

- [1] $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ の分母を有理化すると $\frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。 $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ の整数部
 を p , 小数部分を q とすると, $p = \boxed{\text{エ}}$, $q = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。ま
 た, $p^2 + 2pq + 4q^2 = \boxed{\text{ク}} \mid \boxed{\text{ケ}}$ である。

(摂南大)

- [2] 次の問いに答えよ。

- (1) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ を満たす x に対して $x^2 + \frac{1}{x^2}$, および $x^6 + \frac{1}{x^6}$ の値を求めよ。
 (2) $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$ とおく。このとき, $a^2+b^2+c^2$, および $a^3+b^3+c^3-3abc$
 を p , q を用いて表せ。

(富山大)

3 以下の問いに答えよ。ただし, 実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとする。

(1) k は整数とする。 $\left[\frac{x}{2}\right] = k$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x}{3}\right] = 1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x}{3}\right]$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(信州大)

4 a を定数とする。実数 x についての 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ を, それぞれ

$$f(x) = x^2 - 2ax + 1$$

$$g(x) = x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a$$

とする。

(1) すべての実数 x について, $f(x) \geq 0$ が成立するような a の値の範囲は

— $\boxed{\text{(ス)}}$ $\leq a \leq \boxed{\text{(セ)}}$ である。

(2) $0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての実数 x について, $f(x) > 0$ が成立するような a の

値の範囲は $a < \boxed{\text{(ソ)}}$ である。

(3) $g(x) \leq 0$ を満たすすべての実数 x について, $f(x) > 0$ が成立するような a の値

の範囲は — $\boxed{\text{(タ)}}$ $< a < \boxed{\text{(チ)}}$ である。

(摂南大)

□5 n を正の整数とする。 x の 2 次関数 $f(x) = (n+3)x^2 - 2(n^2 + 3n + 3)x + 1$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $n = 1$ とする。 m が整数の範囲を動くときの $f(m)$ の最小値, およびそのときの m の値を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。 m が整数の範囲を動くとき, $f(m)$ が最小となる m を求めよ。

(富山大)

□6 a を実数とする。2 次方程式 $x^2 - 2(a+1)x + 7a - 3 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち, それらがともに 1 より大きくなるような a の値を求めよ。

(奈良教育大)

7 実数 x, y が条件

$$(x + 2y)(x - y) = 2 \text{ かつ } x > 0$$

を満たしながら動くとき, $x + y$ の最小値と, 最小値を与える x と y を求めよ。

(学習院大)

8 鋭角三角形 ABC において, $AB = 5$, $AC = 2\sqrt{5}$, $\sin \angle ABC = \frac{4}{5}$ とする。直線 BC 上に, $AD = 4\sqrt{5}$ を満たす点 D を, 3 点 B, C, D がこの順に並ぶようにとる。また, $\triangle ABC$ の外接円と直線 AD の交点のうち点 A と異なる点を E とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \angle ACB$ と $\cos \angle ACB$ の値を求めよ。
- (2) 辺 BC の長さを求めよ。
- (3) 線分 AE の長さを求めよ。

(広島工大)

□9 正五角形 ABCDE の対角線 AC と BD の交点を F とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) B と C を通る直線は三角形 ABF の外接円に接することを証明せよ。
- (2) 三角形 ABF は二等辺三角形であることを証明せよ。
- (3) $AF^2 = AC \cdot CF$ を証明せよ。

(高知大)

□10 半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が

$$AB = 1, \quad AC = BC, \quad AD = BD, \quad \cos \angle ACB = \cos \angle ADB = \frac{4}{5}$$

を満たしているとする。

- (1) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (2) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

(東大)

[11] 整数 n の正の約数の個数を $d(n)$ と書くことにする．たとえば，10 の正の約数は 1, 2, 5, 10 であるから $d(10) = 4$ である．

(1) 2023 以下の正の整数 n の中で， $d(n) = 5$ となる数は，

(1)	(2)
-----	-----

 個ある．

(2) 2023 以下の正の整数 n の中で， $d(n) = 15$ となる数は，

(3)	(4)
-----	-----

 個ある．

(3) 2023 以下の正の整数 n の中で， $d(n)$ が最大となるのは $n =$

(5)	(6)	(7)	(8)
-----	-----	-----	-----

 のときである．

(慶大)

[12] 素数を小さい順に並べて得られる数列を

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

とする．

(1) p_{15} の値を求めよ．

(2) $n \geq 12$ のとき，不等式 $p_n \geq 3n$ が成り立つことを示せ．

(阪大)

13 p を 7 以上の素数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $10^n - 1$ が 7 で割り切れるような最小の正の整数 n を求めよ。
- (2) $10^n - 1$ が p で割り切れるような正の整数 n が存在することを示せ。
- (3) $10^n - 1$ が p で割り切れるような正の整数 n の中で最小のものを k とする。
 k が偶数であるとき, $10^{\frac{k}{2}}$ を p で割ったときの余りを求めよ。

(横浜国大)

14 以下の問に答えよ。

- (1) 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$20x + 23y = 1$$

- (2) $461^m - 24$ が 23^2 の倍数になる正の整数 m をすべて求めよ。

(群馬大)

15 下の問いに答えなさい。

- (1) $a^2 - b^2 = 60$ となる自然数 a, b の組を全て求めなさい。
- (2) $a^4 - b^4 = 120$ となる自然数 a, b の組が存在しないことを示しなさい。

(長岡技科大)

16 集合 A を次で定義する。

$$A = \{m^2 - n^2 \mid m \text{ と } n \text{ は整数}\}$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 7 は A の要素であることを証明せよ。
- (2) 6 は A の要素ではないことを証明せよ。
- (3) 奇数全体の集合は A の部分集合であることを証明せよ。
- (4) 偶数 a が A の要素であるための必要十分条件は、ある整数 k を用いて $a = 4k$ とかけることであることを証明せよ。

