただし、これらの碁石は同じ種類であり、互いに区別できない。また、格子点には高々 1 つの碁石しか置けないものとする。各 i に対して、 $\{(i, j) \mid 1 \leq j \leq n\}$ を第 i 列、各 j に対して $\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n\}$ を第 j 行と呼ぶ。

例: 4×4 の場合



(1) n 個の碁石を置くすべての場合の配置の総数を A_n とすると

$$A_1 = 1, A_2 = 6, A_3 = \boxed{(1)} \boxed{(2)}, A_4 = \boxed{(3)} \boxed{(4)} \boxed{(5)} \boxed{(6)}, \dots$$

である。

(2) n 個の碁石を置くとき、どの行およびどの列にも 1 個の碁石を置く場合の配置の総数を B_n とすると

$$B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = \boxed{(7)} \boxed{(8)}, B_4 = \boxed{(9)} \boxed{(10)} \boxed{(11)} \boxed{(12)}, \dots$$

である。

(3) n 個の碁石を置くとき、どの行およびどの列にも高々 2 個の碁石を置く場合の配置の総数を C_n とすると

$$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = \boxed{(13)} \boxed{(14)}, C_4 = \boxed{(15)} \boxed{(16)} \boxed{(17)} \boxed{(18)}, \dots$$

である。

(慶大)

22

1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 個の玉があり、これらのうち、1, 2, 3 が書かれた玉をそれぞれ玉 1, 玉 2, 玉 3 と呼ぶ。以下の問いに答えよ。

- (i) 9 個の玉から 3 個を選んで 1 つの箱に入れる。この入れ方は何通りあるか。
- (ii) (i) の入れ方のうち、箱に、玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれず、玉 1 と玉 3 もいっしょに含まれないものは何通りあるか。
- (iii) 9 個の玉を区別ができない 3 つの箱に分けて入れる。ただし、各箱にはそれぞれ 3 個ずつの玉を入れるものとする。この入れ方は何通りあるか。
- (iv) (iii) の入れ方のうち、どの箱にも、玉 1 と玉 2 がいっしょに含まれず、玉 1 と玉 3 いっしょに含まれないものは何通りあるか。

(九州工大)

23

袋の中に赤玉が 1 個、青玉が 2 個、黄玉が 3 個入っている。さいころを 1 回投げ、出た目の数だけ玉を袋から同時に取り出す。このとき、次の確率を求めよ。

- (1) 取り出した玉が青玉 1 個と黄玉 1 個の合計 2 個である。
- (2) 取り出した玉が 1 色のみである。
- (3) 取り出した玉の中にすべての色が含まれる。

(法政大)

24 同じ大きさのカードが 8 枚ある。カードそれぞれに 1 から 8 までの整数がひとつ書かれており、それぞれの整数は 1 枚にのみ書かれている。壺にこれら 8 枚のカードを入れる。

- (1) この壺から無作為に 3 枚のカードを同時に引く。引いたカードの 2 枚には、1, 2, 3 のうちのどれかふたつの数字が書かれており、かつ、残りの 1 枚には、4 から 8 までのどれかひとつの数字が書かれている確率は である。
- (2) (1) で引いたカードをすべて壺に戻す。壺から無作為に 3 枚のカードを同時に引き、それらを戻さずに、続けて無作為に 2 枚のカードを同時に引く。最初に引いた 3 枚のカードには、1, 2, 3 のうちのどれかふたつの数字と、4 から 8 までのどれかひとつの数字が書かれており、かつ、最後に引いた 2 枚のカードには、7, 8 のうちのどれかひとつの数字と、1 から 6 までのどれかひとつの数字が書かれている確率は である。
- (3) (2) で引いたカードをすべて壺に戻す。次に、8 個の箱を横に並べ、左から順に 1 から 8 までの番号をつける。壺から 1 枚ずつカードを無作為に引き、引いた順番と同じ番号の箱にカードを入れていく。例えば、3 枚目に引いたカードは番号 3 の箱に入れる。このとき、奇数が書かれているすべてのカード (1, 3, 5, 7 の 4 枚) は、カードの数字と同じ番号の箱に入り、かつ、偶数が書かれているすべてのカード (2, 4, 6, 8 の 4 枚) は、カードの数字と異なる番号の箱に入っている確率は である。

(早大)

25 ある病原菌を検出する検査法によると、病原菌がいるときに正しく判定する確率と病原菌がないときに正しく判定する確率はともに 95% である。全体の 2% にこの病原菌がいるとされる検体の中から 1 個の検体を抜き出して検査する。このとき、次の問 1～問 3 の空欄 (ア) ~ (ス) に当てはまる整数を 0 ~ 9 から 1 つ選び該当する解答欄にマークせよ。ただし、分数は既約分数で表せ。

問 1. 抜き出した検体に病原菌がいると判定される確率は $\frac{\boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}}}$ である。

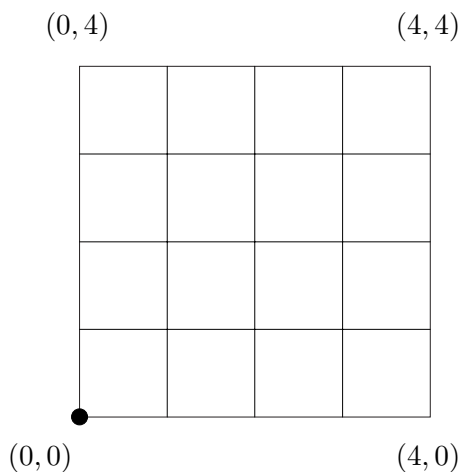
問 2. 抜き出した検体に病原菌がいると判定されたとき、この判定が正しい確率は $\frac{\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}}$ である。

問 3. 抜き出した検体に病原菌がないと判定されたとき、この判定が誤りである確率は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}} \boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}}}$ である。

(撰南大)

26 整数 i, j が $0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 4$ を満たすとして、座標平面上の点 (i, j) を考える。点 P は原点 $(0, 0)$ から出発して、次の規則でこの格子状の点を進むとする。

まず、さいころを 2 個投げ、両方の目が偶数なら点 $(2, 0)$ に、両方の目が奇数なら点 $(0, 2)$ に、そのほかの場合は点 $(1, 1)$ に進む。また、点 (i, j) に進んだときは、さいころを 2 個投げ両方の目が偶数なら点 $(i+2, j)$ に、両方の目が奇数なら点 $(i, j+2)$ に、そのほかの場合は点 $(i+1, j+1)$ に進む。ただし、この枠 $0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 4$ を越えることはできないので枠を越えるような場合は失敗とし、点 (i, j) に止まったままとして、もうさいころは投げないとする。このとき、次の問に答えなさい。



(1) 点 P が点 $(2, 2)$ を通る確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) 点 P が点 $(4, 4)$ に到達する確率は $\frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカキ}}}$ で、点 $(2, 2)$ を通らないで点 $(4, 4)$ に到達する確率は $\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサシ}}}$ である。

(3) 点 P が点 $(0, 4)$ に止まる確率は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ で、点 $(3, 3)$ に止まる確率は $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。また、このように点 P が止まる可能性がある点のうち、点 $(4, 4)$ 以外の点の個数は全部で $\boxed{\text{テ}}$ 個である。

(東北医薬大)

27 A と B の二人が次のゲームを行う。

「1 から 18 までの数字が一つずつ書かれた 18 個の玉が入った袋がある。袋から玉を 1 個取り出し、玉の数字が 3 の倍数ならば A に 2 点を与え、それ以外ならば B に 1 点を与える。取り出した玉は袋に戻さずに、この試行を繰り返す。」

- (1) 2 点先取した方が勝ちというルールするとき、A が勝つ確率を求めよ。
- (2) 12 点先取した方が勝ちというルールするとき、A が勝つ確率を求めよ。

(一橋大)

28 ある駐車場には 4 つの駐車枠 A, B, C, D が、アルファベット順に 1 列に並んでいる。そして自動車は、4 台が順に入場して、空いている枠に次の確率で駐車する。

- (i) B と C のうち先着の自動車が隣の枠に駐車している枠、および D には、等しい確率で駐車する。
- (ii) A に駐車する確率、および B と C のうち両隣が空いている枠に駐車する確率は、(i) の確率の 3 倍である。

