

方程式 $x^2y^2 - 4(x + y) = z^2$ の自然数解

大塚美紀生

受験数学は本来の数学とは無関係だと誤解する人も多いが，大学入試数学を解くテクニックが学問的にも有効であることが少なくない。本稿では，大学入試をヒントにして，あるディオファントス方程式の解法を考えたい。^{注1}

定理 方程式

$$x^2y^2 - 4(x + y) = z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) は

$$(x, y, z) = (1, 5, 1), (5, 1, 1), (2, 3, 4), (3, 2, 4)$$

に限られる。^{注2}

定理の証明

$$a = x + y, \quad b = xy \quad (2)$$

とおくと，(1)より

$$b^2 - 4a = z^2$$

であるから，2次方程式

$$X^2 - bX + a = 0 \quad (3)$$

の解は

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2} = \frac{b \pm z}{2}$$

$b^2 - z^2 = 4a$ であるから， b と z の偶奇は等しく，

$$(3) \text{の 2 解 } \frac{b+z}{2}, \frac{b-z}{2} \text{ はともに整数}$$

である。

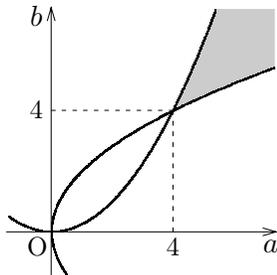
x, y を 2 解とする 2 次方程式は，解と係数の関係を考えて (2) より

$$X^2 - aX + b = 0 \quad (4)$$

必要条件として，(3) および (4) の実数解条件より

$$b^2 - 4a \geq 0 \quad \text{かつ} \quad a^2 - 4b \geq 0 \quad (5)$$

$a > 0, b > 0$ のもとで ab 平面上に図示すると，次図の網目部分(境界を含む)となる。



以下, a, b が (5) を満たす正の整数であるというもとで,
 2 つの 2 次方程式 (3), (4) がそれぞれ 2 解とも整数となる
 条件を考える。^{注3}

1° $0 < b < a$ のとき

$$f(X) = X^2 - aX + b \text{ とおくと,}$$

$$f(2) = 4 - 2a + b$$

$$\therefore b = 2a + f(2) - 4$$

これを ab 平面上の直線とみて, (5) かつ $0 < b < a$
 と共有点をもつと考えると,

$$b > 2a + f(2) - 4$$

に点 (4, 4) があることが条件であるから,

$$4 > 2 \times 4 + f(2) - 4 \quad \therefore f(2) < 0$$

$f(0) = b > 0$ であるから方程式 $f(X) = 0$ は $0 < x < 2$ に解をもち, 2 解はともに
 整数であるから,

$$f(1) = 1 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1 \tag{6}$$

次に, (6) より (3) は

$$X^2 - (a - 1)X + a = 0$$

$$a(X - 1) = X^2 + X$$

$$\therefore a = \frac{X^2 + X}{X - 1} = \frac{(X - 1)(X + 2) + 2}{X - 1} = X + 2 + \frac{2}{X - 1}$$

a も X も整数であるから

$$X - 1 = \pm 1, \pm 2$$

$$\therefore (X, a) = (2, 6), (3, 6), (0, 0), (-1, 0)$$

$a > 0$ より

$$a = 6$$

(6) より

$$b = 5$$

このとき x, y を 2 解にもつ 2 次方程式 (4) は

$$X^2 - 6X + 5 = (X - 1)(X - 5) = 0$$

(1) より自然数 z も求めて

$$(x, y, z) = (1, 5, 1), (5, 1, 1)$$

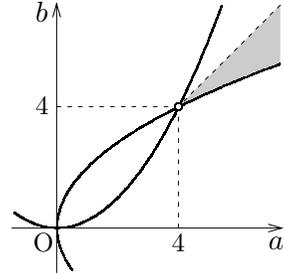
2° $0 < a < b$ のとき

1° において a と b を入れ替えた議論になるだけであるから,

$$a = 5, b = 6$$

このとき (4) は

$$X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3) = 0$$



であるから,

$$(x, y, z) = (2, 3, 4), (3, 2, 4)$$

3° $a = b > 0$ のとき

(3), (4)はいずれも

$$X^2 - aX + a = 0$$

$$a(X - 1) = X^2$$

$$\therefore a = \frac{X^2}{X - 1} = \frac{X^2 - 1 + 1}{X - 1} = X + 1 + \frac{1}{X - 1}$$

a も X も整数であるから

$$X - 1 = \pm 1 \quad \therefore (X, a) = (2, 4), (0, 0)$$

$a = b > 0$ より

$$a = b = 4$$

このとき x, y を 2 解にもつ 2 次方程式(4)は

$$X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2 = 0$$

であるから

$$x = y = 2$$

となるが, (1)より

$$z = 0$$

である。

以上より, (1)を満たす自然数の組 (x, y, z) は

$$(x, y, z) = (1, 5, 1), (5, 1, 1), (2, 3, 4), (3, 2, 4)$$

ですべてであることが証明された。

注 1 アイデアの基となっているのは, 2011 年名古屋大学前期理系第 4 問である。

注 2 自然数解限定にすると中途半端にも思えるが, $x + y$ と xy が異符号になると一般的に有効な評価が見当たらず, 無数の場合について個々の整数解を求めていくのは物理的に不可能だと思われる。

注 3 (1)を

$$x^2y^2 - z^2 = (xy + z)(xy - z) = 4(x + y)$$

と変形すれば解決すると思われるかも知れないが, 積が定数ではないので, 場合を絞ることができない。また, 両辺に x, y が分かれているので, 両立する関係式を見出すのは難しい。

2012.1.24