(高知大)

- 17 2 個の文字 a, b から重複を許して n 個 ($n = 1, 2, 3, \dots$) 選んで一列に並べたものを「長さ n の文字列」と呼ぶ。長さ n の文字列 S が長さ n 未満の文字列 S' をくり返し m 回 ($m = 2, 3, \dots$) 用いて

$$S = S'S'\dots S' \quad \dots (*)$$

と表現できるとき、 S を「くり返し列」と呼ぶ。長さ n 未満のどのような文字列 S' を用いても $(*)$ の形にできないとき、 S' を「非くり返し列」と呼ぶ。たとえば、長さ 6 の文字列 $ababab$ は長さ 2 の文字列 ab の 3 回のくり返しで表現できるのでくり返し列であり、長さ 5 の文字列 $babab$ は非くり返し列である。次の問いに答えなさい。

- (i) 長さ 3 の非繰り返し列の個数を求めなさい。
- (ii) 長さ 6 の非繰り返し列の個数を求めなさい。
- (iii) 長さ 8 の非繰り返し列の個数を求めなさい。

(秋田大)

- 18 半径 1 の円に内接する正三十六角形 K の頂点を P_0, P_1, \dots, P_{35} とする。この 36 個の頂点から 4 つの頂点を選び、それらを結んで四角形を作る。

- (1) 正方形は全部で ア 個できる。また、その正方形の面積は イ である。
- (2) 長方形は全部で ウエオ 個できる。
- (3) 正三十六角形 K とちょうど 2 辺を共有する四角形は、全部で カキクケ 個できる。

(東京医大)

[19] 1 から 5 までの番号をつけた 5 個の白玉と, 1 から 5 までの番号をつけた 5 個の赤玉がある。これら 10 個の玉を袋に入れ, その袋から玉を 1 個ずつ, 合計 5 個取り出す。取り出した玉は取り出した順に 1 列に並べる。取り出した玉の中に同じ番号の玉が 2 個あることを「ペアができた」ということにする。たとえば, 取り出した玉が

赤 1, 白 3, 白 2, 赤 5, 赤 3

のときはペアが 1 組できた (白 3 と赤 3 がペアをなす) といい,

赤 1, 白 3, 白 1, 赤 5, 赤 3

のときはペアが 2 組できた (赤 1 と白 1, および白 3 と赤 3 がそれぞれペアをなす) という。次の問いに答えよ。

- (1) 取り出した玉の番号がすべて異なる確率を求めよ。
- (2) 取り出した玉の中にペアが 1 組だけできる確率を求めよ。
- (3) 取り出した玉の中にペアが 2 組できる確率を求めよ。

(島根大)

[20] 赤球 2 個と白球 4 個が入っている袋 A と, 赤球 3 個と白球 2 個が入っている袋 B がある。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 袋 A, 袋 B それぞれから球を 1 個ずつ取り出すとき, 取り出した 2 個の球の色が異なる確率を求めよ。
- (2) 袋 A, 袋 B それぞれから球を 2 個ずつ取り出すとき, 取り出した 4 個の球の色がすべて同じである確率を求めよ。
- (3) 袋 A から 2 個の球を取り出して袋 B に入れ, よくかき混ぜて, 袋 B から 2 個の球を取り出して袋 A に入れる。このとき, 袋 A の白球の個数が 4 個になる確率を求めよ。

(香川大)

21 以下の問の ト ~ 又 にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

10 万人の集団があり，この集団に対してウイルス X とウイルス Y の保有および症状の有無を調べた。

この集団のうち 2 万人がウイルス X を保有し，ウイルス X 保有者の $\frac{1}{4}$ ，ウイルス X 非保有者の $\frac{1}{4}$ がウイルス Y を保有していた。ウイルス X が原因でみられる症状は発熱のみ，ウイルス Y が原因でみられる症状は腹痛のみであり，ウイルスを保有していなくても発熱や腹痛がみられることがある。

過去の研究から，発熱はウイルス X 保有者に確率 $\frac{3}{4}$ ，ウイルス X 非保有者に確率 $\frac{1}{10}$ でみられ，腹痛はウイルス Y 保有者に確率 $\frac{9}{10}$ ，ウイルス Y 非保有者に確率 $\frac{1}{5}$ でみられることがわかっている。なお，発熱と腹痛はそれぞれ独立に発症し互いに影響しないものとする。

- (1) この集団から無作為に選ばれた 1 人がウイルス X を保有していないが発熱がみられる確率は ト である。
- (2) この集団から無作為に選ばれた 1 人がウイルス Y を保有し，かつ発熱がみられる確率は ナ である。
- (3) この集団から無作為に 1 人を選んでウイルスの保有および症状の有無を調べて集団に戻す試行を 3 回繰り返した。
 - (i) 3 回の試行で選ばれた人のうち，1 人のみに腹痛がみられる確率は ニ である。
 - (ii) 3 回の試行で選ばれた人のうち 1 人のみに腹痛がみられるとき，選ばれた人のうち少なくとも 1 人がウイルス Y を保有している確率は 又 である。

(慶大)

[22] 袋の中に赤玉 3 個と白玉 3 個が入っており，袋の外に白玉がたくさんある。この袋の中から 1 個の玉を取り出して色を確認し，赤玉ならその玉の代わりに袋の外の白玉を 1 つ袋に入れ，白玉ならその玉を袋に戻す。