このとき、次の確率を求めよ。ただし、1 台目の自動車が入場するときには、4 つの枠はすべて空いている。

問 1 1 台目の自動車が A に駐車する確率。

問 2 3 台目の自動車が入場したとき、B と D に自動車が駐車している確率。

問 3 4 台目の自動車が入場したとき、C に駐車していない確率。

(旭川医大)

29 2つの変数 x, y のデータが, n 個の x, y の値の組として, 次のように与えられているとする。

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

x_1, x_2, \dots, x_n と y_1, y_2, \dots, y_n の平均値をそれぞれ \bar{x}, \bar{y} , 標準偏差をそれぞれ s_x, s_y とする。定数 $a > 0$ と b に対して, 新しい変数 w を式 $w_i = ax_i + b, i = 1, 2, \dots, n$ で定義するとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 新しい変数 w に対するデータ w_1, w_2, \dots, w_n の平均値 \bar{w} と標準偏差 s_w を, \bar{x} と s_x を用いて表せ。
- (2) w と y の相関係数は, x と y の相関係数に等しいことを示せ。

(成城大)

$$\boxed{1} \quad 2^2 < 6 < 3^2 \text{ より}$$

$$2 < \sqrt{6} < 3$$

$$6 < 4 + \sqrt{6} < 7 < 3^2$$

$$\therefore 2 < \sqrt{6} < \sqrt{4 + \sqrt{6}} < 3$$

$\sqrt{4 + \sqrt{6}}$ の小数部分 a は

$$a = \sqrt{4 + \sqrt{6}} - 2$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} a - \frac{\sqrt{6}}{a} &= \frac{a^2 - \sqrt{6}}{a} \\ &= \frac{4 + \sqrt{6} - 4\sqrt{4 + \sqrt{6}} + 4 - \sqrt{6}}{\sqrt{4 + \sqrt{6}} - 2} \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{4 + \sqrt{6}}}{\sqrt{4 + \sqrt{6}} - 2} \\ &= \boxed{-4} \text{ (アイ)} \end{aligned}$$

(注) 上の計算は素直に行なったが、

$$a = \sqrt{4 + \sqrt{6}} - 2$$

を変形して、 a^2 を準備しておくのもよい。

$$a + 2 = \sqrt{4 + \sqrt{6}}$$

$$(a + 2)^2 = 4 + \sqrt{6}$$

$$\therefore a^2 = -4a + \sqrt{6}$$

これを用いて、

$$a - \frac{\sqrt{6}}{a} = \frac{a^2 - \sqrt{6}}{a} = \frac{-4a + \sqrt{6} - \sqrt{6}}{a} = \frac{-4a}{a} = \boxed{-4} \text{ (アイ)}$$

2

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = k$$

とおくと,

$$\begin{cases} b+c = ak & \dots\dots \textcircled{1} \\ c+a = bk & \dots\dots \textcircled{2} \\ a+b = ck & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

① + ② + ③ より

$$2(a+b+c) = k(a+b+c)$$

$$\therefore a+b+c=0 \text{ または } k=2$$

(i) $a+b+c=0$ のとき

① より

$$b+c = ak = -a$$

$a \neq 0$ より

$$k = -1$$

②, ③ についても同様であるから,

$$a+b+c=0 \text{ かつ } abc \neq 0$$

のとき

$$k = -1$$

となる。

(ii) $k=2$ のとき

① - ② のとき

$$b-a = 2(a-b)$$

$$a-b=0$$

$$\therefore a=b$$

同様に, ② - ③ より

$$b-c=0$$

$$\therefore a=b=c$$

$a=b=c \neq 0$ であれば仮定を満たし, $k=2$ となる。

(i), (ii) より

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = 2 \text{ または } -1 \quad (\text{答})$$

3

(1) 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{t}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$2\alpha^2 + t\alpha + 1 = 0$, $2\beta^2 + t\beta + 1 = 0$ であることも用いて,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\beta+1} \\ &= \frac{\beta(\beta+1) + \alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}{(\alpha+1)(\beta+1)} \\ &= \frac{-\frac{t\alpha+1}{2} - \frac{t\beta+1}{2} + \alpha + \beta}{(\alpha+1)(\beta+1)} \\ &= \frac{\left(-\frac{t}{2} + 1\right)(\alpha + \beta) - 1}{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{\left(-\frac{t}{2} + 1\right)\left(-\frac{t}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2} - \frac{t}{2} + 1} = \frac{t^2 - 2t - 4}{-2t + 6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)

$$A - 1 = \frac{t^2 - 2t - 4 - (-2t + 6)}{-2t + 6} = \frac{t^2 - 10}{-2t + 6} = \frac{t^2 - 10}{-2(t - 3)}$$

であるから,

$$\begin{aligned} A \geq 1 &\iff A - 1 \geq 0 \\ &\iff \frac{t^2 - 10}{t - 3} \leq 0 \\ &\iff t^2 - 10 = 0 \text{ または } (t^2 - 10)(t - 3) < 0 \\ &\iff t \leq -\sqrt{10} \text{ または } 3 < t \leq \sqrt{10} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

4

(1) $y = 2, z = 3$ のとき

$$w = \frac{5+2x}{5x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{5}$$

$1 \leq x \leq 3$ より

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

であるから, w のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \leq w \leq 1 + \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{11}{15} \leq w \leq \frac{7}{5} \quad (\text{答})$$

(2) $x = 1$ のとき, $y > 0$ に注意すると

$$w = \frac{y+z+y}{y+z} = 1 + \frac{y}{y+z} = 1 + \frac{y}{1 + \frac{z}{y}}$$

$1 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 3$ より

$$\frac{1}{3} \leq \frac{z}{y} \leq 3$$

であるから,

$$\frac{4}{3} \leq 1 + \frac{z}{y} \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{y}{1 + \frac{z}{y}} \leq \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$1 + \frac{1}{4} \leq w \leq 1 + \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{5}{4} \leq w \leq \frac{7}{4} \quad (\text{答})$$

(3) (1), (2) を参考にすると

$$w = \frac{y+z+xy}{x(y+z)} = \frac{1}{x} + \frac{y}{y+z} = \frac{1}{x} + \frac{y}{1 + \frac{z}{y}}$$

と変形されるから, ①, ②より, w のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \leq w \leq 1 + \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{7}{12} \leq w \leq \frac{7}{4} \quad (\text{答})$$

5 共通解を k とすると,

$$\begin{cases} k^2 + ak - 6 = 0 & \dots\dots ① \\ k^2 - 2k + 3a = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

(解法 1) ②を①に代入して a を消去すると

$$\begin{aligned} k^2 + \frac{2k - k^2}{3} \cdot k - 6 &= 0 \\ k(k^2 - 2k) - 3(k^2 - 6) &= 0 \\ k^3 - 5k^2 + 18 &= 0 \\ (k - 3)(k^2 - 2k - 6) &= 0 \\ \therefore k &= 3, 1 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

②に代入すると,

$$\begin{aligned} k = 3 \text{ のとき } a &= -1 \\ k = 1 \pm \sqrt{7} \text{ のとき } k^2 - 2k &= 6, \quad a = -2 \end{aligned}$$

以上をまとめて, 共通解をもつような a は

$$a = -1, -2 \quad (\text{答})$$

共通解は

$$a = -1 \text{ のとき } 3, \quad a = -2 \text{ のとき } 1 \pm \sqrt{7} \quad (\text{答})$$

(解法 2) ① - ② より

$$\begin{aligned} (a + 2)k - 6 - 3a &= 0 \\ (a + 2)(k - 3) &= 0 \\ \therefore a &= -2 \text{ または } k = 3 \end{aligned}$$

$a = -2$ のとき, ①と②は同一であるから 2 解とも共通解であり,

$$k^2 - 2k - 6 = 0 \quad \therefore k = 1 \pm \sqrt{7}$$

$k = 3$ のとき, ②より

$$9 - 6 + 3a = 0 \quad \therefore a = -1$$

このとき, 連立方程式は

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0 \end{cases}$$

となるから, $x = 3$ だけで共通解である。

以上をまとめて, 共通解をもつような a は

$$a = -1, -2 \quad (\text{答})$$

共通解は

$$a = -1 \text{ のとき } 3, \quad a = -2 \text{ のとき } 1 \pm \sqrt{7} \quad (\text{答})$$

(注) 解法 1 では, 共通解が $k = 3, 1 \pm \sqrt{7}$ で全部(必要十分)であると述べているが, 解法 2 では $k = 3$ は必要条件にすぎないので, 3 を共通解に持つとき他に共通解がないか調べる必要がある。

6

(1) $f(x) = (x - p)(x - 5)$

であるから, 不等式 $f(x) \leq 0$ の解は

$$p < \underset{\text{(ア)}}{\boxed{5}} \text{ のとき } p \leq x \leq \underset{\text{(イ)}}{\boxed{5}}$$

$$p \geq \underset{\text{(ウ)}}{\boxed{5}} \text{ のとき } \underset{\text{(エ)}}{\boxed{5}} \leq x \leq p$$

(2) $f(x) \leq 0$ を満たす x における

$$g(x) = x^2 + 2px + p^2 - 3p - 1 = (x + p)^2 - 3p - 1$$

の最小値 m は

$$(p < 5 \leq -p \text{ のとき } m = g(5) = p^2 + 7p + 24 = \left(p + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{47}{4}$$

$$p \leq -p \leq 5 \text{ のとき } m = g(-p) = -3p - 1$$

$$-p \leq p \leq 5 \text{ のとき } m = g(p) = 4p^2 - 3p - 1 = (p - 1)(4p + 1)$$

$$5 \leq p \text{ のとき } m = g(5) = \left(p + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{47}{4}$$

題意の条件は $m > 0$ であるから,

$$p \leq -5 \text{ または } p \geq 5 \text{ のときは条件を満たし,}$$

$$-5 \leq p \leq 0 \text{ のとき } -3p - 1 > 0$$

$$0 \leq p \leq 5 \text{ のとき } (p - 1)(4p + 1) > 0$$

であり,

$$p < \underset{\text{(オカ)}}{\boxed{\frac{-1}{3}}} \text{ または } \underset{\text{(ク)}}{\boxed{1}} < p$$

7 $f(x)^3 - 2f(x)^2 - f(x) + 2 = \{f(x) - 2\}\{f(x) - 1\}\{f(x) + 1\} \geq 0$

が成り立つのは,

$$-1 \leq f(x) \leq 1 \text{ または } f(x) \geq 2$$

の範囲にあるときである。

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

より $f(x)$ は全実数で定義され,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

となる連続関数であるから, ($f(x) \geq 2$ を満たす x はなく)

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

が成り立つことが条件である。 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$, $x^2+x+1 > 0$ より

$$-(x^2+x+1) \leq ax+b \leq x^2+x+1$$

$$\therefore \begin{cases} x^2 + (a+1)x + b + 1 \geq 0 \\ x^2 - (a-1)x - b + 1 \geq 1 \end{cases}$$

これがすべての実数 x で成り立つ条件を求めればよいが,

$$x^2 + (a+1)x + b + 1 = \left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a+1)^2 + b + 1$$

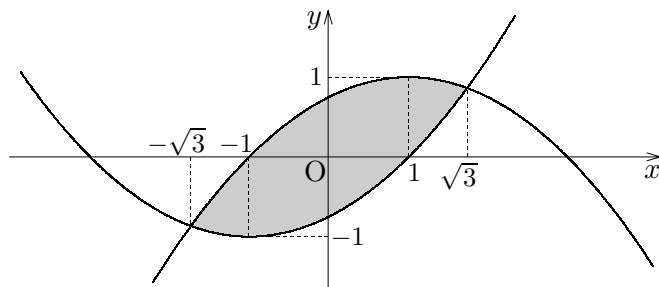
$$x^2 - (a-1)x - b + 1 = \left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a-1)^2 - b + 1$$

であるから, その条件は

$$-\frac{1}{4}(a+1)^2 + b + 1 \geq 0 \text{ かつ } -\frac{1}{4}(a-1)^2 - b + 1 \geq 0$$

$$\therefore \frac{1}{4}(a+1)^2 - 1 \leq b \leq -\frac{1}{4}(a-1)^2 + 1$$

これを ab 平面上に図示すると, 次図の網目部分(境界も含む)となる。



(答)

(注) 極限と連続関数の指摘は重要なポイントの一つになっているが, 本問が数学 III を出題範囲外として出題された場合には, 採点の対象とならないために書かなくても減点されない。

8

(1) $t = x + \frac{1}{x}$ とするとき,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x^2} &= x^2 + ax + (a^2 - 2) + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + a^2 - 2 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + a^2 - 2 \\ &= t^2 + at + a^2 - 4 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $t = x + \frac{1}{x}$ を変形して得られる 2 次方程式

$$x^2 - tx + 1 = 0$$

が 0 でない実数解をもつと考えると,

$$(\text{判別式}) = t^2 - 4 \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ または } t \geq 2 \quad (\text{答})$$

(注) $F(x) = x + \frac{1}{x}$ を微分して増減を調べてもよい。数学 I で解ける問題に数学 III を用いても差し支えない。なお, 相加・相乗平均の不等式を用いて

$$|t| = \left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2\sqrt{\left|x\right| \cdot \frac{1}{\left|x\right|}} = 2$$

とするだけでは, $-2 < t < 2$ とはならないと述べているだけで, とり得る値の範囲を求めたことにはならない。(数学 II の知識を用いる自体は差し支えない。)

(3) $g(t) = t^2 + at + (a^2 - 4) = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 - 4$

とおき, tu 平面上で $u = g(t)$ のグラフと t 軸 ($u = 0$) が $t \leq -2$ または $t \geq 2$ の範囲で共有点をもつ条件を求めればよい。

(i) $g(-2)g(2) < 0$ のとき

点 $(-2, g(-2))$ と点 $(2, g(2))$ が t 軸 ($u = 0$) に関して反対側にあるから, $u = f(t)$ のグラフと t 軸が $t < -2$ と $-2 < t < 2$ で交わる, または $-2 < t < 2$ と $t > 2$ で交わるから条件を満たし,

$$g(-2)g(2) = (a^2 - 2a)(a^2 + 2a) = a^2(a + 2)(a - 2) < 0$$

より

$$-2 < a < 0 \text{ または } 0 < a < 2$$

(ii) $g(-2)g(2) = 0$ のとき

$u = f(t)$ のグラフは点 $(-2, 0)$ または点 $(2, 0)$ を通るから条件を満たし,

$$g(-2)g(2) = a^2(a + 2)(a - 2) = 0$$

より

$$a = -2, 0, 2$$

(iii) $g(-2)g(2) > 0$ のとき

点 $(-2, g(-2))$ と点 $(2, g(2))$ が t 軸 ($u = 0$) に関して同じ側にあるから, $g(t)$ が下に凸であることも考えて, 条件は

$$g(-2) = a(a-2) < 0 \text{ かつ } g(2) = a(a+2) < 0$$

であるが, これを満たす a は存在しない。

(i) または (ii) または (iii) より, 求める a の値の範囲は

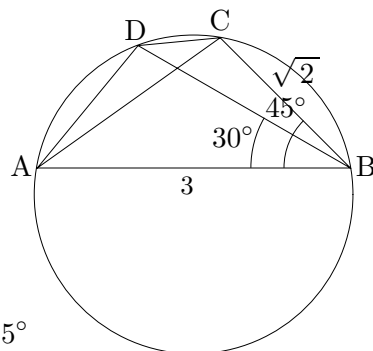
$$-2 \leq a \leq 2 \quad (\text{答})$$

9

(1) $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ \\ &= 9 + 2 - 6 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\therefore AC = \sqrt{5} \quad (\text{答})$$



(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

円周角の性質より

$$\angle ACD = \angle ABD = 30^\circ$$

$\triangle ACD$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 135^\circ} \quad \therefore AD = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (\text{答})$$

$CD = x$ とおき, $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$(\sqrt{5})^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ$$

$$x^2 + \sqrt{5}x - \frac{5}{2} = 0$$

$x = CD > 0$ より

$$CD = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{15}}{2} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{2}$$

$$\triangle ACD \text{ の面積は } \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{2} \cdot \sin 135^\circ = \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{8}$$

四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{3}{2} + \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{8} = \frac{7 + 5\sqrt{3}}{8}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

であり, 補角の公式より

$$\sin \angle BAD = \sin \angle BCD$$

であることに注目すると,

$$\triangle ABD : \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot DA \cdot AB \cdot \sin \angle BAD : \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin \angle BCD$$

$$= DA \cdot AB : BC \cdot CD$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times 3 : \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{2} \\
 &= 3 : (\sqrt{3} - 1)
 \end{aligned}$$