この操作を繰り返し，袋の中の玉がすべて白玉になるか，または白玉を取り出した回数の合計が 2 回になったところで操作を終了する。

(1) 2 個目の玉を取り出したところで操作が終了となる確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

3 個目の玉を取り出したところで操作が終了となる確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2) 4 個目の玉を取り出し，かつその玉が 3 個目の赤玉である確率は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

(3) 4 個目の玉を取り出し操作が終了となったとき，白玉が袋から連続して取り出されている条件付き確率は $\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

(獨協医大)

[23] 数直線上を動く点 P がある。点 P は，原点 O を出発して，1 枚のコインを 1 回投げごとに，表が出たら数直線上の正の向きに 1 だけ進み，裏が出たら数直線上の負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし，コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

(2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

(3) $0 \leq x_n \leq 3$ ($n = 1, 2, \dots, 9$) かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

(岡山大)

- 24 m, n を自然数とする。このとき、次の(ルール)に従って数直線上を動く点 P がある。

(ルール) 点 P の座標が n のとき、コインを n 枚同時に投げる。そのうち表がちょうど m 枚出たら、数直線上の正の方向に m 動き、 n 枚のコインがすべて裏であれば点 P は動かない。例えば、点 P の座標が 3 のときはコインを 3 枚同時に投げる。そのとき、表が 3 枚出たら正の方向に 3 動き、表が 2 枚と裏が 1 枚出たら正の方向に 2 動き、表が 1 枚と裏が 2 枚出たら正の方向に 1 動き、裏が 3 枚出たら点 P は動かない。

点 P の初めの座標は 3 として、上の(ルール)に従って、コインを投げて点 P を動かす操作を続けておこなう。次の問に答えなさい。ただし、コインの表と裏が出ることは同様に確からしいものとする。

- (1) 上の(ルール)に従って、操作を続けて 2 回おこなった場合、点 P の座標が 4 になる確率を求めなさい。
- (2) 上の(ルール)に従って、操作を続けて 2 回おこなった場合、点 P の座標が 5 になる確率を求めなさい。
- (3) 上の(ルール)に従って、操作を続けて 3 回おこなった場合、点 P の座標が 5 になる確率を求めなさい。

(埼玉大)

□ 1 分母を有理化すると

$$\frac{1}{3-\sqrt{7}} = \frac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \frac{\overset{(ア)}{\boxed{3}} + \sqrt{\overset{(イ)}{\boxed{7}}}}{\underset{(ウ)}{\boxed{2}}}$$

$2^2 < 7 < 3^2$ より

$$2 < \sqrt{7} < 3, \text{ したがって } (2 <) \frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{7}}{2} < 3$$

であるから, 整数部分 p , 小数部分 q は

$$p = \underset{(エ)}{\boxed{2}}, \quad q = \frac{3+\sqrt{7}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{\overset{(オ)}{\boxed{7}}} - \overset{(カ)}{\boxed{1}}}{\underset{(キ)}{\boxed{2}}}$$

このとき,

$$2q + 1 = \sqrt{7}$$

$$(2q + 1)^2 = 7$$

$$4q^2 + 4q = 6$$

$$\therefore p^2 + 2pq + 4q^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot q + 4q^2 = 4 + 6 = \underset{(ク)(ケ)}{\boxed{10}}$$

(注) p, q の値をそのまま代入して機械的に処理してもよいが, せっかく演習するのであれば, 関係式を見出したり, 式の特徴を見抜く目を養いたいものである。

2

(1) $0^4 - 3 \cdot 0^2 + 1 \neq 0$ より $x \neq 0$ であるから, $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ の両辺を x^2 で割って,

$$x^2 - 3 + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 3 \quad (\text{答})$$

これを用いて,

$$\begin{aligned} x^6 + \frac{1}{x^6} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= 18 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = p^2 - 2q \quad (\text{答})$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= p(p^2 - 3q) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

3

(1) $\left[\frac{x}{2}\right] = k$ は $\frac{x}{2}$ を超えない最大の整数であるから,

$$k \leq \frac{x}{2} < k+1 \quad \therefore 2k \leq x < 2k+2 \quad (\text{答})$$

(2) $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x}{3}\right] = 1$ を満たすとき

$$1 \leq \frac{x}{2} < 2 \quad \text{かつ} \quad 1 \leq \frac{x}{3} < 2$$

$$2 \leq x < 4 \quad \text{かつ} \quad 3 \leq x < 6 \quad \therefore 3 \leq x < 4 \quad (\text{答})$$

(3) $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x}{3}\right] = k$ を満たすとき

$$2k \leq x < 2k+2 \quad \text{かつ} \quad 3k \leq x < 3k+3$$

(i) $k \geq 0$ のとき

$2k \leq 3k$ であり,

$$3k < 2k+2 \iff k < 2$$

であるから,

$k = 0, 1$ のとき $3k \leq x < 2k+2$, $k \geq 3$ のとき x は存在しない

(ii) $k < 0$ のとき

$3k < 2k$ であり,

$$2k < 3k+3 \iff k > -3$$

であるから,

$k = -2, -1$ のとき $2k \leq x < 3k+3$, $k \leq -3$ のとき x は存在しない

以上より, $k = -2, -1, 0, 1$ のときのみ実数 x は存在し,

$$-4 \leq x < -3 \quad \text{または} \quad -2 \leq x < 2 \quad \text{または} \quad 3 \leq x < 4 \quad (\text{答})$$

4

$$f(x) = x^2 - 2ax + 1 = (x - a)^2 - a^2 + 1$$

(1) すべての実数 x について $f(x) \geq 0$ が成立するための条件は,

$$(f(x) \text{ 最小値}) = f(a) = -a^2 + 1 \geq 0$$

$$-(a+1)(a-1) \geq 0$$

$$\therefore -\boxed{1} \leq a \leq \boxed{1}$$

(ス) (セ)