△ABD の面積 T は

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{3}{3 + (\sqrt{3} - 1)} S \\
 &= \frac{3}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{7 + 5\sqrt{3}}{8} \\
 &= \frac{3(2 - \sqrt{3})(7 + 5\sqrt{3})}{8} \\
 &= \frac{3(3\sqrt{3} - 1)}{8} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

10

(1) $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\cos \angle BAC = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \angle BAC = 120^\circ$$

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\boxed{15}}{\boxed{4}} \sqrt{\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}}$$

内接円の半径を r とおくと, $S = \triangle ABI + \triangle BCI + \triangle CAI$ より

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r \quad \therefore r = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \sqrt{\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}}$$

$\triangle ABC$ に正弦定理を適用して, 外接円の半径 R は

$$R = \frac{7}{2 \sin 120^\circ} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{3}} \sqrt{\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}}$$

(2)

$$\sin \angle CAP = \sin 60^\circ = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \sqrt{\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}}$$

I から辺 AC におろした垂線の足を H とすると

$$HI = r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

直角三角形 AIH において

$$AH = \frac{r}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{2}$$

であるから,

$$CH = CA - AH = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

直角三角形 CHI において三平方の定理より

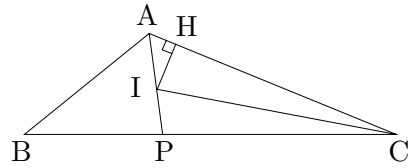
$$CI^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 21 \quad \therefore CI = \sqrt{\boxed{21}} \text{ (セソ)}$$

(3) AP は $\angle BAP$ の二等分線であるから

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}} \text{ (タ)} \quad \therefore CP = \frac{5}{3+5} BC = \frac{5}{8} \times 7 = \frac{35}{8}$$

CI は $\angle ACP$ の二等分線であるから

$$\frac{AI}{IP} = \frac{AC}{CP} = 5 \times \frac{8}{35} = \frac{\boxed{8}}{\boxed{7}} \text{ (ツ)} \text{ (テ)}$$



11

(1) $\triangle ABC$ および $\triangle CDA$ に余弦定理を適用すると

$$\cos \angle ABC = \frac{5^2 + 6^2 - AC^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{61 - AC^2}{60} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\cos \angle CDA = \frac{2^2 + 3^2 - AC^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{13 - AC^2}{12} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

補角の公式より $\cos \angle ABC + \cos \angle CDA = 0$ が成り立つから、

①, ②より

$$61 - AC^2 + 5(13 - AC^2) = 0$$

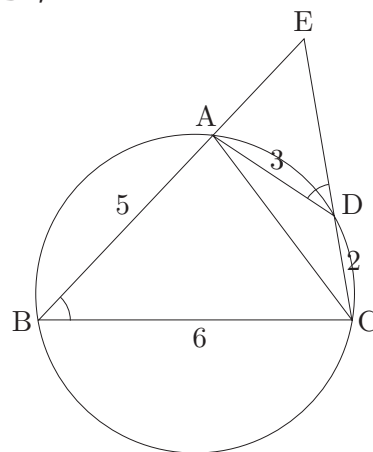
$$AC^2 = \frac{61 + 5 \times 13}{1 + 5} = 21$$

$$\therefore AC = \sqrt{\boxed{21}} \quad (1)(2)$$

①に代入して

$$\cos \angle ABC = \frac{61 - 21}{60} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \quad (3)$$

$$\cos \angle ABC = \frac{61 - 21}{60} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \quad (4)$$



(2) (1)の結果を用いて

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

③より

$$\sin \angle CDA = \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \triangle ABC + \triangle CDA$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin \angle ABC + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin \angle CDA$$

$$= \frac{1}{2} \times (5 \times 6 + 2 \times 3) \times \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \boxed{6} \sqrt{\boxed{5}} \quad (5) \quad (6)$$

(3) ③より

$$\angle EBC = \angle EDA$$

であるから、

$$\triangle EBC \sim \triangle EDA$$

対応する辺の比を考えて,

$$\frac{EB}{ED} = \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{DA} = 2$$

EB = x とおくと

$$ED = \frac{x}{2}, \quad EC = ED + CD = \frac{x}{2} + 2, \quad EA = EB - AB = x - 5$$

EC = 2EA より

$$\frac{x}{2} + 2 = 2(x - 5) \quad \therefore x = EB = \boxed{8} \quad (7)$$

(3) 方べきの定理より

$$EP^2 = EQ^2 = EA \cdot EB = (x - 5)x = (8 - 5) \times 8 = 24$$

$$\therefore EP = EQ = \boxed{2} \sqrt{\boxed{6}} \quad \begin{matrix} (8) & (9) \end{matrix}$$

12

(1) $\triangle DEF$ の面積について

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \triangle ABC - \triangle AFE - \triangle BDF - \triangle CED \\ &= \left(1 - \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x+1} \times 3\right) \triangle ABC \\ &= \frac{(x+1)^2 - 3x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

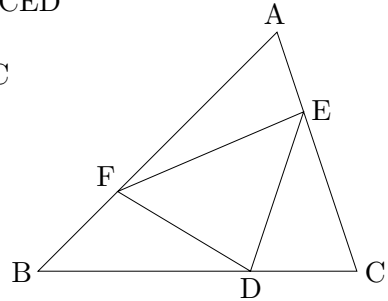
であるから,

$$(x+1)^2 = 2(x^2 - x + 1)$$

$$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0$$

$x > 1$ より

$$x = 2 + \sqrt{3} \quad (\text{答})$$



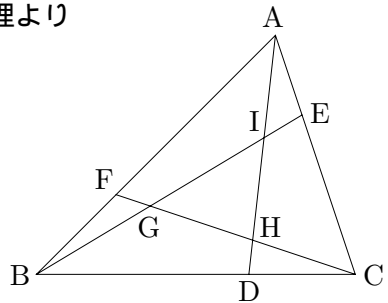
(2) $\triangle AFC$ と直線 BE に対して, メネラウスの定理より

$$\frac{FG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AB}{BF} = 1$$

$$\frac{FG}{GC} \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{x+1}{1} = 1$$

$$\frac{FG}{GC} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\therefore FG : GC = 1 : x(x+1) \quad (\text{答})$$



(3) $\triangle FBC$ と直線 AD に対して, メネラウスの定理より

$$\frac{FH}{HC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BA}{AF} = \frac{FH}{HC} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x} = 1 \quad \therefore \frac{FH}{HC} = \frac{x^2}{x+1}$$

(2) とあわせて, $1 + x(x+1) = x^2 + (x+1)$ より

$$FG : GH : HC = 1 : (x^2 - 1) : (x+1)$$

同様にして,

$$DH : HI : IA = 1 : (x^2 - 1) : (x+1) = \frac{1}{x+1} : (x-1) : 1$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} = \triangle GHI &= \frac{x-1}{x} \triangle AGH \\ &= \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+x+1} \triangle AFC \\ &= \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+x+1} \cdot \frac{x}{x+1} \triangle ABC \\ &= \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

$$x^2 + x + 1 = 4(x-1)^2$$

$$3x^2 - 9x + 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = 0$$

$x > 1$ より

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{答})$$

13

(1) $\angle ADE = \theta$ とおく。

$\angle DHE = 90^\circ$ より

$$\angle DEH = 90^\circ - \theta$$

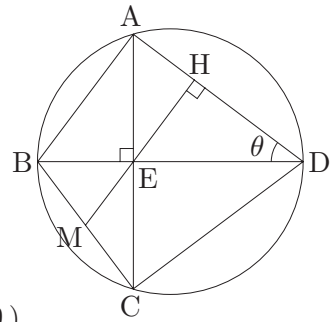
$\angle DEH$ と $\angle BEM$ は対頂角であるから

$$\angle BEM = \angle DEH = 90^\circ - \theta$$

$\angle CEB = 90^\circ$ であるから

$$\angle CEM = 90^\circ - \angle BEM = \theta = \angle ADE$$

(証明おわり)