(2) $0 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は

$$a \leq 0 \text{ のとき } f(0) = 1$$

$$0 \leq a \leq 2 \text{ のとき } f(a) = -a^2 + 1$$

$$a \geq 2 \text{ のとき } f(2) = -4a + 5$$

であるから, $0 \leq x \leq 2$ を満たすすべての実数について $f(x) > 0$ となるための条件は,

$$a \leq 0 \text{ のとき } 1 > 0$$

$$0 \leq a \leq 2 \text{ のとき } -a^2 + 1 > 0$$

$$a \geq 2 \text{ のとき } -4a + 5 > 0$$

であるが, $a \geq 2$ のとき $-4a + 5 \leq -3 (< 0)$ であるから,

$$a \leq 0 \text{ または } 0 \leq a < 1 \quad \therefore a < \boxed{1} \quad (\text{ソ})$$

(3) $g(x) = x^2 - (2a - 1)x + a^2 - a = (x - a)(x - a + 1) \leq 0$

を満たす実数 x は

$$a - 1 \leq x \leq a$$

この範囲でつねに $f(x) = (x - a)^2 - a^2 + 1 > 0$ となるのは

$$f(a) = -a^2 + 1 > 0$$

のときであり,

$$-\boxed{1} < a < \boxed{1}$$

(タ) (チ)

5

(1) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4x^2 - 14x + 1 \\
 &= 4\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) + 1 \\
 &= 4\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{45}{4}
 \end{aligned}$$

$f(x)$ は $x = \frac{7}{4}$ に関して対称であり, $f(m)$ は $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ に最も近い整数

$$m = 2 \quad (\text{答})$$

で最小となるから, $f(m)$ の最小値は

$$f(2) = -11 \quad (\text{答})$$

(2) $n \geq 2$ とする。

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (n+3) \left\{ x^2 - \frac{2(n^2+3n+3)}{n+3}x \right\} + 1 \\
 &= (n+3) \left(x - \frac{n^2+3n+3}{n+3} \right)^2 + 1 - \frac{(n^2+3n+3)^2}{n+3} \\
 &= (n+3) \left(x - n - \frac{3}{n+3} \right)^2 + \frac{n+3 - (n^2+3n+3)^2}{n+3}
 \end{aligned}$$

$f(x)$ は $x = n + \frac{3}{n+3}$ に関して対称であるから, $f(m)$ は $n + \frac{3}{n+3}$ に最も近い整数 m で最小となる。

$$n = 3 \text{ のとき } \frac{3}{n+3} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \text{ のとき } \frac{1}{2} < \frac{3}{n+3} < 1$$

$$n \geq 4 \text{ のとき } 0 < \frac{3}{n+3} < \frac{1}{2}$$

であるから, $f(m)$ が最小となる整数 m は

$$\begin{cases} n = 2 \text{ のとき} & m = n + 1 \\ n = 3 \text{ のとき} & m = n, n + 1 \\ n \geq 4 \text{ のとき} & m = n \end{cases} \quad (\text{答})$$

6

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 2(a+1)x + 7a - 3 \\
 &= \{x - (a+1)\}^2 - (a+1)^2 + 7a - 3 \\
 &= \{x - (a+1)\}^2 - a^2 + 5a - 4 \\
 &= \{x - (a+1)\}^2 - (a-1)(a-4)
 \end{aligned}$$

とおくと、題意の条件は

$y = f(x)$ のグラフと x 軸 ($y = 0$) が $x > 1$ の範囲において 2 点で交わる

ことであり、

$$\begin{cases}
 \text{(頂点の } y \text{ 座標)} = -(a-1)(a-4) < 0 \\
 f(1) = 5a - 4 > 0 \\
 \text{軸 : } a+1 > 1
 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{4}{5} < a < 1 \text{ または } a > 4 \quad (\text{答})$$

7 $x + y = t$ とおき, y を消去すると

$$(2t - x)(2x - t) = 2$$

$$2x^2 - 5tx + 2t^2 + 2 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

x の 2 次方程式 (*) が正の解を持つ条件から実数 t のとり得る値が求まるが,

$$(2 \text{ 解の積}) = 2t^2 + 2 > 0$$

であるから, 2 解とも正となる条件を求めることになって,

$$\begin{cases} (\text{判別式}) = (5t)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2t^2 + 2) = 9t^2 - 16 \geq 0 \\ (2 \text{ 解の和}) = \frac{5t}{2} > 0 \\ (2 \text{ 解の積}) = 2t^2 + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore t \geq \frac{4}{3}$$

これば $x + y = t$ が存在するための必要十分条件であるから, 実際にとり得る値を表し,

$$x + y \text{ の最小値は } \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$

$t = \frac{4}{3}$ のとき, (*) より

$$2x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{50}{9} = 0$$

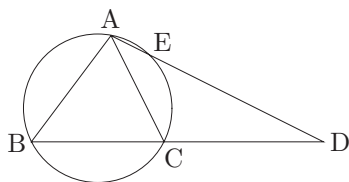
$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{5}{3}$$

$y = \frac{4}{3} - x$ より y も求めて

$$x = \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

8

(1) $\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC} \sin \angle ABC = \frac{5}{2\sqrt{5}} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$

 $\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから、特に $\angle ACB$ は鋭角であり、

$$\cos \angle ACB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ACB} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$

(2) $BC = x$ とおくと、余弦定理と (1) より

$$5^2 = x^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2x \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