(2) 円周角の性質より

$$\angle ECM = \angle ACB = \angle ADB = \angle ADE = \theta$$

(1)より

$$\angle CEM = \angle ADE = \angle ECM$$

であるから,

$$EM = CM$$

$\angle CEB = 90^\circ$, $\angle ECB = \angle ECM = \theta$ より

$$\angle EBM = \angle EBC = 90^\circ - \theta$$

(1)の考察より

$$\angle BEM = 90^\circ - \theta$$

であるから,

$$\angle EBM = \angle BEM$$

$$\therefore BM = EM$$

(証明おわり)

14

(1) $17x - 36y = 1$ ①

を満たす整数の組 (x, y) を 1 つ探すと

$$36 = 17 \times 2 + 2 \quad \dots\dots ②$$

$$17 = 2 \times 8 + 1 \quad \dots\dots ③$$

③に②を代入して

$$17 = (36 - 17 \times 2) \times 8 + 1$$

$$\therefore 17 \times 17 - 36 \times 8 = 1 \quad \dots\dots ④$$

① - ④ より

$$17(x - 17) - 36(y - 8) = 0$$

$$\therefore 17(x - 17) = 36(y - 8)$$

④より 17 と 36 は互いに素であるから

$$x - 17 = 36n, \quad y - 8 = 17n$$

を満たす整数 n が定まり,

$$(x, y) = (36n + 17, 17n + 8) \quad (n \text{ は非負整数}) \quad \dots\dots ⑤$$

x が最小となる①の正の整数解は

$$(x, y) = \left(\underset{\text{(ア)}}{\boxed{17}}, 8 \right)$$

(2) 方程式

$$17x^3 - 36y = 1 \quad \dots\dots ⑥$$

の正の整数解は, ⑤より

$$(x^3, y) = (36n + 17, 17n + 8) \quad (n \text{ は非負整数})$$

のうち, $36n + 17$ が立方数となるものである。

$$36 \times 0 + 17 = 17 \quad (\text{素数})$$

$$36 \times 1 + 17 = 53 \quad (\text{素数})$$

$$36 \times 2 + 17 = 89 \quad (\text{素数})$$

$$36 \times 3 + 17 = 125 = 5^3$$

であるから, x が最小となる⑥の正の整数解は

$$(x, y) = \left(\underset{\text{(イ)}}{\boxed{5}}, 59 \right)$$

15

(1) $xy - 3(x + y + 1) = 0$ を変形すると

$$(x - 3)(y - 3) = 12$$

$$x - 3 \geq y - 3 \geq 1 - 3 = -2 \text{ より}$$

$$(x - 3, y - 3) = (12, 1), (6, 2), (4, 3)$$

$$\therefore (x, y) = (15, 4), (9, 5), (7, 6) \quad (\text{答})$$

(2) $x \geq y \geq 4$ のとき

$$4xy - 3(x + y + 4) = 4\left(xy - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y\right) - 12$$

$$= 4\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(y - \frac{3}{4}\right) - \frac{9}{4} - 12$$

$$\geq 4 \times \left(4 \times 4 - \frac{3}{4} \times 4 - \frac{3}{4} \times 4\right) - 12 = 28 > 0$$

(証明おわり)

(3) (2)と同様にして, $x \geq y \geq n \geq 3$ であれば

$$nxy - 3(x + y + n) = n\left(xy - \frac{3}{n}x - \frac{3}{n}y\right) - 3n$$

$$= n\left(x - \frac{3}{n}\right)\left(y - \frac{3}{n}\right) - \frac{9}{n} - 3n$$

$$\geq n\left(n^2 - \frac{3}{n} \cdot n - \frac{3}{n} \cdot n\right) - 3n = n(n^2 - 9)$$

であるから,

$$n \geq 4 \text{ のとき } nxy - 3(x + y + n) > 0$$

が成り立ち,

$$n = 3 \text{ のとき } x = y = 3$$

に限って $3xy - 3(x + y + 3) = 0$ かつ $x \geq y \geq 3$ が成り立つ。

(1)において $z = 1$ のときを求めたので, ①を満たす整数の組をすべて求めるには, あと $z = 2$ のときだけを求めればよい。

$$2xy - 3(x + y + 2) = 0$$

を変形して

$$xy - \frac{3}{2}(x + y) = 3$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 3 + \frac{9}{4} \quad \therefore (2x - 3)(2y - 3) = 21$$

$$2x - 3 \geq 2y - 3 \geq 2 \times 2 - 3 = 1 \text{ より}$$

$$(2x - 3, 2y - 3) = (21, 1), (7, 3) \quad \therefore (x, y) = (12, 2), (5, 3)$$

以上より, ①を満たす整数の組は

$$(x, y, z) = (15, 4, 1), (9, 5, 1), (7, 6, 1), (12, 2, 2), (5, 3, 2), (3, 3, 3)$$

(答)

16

$$(1) \quad 2^{n+3} - 2^n = 2^n \times (2^3 - 1) = 7 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{7}$$

より

$$R(2^{n+3}) = R(2^n) \quad (\text{証明おわり})$$

(2) 2017 = 3 × 672 + 1 であるから, (1)より

$$R(2^{2017}) = R(2^1) = 2 \quad (\text{答})$$

(3) 29 = 3 × 9 + 2 であるから, (1)より

$$R(2^{29}) = R(2^2) = 4$$

(2)の結果とあわせて

$$R(2^{2017}m + 2^{29}) = R(2m + 4)$$

となるから, この値が 5 のとき

$$2m + 4 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$\therefore 2m \equiv 1 \pmod{7}$$

 $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ に注目して, 両辺に 4 をかけると

$$m \equiv 8m \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\therefore R(m) = 4 \quad (\text{答})$$

17 12 は N の約数であるから,

1, 2, 3, 4, 6, 12, はすべて N の約数

である。条件 (ii) より, 5, 7, 8, 9, 10, 11 の 1 つだけが N の約数であるが, 5 または 10 が N の約数ならば 5 も 10 も N の約数となって条件 (ii) に反するから,

7, 8, 9, 11 のいずれか 1 つだけが N の約数である。

N が 13 以上の素因数 p をもつとすれば, N は $2^2 \times 3 \times p$ で割り切れ,
 $2^2 \times 3 \times p$ の正の約数は $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$ 個
 であることより, N は 13 個以上の正の約数を持ち, 条件 (i) に反するから,
 N は 2, 3, 7, 11 以外に素因数をもたない。

- N の素因数が 2, 3 だけであり, $2^3 \times 3$ で割り切れる (8 を約数にもつ) とき
 $N = 2^a 3^b$ ($a \geq 3, b \geq 1$) とおくと, 正の約数の個数が

$$(a+1)(b+1) = 12$$

であることより,

$$(a, b) = (5, 1), (3, 2)$$

このうち, 8 と 9 の一方だけが N の約数となるものだけ選ぶと

$$N = 2^5 \times 3 = 96$$

- N の素因数が 2, 3 だけであり, $2^2 \times 3^2$ で割り切れる (9 を約数にもつ) とき
 $N = 2^a 3^b$ ($a \geq 2, b \geq 2$) とおくと, 正の約数の個数が

$$(a+1)(b+1) = 12$$

であることより,

$$(a, b) = (3, 2), (2, 3)$$

このうち, 8 と 9 の一方だけが N の約数となるものだけ選ぶと

$$2^2 \times 3^3 = 108$$

- N が 2, 3 以外に素因数 p をもつとき
 $2^2 \times 3 \times p$ は正の約数を

$$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12 \text{ 個}$$

もち, それらはすべて N の約数となるから, 条件 (i) を満たすのは

$$N = 2^2 \times 3 \times p$$

の形のものに限られる。条件 (ii) より

$$p = 7 \text{ または } p = 11$$

であるから,

$$N = 2^2 \times 3 \times 7 = 84 \text{ または } 2^2 \times 3 \times 11 = 132$$

以上より, 求める正の整数 N は

$$N = 84, 96, 108, 132 \quad (\text{答})$$

(別解) 条件 (i) を考えて, N の正の約数を小さい方から順に

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}, a_{12} \quad (a_1 = 1, a_{12} = N)$$