 $x = BC > 0$ より

$$BC = 5 \quad (\text{答})$$

(別法) 余弦定理を $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$ に適用してもよい。 $x = BC$ とおくと

$$(2\sqrt{5})^2 = x^2 + 5^2 - 2x \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0$$

 $\angle ACB$ は鋭角で $5^2 < x^2 + (2\sqrt{5})^2$ であるから、

$$x = BC = 5 \quad (\text{答})$$

以上 2 つの解法が一般的ではあるが、本問では必要な数値がそろっているので、

$$BC = AB \cos \angle ABC + AC \cos \angle ACB$$

$$= 5 \times \frac{3}{5} + 2\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 3 + 2$$

$$= 5 \quad (\text{答})$$

と求めることもできる。

(3) 補角の公式より

$$\cos \angle ACD = \cos(180^\circ - \angle ACB) = -\cos \angle ACB = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

 $CD = x$ とおき、 $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$(4\sqrt{5})^2 = y^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2y \cdot 2\sqrt{5} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$y^2 + 4y - 60 = 0$$

$$(y + 10)(y - 6) = 0$$

$y = CD > 0$ より

$$CD = 6$$

点 D に関する方べきを考えると,

$$AD \cdot DE = BD \cdot CD$$

$$4\sqrt{5} \times (4\sqrt{5} - AE) = (5 + 6) \times 6$$

$$4\sqrt{5} AE = 80 - 66 = 14$$

$$\therefore AE = \frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{10} \quad (\text{答})$$

9

(1) $AB = BC = CD$, $\angle ABC = \angle BCD$ より

$$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$$

が成り立つから,

$$\angle BAC = \angle CBD$$

$$\therefore \angle BAF = \angle CBF$$

点 B において直線 BC に接し, 点 A を通る円と直線 BD との交点のうち, B でない方を G とする。接弦定理より

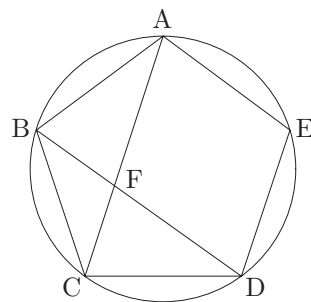
$$\angle CBF = \angle CBG = \angle BAG$$

$$\therefore \angle BAF = \angle BAG$$

$AB = AB$, $\angle ABF = \angle ABG$ より

$$\triangle ABF \equiv \triangle ABG \quad \therefore F = G$$

よって, 三角形 ABF の外接円は (点 B において) 直線 BC と接する。 (証明おわり)



(2) $\angle BAC = \angle BAF = \theta$ とおくと, (1)における考察より

$$\angle ACB = \theta, \quad \angle CBF = \theta$$

も成り立つ。(1)の結果と接弦定理より

$$\angle ABC \text{ の外角は } \angle AFB \text{ に等しい}$$

から,

$$\angle AFB = 180^\circ - \angle ABC = 2\theta$$

$BC = DE = DA$ より

$$\theta = \angle BAC = \angle DBE = \angle EBA$$

であるから,

$$\angle ABF = \angle DBE + \angle EBA = 2\theta$$

よって, $\angle ABF = \angle AFB = 2\theta$ となるから,

$$AB = AF$$

が成り立ち, 三角形 ABF は二等辺三角形である。

(証明おわり)

(3) $\triangle ABF$ の外接円の点 C に関する方べきを考えると,

$$BC^2 = AC \cdot CF$$

正五角形であることと (2) より

$$BC = AB = AF$$

であるから,

$$AF^2 = AC \cdot CF$$

(証明おわり)

10

(1) $AC = BC = a$ とおくと, 三角形 ABC において余弦定理より

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}a^2 \quad \therefore a^2 = \frac{5}{2}$$

また,

$$\sin \angle ACB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACB} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

であるから, 三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}a^2 \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \quad (\text{答})$$

(2) (1)より

$$AC = BC = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

であるが, 同様に

$$AD = BD = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

AB の中点を M とすると, 二等辺三角形の性質より

$$AB \perp MC, AB \perp MD$$

であるから, 三角形 CDM の面積を S とすると, 四面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AB = \frac{1}{3}S$$

である。そこで, 三角形 CDM の面積 S を準備する。

直角三角形 AMC において三平方の定理より

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

四面体 ABCD の外接球の中心を P とし, P から面 ABC におろした垂線の足を H とする。PA = PB = PC より

$$\triangle PAH \equiv \triangle PBH \equiv \triangle PCH$$

となるから,

$$AH = BH = CH$$

であり, H は $\triangle ABC$ の外心であり,

H は CM 上にある。

PA = PB = (外接球の半径) = 1 より, $\triangle PAB$ は一辺の長さ 1 の正三角形となるから,

$$PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

MH = x とおき, 直角三角形 PHM と直角三角形 PHC に三平方の定理を適用すると

$$PH^2 = PM^2 - MH^2 = PC^2 - CH^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2 = 1^2 - \left(\frac{3}{2} - x\right)^2$$

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{9}{4} + 3x \quad \therefore x = MH = \frac{2}{3}$$

CD の中点を N とすると

$$\triangle CMN \quad \triangle PMH$$

であるから,

$$CM : MN = PM : MH$$

$$\frac{3}{2} : MN = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{2}{3} \quad \therefore MN = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

直角三角形 MCN において三平方の定理より

$$CN = \sqrt{CM^2 - MN^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$$

であるから,

$$CD = 2CN = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$

$\triangle CDM$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

四面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{11}}{9} \quad (\text{答})$$

11

(1) $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_m^{e_m}$ と素因数分解されるとき

$$d(n) = (1 + e_1)(1 + e_2) \cdots (1 + e_m)$$

と表されるから, $d(n) = 5$ となるのは n がある素数の 4 乗

のときである。

$$6^4 = 1296, \quad 7^4 = 2401$$

であるから, $d(n) = 5$, $n \leq 2023$ を満たす正の整数 n は

$$2^4, 3^4, 5^4 \text{ の } \boxed{03} \text{ 個}$$

(1)(2)

(2) 素因数分解を考えて, $d(n) = 15$ となるのは

$$n = p^2 q^4 \quad (p, q \text{ は異なる素数})$$

と表されるときである。 $q^4 \leq n \leq 2023$ のとき, (1) の考察より

$$q = 2, 3, 5$$

(i) $q = 2$ のとき

$$p^2 \leq \frac{2023}{2^4} = 126 + \frac{7}{16}$$

$$p^2 \leq 11^2$$

 p は 2 以外の素数であるから

$$p = 3, 5, 7, 11$$

(ii) $q = 3$ のとき

$$p^2 \leq \frac{2023}{3^4} = 24 + \frac{79}{81}$$

$$p^2 \leq 4^2$$

 p は 3 以外の素数であるから

$$p = 2$$

(iii) $q = 5$ のとき

$$p^2 \leq \frac{2023}{5^4} = 3 + \frac{148}{625}$$

となるが, $p^2 \geq 2^2$ であるから不適である。以上より, $d(n) = 15$, $n \leq 2023$ を満たす正の整数 n は

$$3^2 \cdot 2^4, 5^2 \cdot 2^4, 7^2 \cdot 2^4, 11^2 \cdot 2^4, 2^2 \cdot 3^4 \text{ の } \boxed{05} \text{ 個}$$

(3)(4)

(3) $n = 1680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$ のとき

$$d(1680) = (1 + 4) \times (1 + 1)^3 = 2^3 \times 5 = 40$$

であり, $2^4 \times 3^3 \times 5 = 2160$, $2 \times 3^4 \times 5 \times 7 > 2^3 \times 3^4 \times 5 = 3240$ より

$$d(n) = 40, \quad n \leq 2023 \text{ を満たすのは } n = 1680 \text{ のみ}$$

である。

$d(n) \geq 41$, $n \leq 2023$ となる場合を考える。

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210, \quad 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$$

より,

n の素因数は 4 個以下

である。

(i) n の素因数が 4 個のとき

$$2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 1680, \quad 2^5 \times 3 \times 5 \times 7 = 3360 > 2023$$

$$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 > 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520 > 2023$$

$$2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840, \quad d(840) = 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260, \quad d(1260) = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36, \quad 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 > 2023$$

$$2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 1890, \quad d(1890) = 2 \times 4 \times 2 \times 2 = 32, \quad 2 \times 3^4 \times 5 \times 7 > 2023$$

$$2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050, \quad d(1050) = 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24, \quad 2 \times 3 \times 5^3 \times 7 > 2023$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 1470, \quad d(1470) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24, \quad 2 \times 3 \times 5 \times 7^3 > 2023$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155, \quad d(1155) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16, \quad 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 > 2023$$

より, $n \leq 2023$ では $d(n) \geq 41$ とならない。

(ii) n の素因数が 3 個のとき

1 つの素因数が 1 乗であるとすれば, $\frac{41}{2} > 20$ より 9 (= 10 - 1) 乗以上の素因数

があることになるが, $2^9 \times 3 \times 5 = 7680$ より $n \leq 2023$ に反するから,

指数はすべて 2 以上

である。

$$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 900, \quad d(900) = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800, \quad d(1800) = 4 \times 3 \times 3 = 36, \quad 2^4 \times 3^2 \times 5^2 > 2023$$

$$2^2 \times 3^2 \times 5^3 > 2^2 \times 3^3 \times 5^2 = 2700 > 2023$$

であるから, $n \leq 2023$ では $d(n) \geq 41$ とならない。

(iii) 素因数が 1 個または 2 個のとき

素因数の指数 (の 1 つ) が 21 乗以上となるが,

$$2^{21} > 2^{11} = 2048 > 2023$$

より $n \leq 2023$ に反するから, $d(n) \geq 41$ とならない。

以上より, $n \leq 2023$ において $d(n)$ の最大値は 40 であり, $d(n) = 40$ となるのは

$$n = \boxed{1680} \quad (5)(6)(7)(8)$$

のときである。

(注) 試験としては $d(1680) = 40$ を探し当てるだけで得点できてしまうが,

- $d(n) \geq 41$ となる n は存在しないのか
- $d(n) = 40$ となるのは $n = 1680$ のときだけなのか

を論じなければ, 解答としては不十分である。

12

(1) 素数を小さい順に並べると

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, …

となるから,

$$p_{15} = 47 \quad (\text{答})$$

(2) 5 以上の素数は 6 と互いに素であり, 6 で割った余りが 1 または 5 であることに注目して, 6 で割ると 1 または 5 余る自然数を並べてできる数列を $\{a_n\}$ とおくと,

$$a_{2n-1} = 1 + 6(n-1) = 6n - 5 > 3 \cdot 2(n-1)$$

$$a_{2n} = 5 + 6(n-1) = 6n - 1 > 3(2n-1)$$

であるから, 任意の自然数 n に対して

$$a_{n+1} > 3n$$

が成り立つ。

$$p_{12} = 37 = a_{13}$$

より,

$$n \geq 12 \text{ のとき } p_n \geq a_{n+1}$$

であるから,

$$n \geq 12 \text{ のとき } p_n > 3n$$

が成り立つ。

(証明おわり)