とおくと,

$$a_1 a_{12} = a_2 a_{11} = a_3 a_{10} = a_4 a_9 = a_5 a_8 = a_6 a_7 = N$$

であり、特に a_6, a_7 に注目する。条件(ii)より

$$12 \text{ の約数はすべて } N \text{ の約数であり, } a_7 = 12$$

であるから、

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, 6 \in \{a_5, a_6\}$$

ここで、 $a_5 = 5, a_6 = 6$ であるとすれば、($a_2 = 2$ より) 10 も N の約数となって、 $a_7 = 12$ に反するから、

$$a_5 = 6, a_6 \text{ は } 7, 8, 9, 10, 11 \text{ のいずれかである。}$$

1° $a_6 = 7$ のとき

$$N = a_6 a_7 = 7 \times 12 = 2^2 \times 3 \times 7$$

の正の約数は

$$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12 \text{ 個}$$

であり、 $8, 9, 10, 11$ は N の約数ではないから、すべての条件を満たす。

2° $a_6 = 8$ のとき

$$N = a_6 a_7 = 8 \times 12 = 2^5 \times 3$$

の正の約数は

$$(6+1) \times (1+1) = 12 \text{ 個}$$

であり、 $7, 9, 10, 11$ は N の約数ではないから、すべての条件を満たす。

3° $a_6 = 9$ のとき

$$N = a_6 a_7 = 9 \times 12 = 2^2 \times 3^3$$

の正の約数は

$$(2+1) \times (3+1) = 12 \text{ 個}$$

であり、 $7, 8, 10, 11$ は N の約数ではないから、すべての条件を満たす。

4° $a_6 = 10$ のとき

$$N = a_6 a_7 = 10 \times 12 = 2^3 \times 3 \times 5$$

の正の約数は

$$(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 16 \text{ 個}$$

となって、条件(i)を満たさない。

5° $a_6 = 11$ のとき

$$N = a_6 a_7 = 11 \times 12 = 2^2 \times 3 \times 11$$

の正の約数は

$$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12 \text{ 個}$$

であり、 $7, 8, 9, 10$ は N の約数ではないから、すべての条件を満たす。

以上より、求める正の整数 N は

$$N = 84, 96, 108, 132 \quad (\text{答})$$

18

(1) $S(p^2q) = (1 + p + p^2)(1 + q)$

$S(p^2q) = 2p^2q$ のとき

$$1 + p + p^2 + (1 + p)q = p^2q$$

$$(p^2 - p - 1)q = p^2 + p + 1$$

p が素数であることより

$$p^2 - p - 1 = p(p - 1) - 1 \geq 2 \times (2 - 1) - 1 > 0$$

であるから,

$$q = \frac{p^2 + p + 1}{p^2 - p - 1}$$

q は素数で $q \geq 2$ であるから

$$p^2 + p + 1 \geq 2(p^2 - p - 1) \quad \therefore p^2 - 3p - 3 \leq 0$$

ここで,

$$2^2 - 3 \times 2 - 3 = -5 < 0$$

$$3^2 - 3 \times 3 - 3 = -3 < 0$$

$$5^2 - 3 \times 5 - 3 = 7 > 0$$

であるから

$$p = 2 \text{ または } p = 3$$

$\frac{p^2 + p + 1}{p^2 - p - 1}$ について

$$\frac{2^2 + 2 + 1}{2^2 - 2 - 1} = 7 \text{ は素数, } \frac{3^2 + 3 + 1}{3^2 - 3 - 1} = \frac{13}{5} \text{ は整数でない}$$

ということより,

$$p = 2, \quad q = 7 \quad (\text{答})$$

(2) $S(n) = n + 1$

は n の正の約数が 1 と n のちょうど 2 つであることを意味するから,

$$n = 2^a - 1 \text{ は素数である。}$$

a が素数でないとする、 $n \geq 2$ より $a = 1$ ではなく,

$$a = bc$$

となる 2 以上の整数 b, c が存在するが,

$$n = 2^{bc} - 1 = (2^b - 1)(2^{b(c-1)} + 2^{b(c-2)} + \dots + 2^b + 1)$$

は素数ではないから矛盾する。よって、 a は素数である。

(証明おわり)

(3) $a \geq 2$ より 2^{a-1} と $2^a - 1$ は互いに素であるから、 $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ のとき

$$S(n) = S(2^{a-1})S(2^a - 1)$$

$$= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{a-1})S(2^a - 1)$$

$$= (2^a - 1)S(2^a - 1) \leq 2n = 2^a(2^a - 1)$$

$2^a - 1 > 1$ であるから

$$2^a - 1 < S(2^a - 1) \leq 2^a$$

$$\therefore S(2^a - 1) = 2^a = (2^a - 1) + 1$$

(2)より

a は素数

$a = 2$ のとき

$$n = 2 \times (2^2 - 1) = 6$$

$a = 3$ のとき

$$n = 2^2 \times (2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$$

$a = 5$ のとき

$$n = 2^4 \times (2^5 - 1) = 16 \times 31 = 496$$

$n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ の 1 の位が 6 または 8 であるとすれば,

$$\begin{aligned} 2^{(a+4)-1}(2^{a+4} - 1) - 2^{a-1}(2^a - 1) &= 2^{a-1} \{2^4(2^{a+4} - 1) - (2^a - 1)\} \\ &= 2^{a-1} \{(2^8 - 1)2^a - 2^4 + 1\} \\ &= 2^{a-1} \cdot 5 \cdot (51 \cdot 2^a - 3) \end{aligned}$$

は 10 で割り切れるから, $2^{(a+4)-1}(2^{a+4} - 1)$ も 1 の位は 6 または 8 である。

数学的帰納法(の論理)により, 3 以上の奇数に対して $2^{a-1}(2^a - 1)$ の 1 の位は 6 または 8 であることが成り立つ。

以上より, $S(n) \leq 2n$ を満たす自然数 $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ の 1 の位は 6 または 8 である。 (証明おわり)

19

(1) $m + n\sqrt{p} = \frac{x + y\sqrt{p}}{x - y\sqrt{p}}$ を変形して

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{p} &= (m + n\sqrt{p})(x - y\sqrt{p}) \\ &= mx - pny + (nx - my)\sqrt{p} \end{aligned}$$

$$\therefore (m - 1)x - pny + \{nx - (m + 1)y\}\sqrt{p} = 0$$

この等式を満たす自然数 x, y があるとすれば, \sqrt{p} は無理数であるから,

$$\begin{cases} (m - 1)x - pny = 0 & \dots\dots ① \\ nx - (m + 1)y = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

が必要である。①, ②および

$$(m + n\sqrt{p})(m - n\sqrt{p}) - 1 = (m + 1)(m - 1) - pn^2 = 0$$

を考え,

$$x = \frac{pn}{\gcd(pn, m - 1)}, \quad y = \frac{m - 1}{\gcd(pn, m - 1)}$$

とおくと, x と y は互いに素な自然数であり,

$$\begin{aligned} \frac{x + y\sqrt{p}}{x - y\sqrt{p}} &= \frac{pn + (m - 1)\sqrt{p}}{pn - (m - 1)\sqrt{p}} \\ &= \frac{\{pn + (m - 1)\sqrt{p}\}^2}{\{pn - (m - 1)\sqrt{p}\}\{pn + (m - 1)\sqrt{p}\}} \\ &= \frac{p\{pn^2 + (m - 1)^2 + 2(m - 1)n\sqrt{p}\}}{p\{pn^2 - (m - 1)^2\}} \\ &= \frac{pn^2 + (m - 1)^2 + 2(m - 1)n\sqrt{p}}{pn^2 - (m - 1)^2} \\ &= \frac{(m + 1)(m - 1) + (m - 1)^2 + 2(m - 1)n\sqrt{p}}{(m + 1)(m - 1) - (m - 1)^2} \\ &= \frac{(m + 1) + (m - 1) + 2n\sqrt{p}}{(m + 1) - (m - 1)} \\ &= m + n\sqrt{p} \end{aligned}$$

(証明おわり)

(2) x, y は①かつ②を満たす互いに素な自然数であるとする。

x が p で割り切れないとすると, ①より

$$(m - 1)x = pny \text{ は素数 } p \text{ で割り切れる}$$

から, $m - 1$ は p で割り切れ,

m を p で割った余りは 1 である。

逆に, $m \equiv 1 \pmod{p}$ であるとすれば, p は奇素数であるから,

$m + 1$ は p で割り切れない。

y が p で割り切れるなら, x と y は互いに素であるから, x は p で割り切れない。

y が p で割り切れないなら, ②より

$$nx = (m+1)y \text{ は } p \text{ で割り切れない}$$

から, x も p で割り切れない。

以上より, x が p で割り切れないことと, m を p で割った余りが 1 であることは
同値である。 (証明おわり)