13

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 10 \equiv 3 \pmod{7}, \\
 & 10^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod{7}, \\
 & 10^3 \equiv 3^3 \equiv 6 \pmod{7}, \\
 & 10^4 \equiv 10^3 \times 10 \equiv 6 \times 3 \equiv 4 \pmod{7}, \\
 & 10^5 \equiv 10^4 \times 10 \equiv 4 \times 3 \equiv 5 \pmod{7}, \\
 & 10^6 \equiv 10^5 \times 10 \equiv 5 \times 3 \equiv 1 \pmod{7}
 \end{aligned}$$

より, $10^n - 1$ が 7 で割り切れるような最小の正の整数 n は

$$n = 6 \quad (\text{答})$$

(2) p で割った余りは $0, 1, 2, \dots, p-1$ のいずれか, 特に有限個であるから,

$$10^a \equiv 10^b \pmod{p} \quad (a > b > 0)$$

となる正の整数 a, b が存在する。

$$10^a - 10^b = 10^b(10^{a-b} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

であり, p は 7 以上の素数 (2, 5 でない素数), したがって

$$10 \text{ と } p \text{ は互いに素}$$

であるから,

$$10^{a-b} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

すなわち, $10^n - 1$ が p で割り切れるような正の整数 n が存在する。 (証明おわり)

(3) k は正の偶数であるから, $\frac{k}{2}$ は正の整数であり,

$$10^k - 1 = \left(10^{\frac{k}{2}} + 1\right)\left(10^{\frac{k}{2}} - 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

$k > \frac{k}{2} (\geq 1)$ であるから, k の最小性より

$$10^{\frac{k}{2}} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

p は素数であるから,

$$10^{\frac{k}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \therefore 10^{\frac{k}{2}} \equiv -1 \equiv p-1 \pmod{p}$$

p で割った余りは 0 以上 $p-1$ 以下の整数であることを考えて,

$$10^{\frac{k}{2}} \text{ を } p \text{ で割ったときの余りは } p-1 \quad (\text{答})$$

14

$$(1) \quad 20x + 23y = 1 \quad \dots\dots ①$$

300 - 299 = 1 に注目すると

$$20 \times 15 + 23 \times (-13) = 1 \quad \dots\dots ②$$

① - ② より

$$20(x - 15) + 23(y + 13) = 0$$

$$\therefore 20(15 - x) = 23(y + 13)$$

② より 20 と 23 は互いに素であるから

$$15 - x = 23n, \quad y + 13 = 20n$$

を満たす整数 n が存在し, ① のすべての整数解は

$$(x, y) = (-23n + 15, 20n - 13) \quad (n \text{ は整数}) \quad (\text{答})$$

である。

$$(2) \quad 461 - 24 = 437 < 529 = 23^2$$

$m \geq 2$ のとき, 二項定理より

$$461^m = (20 \cdot 23 + 1)^m = \sum_{k=0}^m {}^m C_k \cdot 20^k \cdot 23^k$$

であるから,

$$\begin{aligned} 461^m - 24 &= \sum_{k=2}^m {}^m C_k \cdot 20^k \cdot 23^k + 20 \cdot 23m - 23 \\ &= 23^2 \sum_{k=2}^m {}^m C_k \cdot 20^k \cdot 23^{k-2} + 23(20m - 1) \end{aligned}$$

が 23^2 の倍数となるのは $20m - 1$ が 23 の倍数になるときであり,

$$20m + 23l = 1$$

を満たす整数 l が存在する。(1) より

$$m = 23n + 15, \quad l = -20n - 13 \quad (n \text{ は整数})$$

と表されるから, 条件を満たす正の整数 m は

$$m = 23n + 15 \quad (n \text{ は非負整数}) \quad (\text{答})$$

15

$$(1) \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 60$$

$a > 0, b > 0$ より

$$a + b > 0, \quad a - b < a + b$$

$a + b - (a - b) = 2b \equiv 0 \pmod{2}$ より $a + b$ と $a - b$ の偶奇は等しいが、積が 60 (4 の倍数) であることより、

$a + b$ と $a - b$ はともに偶数

となることを考えて、

$$(a - b, a + b) = (2, 30), (6, 10)$$

連立方程式を解くと、

$$(a, b) = (16, 14), (8, 2) \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 120$$

を満たす自然数 a, b があるとすれば、(1) と同様にして

$$0 < a^2 - b^2 < a^2 + b^2, \quad a^2 - b^2 \equiv a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

であるから、

$$(a^2 - b^2, a^2 + b^2) = (2, 60), (4, 30), (6, 20), (10, 12)$$

のいずれかに限られる。連立方程式を解くと

$$(a^2, b^2) = (31, 29), (17, 13), (13, 7), (11, 1)$$

となるが、いずれも平方数でないから矛盾する。

よって、 $a^4 - b^4 = 120$ を満たす整数 a, b は存在しない。

(証明おわり)

16

(1) $7 = 4^2 - 3^2 \in A$ (証明おわり)

(2) 平方数を 4 で割った余りは 0 または 1 であり,

$$m^2 - n^2 \equiv 0 - 0, 1 - 0, 0 - 1, 1 - 1 \pmod{4}$$

に限られるから,

$$m^2 - n^2 \not\equiv 6 \pmod{4}$$

よって, $m^2 - n^2 = 6$ を満たす整数 m, n は存在せず,

$$6 \notin A \quad (\text{証明おわり})$$

(3) 奇数は $2k + 1$ (k は整数) と表され,

$$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$$

であるから, 任意の奇数は A の要素であり, 奇数全体の集合は A の部分集合である。

(証明おわり)