20

(1) $a^3 + pb^3 + p^2c^3 - p^3abc = 0$ ならば,

$$a^3 = p(-b^3 - pc^3 + p^2abc)$$

は p で割り切れるが, p は素数であるから, a は p で割り切れる。 (証明おわり)

(2) (1)より

$$a = pa_1 \quad (a_1 \text{ は整数})$$

とおくことができ、

$$p^3a_1^3 + pb^3 + p^2c^3 - p^4a_1bc = 0$$

$$p^2a_1^3 + b^3 + pc^3 - p^3a_1bc = 0$$

$$\therefore b^3 = p(-c^3 + p^2a_1bc - pa_1^3)$$

p は素数であるから, b は p で割り切れ、

$$b = pb_1 \quad (b_1 \text{ は整数})$$

とおくと、

$$p^2a_1^3 + p^3b_1^3 + pc^3 - p^4a_1b_1c = 0$$

$$pa_1^3 + p^2b_1^3 + c^3 - p^3a_1b_1c = 0$$

$$\therefore c^3 = p(p^2a_1b_1c - a_1^3 - pb_1^3)$$

p は素数であるから, c は p で割り切れる。

(証明おわり)

(3) $a = b = c = 0$ でないとすれば, 最大公約数を $d > 0$ として

$$a = d\alpha, \quad b = d\beta, \quad c = d\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は最大公約数 } 1 \text{ の整数})$$

とおくことができ、

$$d^3\alpha^3 + pd^3\beta^3 + p^2d^3\gamma^3 - p^3d^3\alpha\beta\gamma = 0$$

$$\therefore \alpha^3 + p\beta^3 + p^2\gamma^3 - p^3\alpha\beta\gamma = 0$$

(2)より, α, β, γ はいずれも p で割り切れ, 最大公約数が 1 であることに反する。

よって, $a = b = c = 0$ である。

(証明おわり)

(別解) 数学的帰納法により、

$$a = p^n a_n, \quad b = p^n b_n, \quad c = p^n c_n$$

を満たす整数 a_n, b_n, c_n が存在することを示してもよい。

(4) x, y, z が有理数のとき, 分母を最小公倍数 $n (\neq 0)$ で通分して

$$x = \frac{a}{n}, \quad y = \frac{b}{n}, \quad z = \frac{c}{n} \quad (a, b, c, n \text{ は整数})$$

と表されるから、

$$\frac{a^3}{n^3} + p \cdot \frac{b^3}{n^3} + p^2 \frac{c^3}{n^3} - p^3 \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{n} = 0$$

$$\therefore a^3 + pb^3 + p^2c^3 - p^3abc = 0$$

(2)より $a = b = c = 0$ であるから

$$x = \frac{a}{n} = 0, \quad y = \frac{b}{n} = 0, \quad z = \frac{c}{n} = 0$$

(証明おわり)

21

(1) $A_n = {}_n C_n$ であるから

$$A_3 = {}_9 C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{84}$$

$$A_4 = {}_{16} C_4 = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \boxed{1820}$$

(2) $B_n = n!$ であるから

$$B_3 = 3! = \boxed{6}, \quad B_4 = 4! = \boxed{24}$$

(3) $n = 3$ のとき, 1つの行が 2 個となるのは, その行と 2 列を決めると, あとの 1 個は残り 2 行のどこに置いてよいから,

$$3 \times {}_3 C_2 \times 6 = 54$$

どの行も 1 個ずつのとき, 各列 1 個の場合と 1 列だけ 2 個の場合を考え,

$$B_3 + (3 \times {}_3 C_2) \times 2 = 6 + 18 = 24$$

以上をあわせて

$$C_3 = 54 + 24 = \boxed{78}$$

 $n = 4$ のとき

(i) 2 行が 2 個ずつのとき

2 行と 2 個の位置を選ぶと考えると

$${}_4 C_2 \times {}_4 C_2 \times {}_4 C_2 = 216 \text{ 通り}$$

(ii) 1 行のみが 2 個のとき

行と位置を選び, 3 個並ぶ列ができないようにして

$$(4 \times {}_4 C_2) \times {}_3 C_2 \times (4^2 - 2) = 1008 \text{ 通り}$$

(iii) どの行も 1 個ずつのとき

各列 1 個ずつの場合と 2 個が 1 列または 2 列できる場合とを考えて,

$$B_4 + (4 \times {}_4 C_2) \times (3 \times 2) + {}_4 C_2 \times {}_4 C_2 = 24 + 144 + 36 = 204 \text{ 通り}$$

以上をあわせて,

$$C_4 = 216 + 1008 + 204 = \boxed{1428}$$

22

(1) 9個の玉から3個を選んで1つの箱に入れるのは、

$${}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \text{ 通り} \quad (\text{答})$$

(2) 玉1以外の3個を選ぶ場合と玉1を選んで玉2, 3を選ばない場合とに分けて考えて、入れ方は

$${}_8C_3 + {}_6C_2 = 56 + 15 = 71 \text{ 通り} \quad (\text{答})$$

(3) 9個の玉を3個ずつ順に選んだ上で選んだ順序の区別をなくすと考えて、入れ方は

$$\frac{{}_9C_3 \times {}_6C_3}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{(3!)^2} = 8 \times 7 \times 5 = 280 \text{ 通り} \quad (\text{答})$$

(4) 玉1を入れる箱には玉2, 3以外の6個から2個を選んで入れ、残り6個は単に3個ずつ分ければよいから、

$${}_6C_2 \times \frac{{}_6C_3}{2} = 15 \times 10 = 150 \text{ 通り} \quad (\text{答})$$

23

(1) 2個の玉を取り出すには2の目を出すことが必要であり、青玉黄玉1個ずつを取り出す確率は

$$\frac{1}{6} \times \frac{2 \times 3}{{}_6C_2} = \frac{1}{15} \quad (\text{答})$$

(2) 取り出した玉が1色であるのは、

- 1の目を出す
- 2の目を出して、2個とも青玉、または2個とも黄玉
- 3の目を出して、3個とも黄玉

のいずれかの場合であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_2 + {}_3C_2}{{}_6C_2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{{}_6C_3} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1+3}{15} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{60+16+3}{60} \\ &= \frac{79}{360} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 取り出した玉の中にすべての色が含まれるのは、

- 3の目を出して、各色の玉が1個ずつ
- 4の目を出して、赤玉1個、青玉2個、黄玉1個、
または、赤玉1個、青玉1個、黄玉2個
- 5の目を出して、赤玉を取り出す
- 6の目を出す

のいずれかの場合であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \times \frac{2 \times 3}{{}_6C_3} + \frac{1}{6} \times \frac{{}_2C_2 \cdot {}_3C_1 + {}_2C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_6C_4} + \frac{1}{6} \times \frac{{}_5C_4}{{}_6C_5} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{6}{20} + \frac{1}{6} \times \frac{3+6}{15} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{9+18+25+30}{30} \\ &= \frac{41}{90} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

24

(1) 3枚のカードの引き方は全部で

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \text{ 通り}$$

あり、その各場合は同様に確からしい。

{1, 2, 3} から 2 枚, {4, 5, 6, 7, 8} から 1 枚選ぶ場合を考えて、求める確率は

$$\frac{{}_3C_2 \times 5}{{}_8C_3} = \boxed{\frac{15}{56}} \text{ (チ)}$$

(2) カードの引き方は、全部で

$${}_8C_3 \cdot {}_5C_2 = 560 \text{ 通り}$$

あり、その各場合は同様に確からしい。

(i) 最初に {4, 5, 6} から 1 枚引くとき

最後に {1, 2, 3, 4, 5, 6} の残り 3 枚のうち 1 枚と {7, 8} から 1 枚引くから、

$$({}_3C_2 \times 3) \times (3 \times 2) = 54 \text{ 通り}$$

(ii) 最初に {7, 8} から 1 枚引くとき

$$({}_3C_2 \times 2) \times (4 \times 1) = 24 \text{ 通り}$$

求める確率は

$$\frac{54 + 24}{560} = \boxed{\frac{39}{280}} \text{ (ツ)}$$

(3) カードの引き方は全部で $8!$ 通りあり、その各場合は同様に確からしい。

1, 3, 5, 7 番の箱にそれぞれ同じ番号のカードを入れるのは 1 通りであり、2, 4, 6, 8 のカードと箱の番号が異なる順序は

4286, 4682, 4826,

6284, 6824, 6842,

8246, 8624, 8642

の 9 通りであるから、求める確率は

$$\frac{9}{8!} = \frac{1}{8 \times 560} = \boxed{\frac{1}{4480}} \text{ (テ)}$$

25

問1. 「病原菌がいるとき正しく判定される」または「病原菌がないとき誤って判定される」確率を求めて、

$$\begin{aligned} \frac{2}{100} \times \frac{95}{100} + \frac{98}{100} \times \frac{5}{100} &= \frac{1}{50} \times \frac{19}{20} + \frac{49}{50} \times \frac{1}{20} \\ &= \frac{68}{1000} \\ &= \frac{\boxed{17}}{\boxed{250}} \quad (\text{アイ}) \\ &= \frac{\boxed{250}}{\boxed{17}} \quad (\text{ウエオ}) \end{aligned}$$

問2. 「病原菌がいて正しく判定される」確率は

$$\frac{2}{100} \times \frac{95}{100} = \frac{1}{50} \times \frac{19}{20} = \frac{19}{1000}$$

であるから、病原菌がいると判定されたとき、判定が正しい確率は

$$\frac{\frac{19}{1000}}{\frac{68}{1000}} = \frac{\boxed{19}}{\boxed{68}} \quad (\text{カキ})$$

$$\frac{\boxed{68}}{\boxed{19}} \quad (\text{クケ})$$

問3. 「病原菌がいるにもかかわらず、病原菌がないと判定される」確率は

$$\frac{2}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{1}{1000}$$

であるから、病原菌がないと判定されたとき、判定が誤りである確率は

$$\frac{\frac{1}{1000}}{1 - \frac{68}{1000}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{932}} \quad (\text{コ})$$

$$\frac{\boxed{932}}{\boxed{1}} \quad (\text{サシス})$$

26

(1) 点 P が点 (2, 2) を通るのは,

- (2, 0) と (0, 2) の移動が 1 回ずつ
- (1, 1) の移動が 2 回

のいずれかの場合であるから, 確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+2}{8} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{8}} \begin{matrix} \text{(ア)} \\ \text{(イ)} \end{matrix}$$

(2) 点 P が点 (4, 4) に到達するのは,

- (2, 0) と (0, 2) の移動が 2 回ずつ
- (2, 0) と (0, 2) の移動が 1 回ずつで (1, 1) の移動が 2 回
- (1, 1) の移動が 4 回

のいずれかの場合であるから, その確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times {}_4C_2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4 \times 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3+24+8}{2^7} = \frac{\boxed{35}}{\boxed{128}} \begin{matrix} \text{(ウエ)} \\ \text{(オカキ)} \end{matrix}$$

点 (2, 2) を通らないで点 (4, 4) に到達する確率は

$$\frac{35}{128} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{35-18}{128} = \frac{\boxed{17}}{\boxed{128}} \begin{matrix} \text{(クケ)} \\ \text{(コサシ)} \end{matrix}$$

(3) 点 P が点 (0, 4) に止まるのは,

(0, 2) の移動を 2 回したあと 3 回目に少なくとも 1 個奇数の目を出す場合であるから, その確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{64}} \begin{matrix} \text{(ス)} \\ \text{(セソ)} \end{matrix}$$

点 (3, 3) に止まるのは,

- (2, 0), (1, 1), (0, 2) の移動が 1 回ずつ
- 3 回続けて (1, 1) の移動

のいずれかを行なったあと,

4 回目に両方の目が偶数または両方の目が奇数となる

場合であるから, その確率は

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times 3! + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{3+2}{2^4} \times \frac{1}{2} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{32}} \begin{matrix} \text{(タ)} \\ \text{(チツ)} \end{matrix}$$

点 (4, 4) 以外で点 P が止まる可能性がある点は

(0, 4), (1, 3), (3, 1), (4, 0), (2, 4), (3, 3), (4, 2)

の $\boxed{7}$ 個である。
(テ)

27

(1) A が先に 2 点をとるのは、

1 回目または 2 回目に 3 の倍数の玉を取り出す
 場合であるから、求める確率は

$$\frac{6}{18} + \frac{12}{18} \times \frac{6}{17} = \frac{17+12}{3 \times 17} = \frac{29}{51} \quad (\text{答})$$

(2) B が 12 点をとるには、3 の倍数でない玉をすべて取り出さなければならない
 ことに注意すると、A が 12 点を先取するのは、

最後に取り出すのが 3 の倍数の玉でない
 場合であるから、求める確率は

$$\frac{12 \times 17!}{18!} = \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

28

問 1 1 台目が A に駐車する確率を p とすると、条件より各枠に駐車する確率は

A	B	C	D
p	p	p	$\frac{p}{3}$

であるから、

$$p + p + p + \frac{1}{3}p = 1 \quad \therefore p = \frac{3}{10} \quad (\text{答})$$

問 2 1 台目が B に駐車しているとき、2 台目が D に駐車する確率を q とすると、2 台目の各枠に駐車する確率は

A	B	C	D
$3q$	×	q	q

であるから、

$$3q + q + q = 1 \quad \therefore q = \frac{1}{5}$$

問 1 より 1 台目が B に駐車する確率も $\frac{3}{10}$ であるから、B → D の順に駐車する確率は

$$\frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$$

1 台目が D に駐車しているとき、2 台目が B に駐車する確率を r とすると、2 台目の各枠に駐車する確率は

A	B	C	D
r	r	$\frac{r}{3}$	×

であるから、

$$r + r + \frac{1}{3}r = 1 \quad \therefore r = \frac{3}{7}$$

問 1 より 1 台目が D に駐車する確率は $\frac{1}{10}$ であるから、D → B の順に駐車する確率は

$$\frac{1}{10} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{70}$$

以上より、2 台目までが B と D に駐車している確率は

$$\frac{3}{50} + \frac{3}{70} = \frac{21 + 15}{350} = \frac{18}{175} \quad (\text{答})$$

問 3 1 台目が A に駐車しているとき、2 台目が B に駐車する確率を x とすると、2 台目の各枠に駐車する確率は

A	B	C	D
×	x	$3x$	x

であるから，

$$x + 3x + x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{5}$$

A と B に駐車しているときも，A と D に駐車しているときも，空いている枠に駐車する確率はいずれも $\frac{1}{2}$ であるから， $A \rightarrow B \rightarrow D$ または $A \rightarrow D \rightarrow B$ の順に駐車する確率は

$$\frac{3}{10} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{50}$$

同様に考えて， $B \rightarrow A \rightarrow D$ の順に駐車する確率は

$$\frac{3}{10} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{100}$$

$D \rightarrow A \rightarrow B$ の順に駐車する確率は

$$\frac{1}{10} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{140}$$

B と D に駐車したあと A に駐車する確率は

$$\frac{18}{175} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{350}$$

求める確率は

$$\frac{3}{50} + \frac{9}{100} + \frac{3}{140} + \frac{27}{350} = \frac{42 + 63 + 15 + 54}{700} = \frac{87}{350} \quad (\text{答})$$

29

(1) 平均値の定義より

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) = a \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = a\bar{x} + b \quad (\text{答})$$

標準偏差の定義より

$$\begin{aligned} s_w^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - a\bar{x} - b)^2 \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= a^2 s_x^2 \end{aligned}$$

 $a > 0$ より

$$s_w = as_x \quad (\text{答})$$

(2) x と y の共分散を s_{xy} , w と y の共分散を s_{wy} とすると,

$$\begin{aligned} s_{wy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - a\bar{x} - b)(y_i - \bar{y}) \\ &= a \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= as_{xy} \end{aligned}$$

 x と y の相関係数を r_{xy} , w と y の相関係数を r_{wy} とすると,

$$r_{wy} = \frac{s_{wy}}{s_w s_y} = \frac{as_{xy}}{as_x \cdot s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = r_{xy}$$

(証明おわり)

(注) 上の解答において, シグマ記号は簡潔に表現するために用いているだけであり, 数学 B の知識は用いられていない。本問は, 事実上公式を証明する問題であるだけに, 無理にシグマ記号の使用を避けて答案を繁雑にするのはナンセンスである。