(4) (2) で考察したように, 4 で割った余りについて,

$$m^2 - n^2 \equiv 0 - 0, 1 - 0, 0 - 1, 1 - 1 \pmod{4}$$

が起こり得るすべてであるから,

$$\text{「} m^2 - n^2 \text{ が偶数} \text{」} \iff m^2 \equiv n^2 \pmod{4}$$

よって, 偶数 a が A の要素であるとすれば,

$$a = m^2 - n^2, \quad m \equiv n \pmod{2}$$

を満たす整数 m, n が存在するから, a は 4 の倍数となり,

$$a = 4k \quad (k \text{ は整数})$$

と書ける。

逆に, $a = 4k$ (k は整数) と書けるとき,

$$a = 4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$$

と表されるから, $a \in A$ である。

(証明おわり)

(注) 「平方数を 4 で割った余りが 0 または 1」であることをもう少し詳しく説明すると, 任意の整数は偶数か奇数のいずれかであり, 偶数は $2b$ (b は整数) と表されて,

$$(2b)^2 = 4b^2 \equiv 0 \pmod{4},$$

奇数は $2c + 1$ (c は整数) と表されて,

$$(2c + 1)^2 = 4c(c + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

となる。

17

(1) 長さ 3 の非くり返し列は

 $aab, aba, abb, baa, bab, bba$ の 6 個 (答)

である。

(2) 長さ 6 のくり返し列は

 $aaaaaa, bbbbbb, ababab, bababa,$
 $aabaab, abaaba, abbabb, baabaa, babbab, bbabba$

の 10 個であるから, 長さ 6 の非くり返し列は

$$2^6 - 10 = 54 \text{ 個 (答)}$$

存在する。

(3) 長さ 4 の非くり返し列は

 $aaab, aaba, aabb, abaa, abba, abbb,$
 $baaa, baab, babb, bbba, bbab, bbbb$

の 12 個であり, 長さ 8 のくり返し列は

- 8 文字すべてが同じ
- 長さ 2 の非くり返し列 4 回のくり返し
- 長さ 4 の非くり返し列 2 回のくり返し

のいずれかであるから, 長さ 8 の非くり返し列は

$$2^8 - (2 + 2 + 12) = 240 \text{ 個 (答)}$$

存在する。

(注) 長さ 4 の非くり返し列を直接書き並べて数えたが, 長さ 4 のくり返し列は

 $aaaa, bbbb, abab, baba$

であるから,

$$2^4 - 4 = 12 \text{ 個}$$

と求めてもよい。

18

- (1) 正方形となるのは、4 頂点が外接円の 4 等分点となるときであるから、全部で

$$P_0P_9P_{18}P_{27}, P_1P_{10}P_{19}P_{28}, \dots, P_8P_{17}P_{26}P_{35} \text{ の } \boxed{9} \text{ 個}$$

(ア)

ある。その正方形の面積は

$$\frac{1}{2} \times 2^2 = \boxed{2} \text{ (イ)}$$

である。

- (2) 長方形は、対角線が外接円の直径となるから、全部で

$${}_{18}C_2 = \frac{18 \times 17}{2} = \boxed{153} \text{ 個}$$

(ウエオ)

ある。

- (3) 正三十六角形 K とちょうど 2 辺を共有する四角形は、
「 K の隣り合う 2 辺および連続する 3 辺を含まない」

または

「 K の隣り合う 2 辺を含み、その隣の 2 頂点とを除く 31 点
の中から (四角形の) 残り 1 つの頂点を選ぶ」

四角形の場合であるから、そのような四角形は

$$({}_{36}C_2 - 36 \times 2) + 36 \times 31 = 18 \times (35 - 4 + 62) = \boxed{1674} \text{ 個}$$

(カキクケ)

ある。

19

- (1) 5個の玉の番号がすべて異なるのは、既に取り出した玉の番号以外の玉を順に1個ずつ並べる場合であり、同じ番号の玉は2個ずつあること考え、求める確率は

$$\frac{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{8}{63} \quad (\text{答})$$

- (2) 同じ番号の2個の玉の数字、置き場所を選んだ上で、(1)と同様に異なる番号の玉を取り出すと考えると、ペアが1組だけできる確率は

$$\frac{5 \times (5 \times 4) \times 8 \times 6 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5 \times 2 \times 4}{9 \times 7} = \frac{40}{63} \quad (\text{答})$$

- (3) (2)と同様に考えると、ペアが2組できる確率は

$$\frac{{}_5C_2 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2) \times 6}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{21} \quad (\text{答})$$

- (別法) 取り出す玉は5個であるから、「番号がすべて異なる」、「ペアが1組だけできる」、「ペアが2組できる」の場合ですべてが尽くされるから、(3)は余事象の確率として

$$1 - \left(\frac{8}{63} + \frac{40}{63} \right) = \frac{15}{63} = \frac{5}{21}$$

と求めることもできる。

20

(1) 各袋から 1 個ずつ取り出すとき,

「袋 A から赤球, 袋 B から白球を取り出す」

または

「袋 A から白球, 袋 B から赤球を取り出す」

確率を求めて,

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2+6}{15} = \frac{8}{15} \quad (\text{答})$$

(2) 各袋から球を 2 個ずつ取り出すとき, 4 球すべてが同じ色となる確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1 \times 3 + 6 \times 1}{15 \times 10} = \frac{3}{50} \quad (\text{答})$$

(3) 題意の操作で袋 A の白球の個数が変わらないのは,

- 袋 A から赤球 2 個を取り出して, 袋 B から赤球 2 個を取り出す
- 袋 A から赤球 1 個, 白球 1 個を取り出して, 袋 B から赤球 1 個, 白球 1 個を取り出す
- 袋 A から白球 2 個を取り出して, 袋 B から白球 2 個を取り出す

のいずれかの場合であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_7C_2} + \frac{2 \times 4}{{}_6C_2} \times \frac{4 \times 3}{{}_7C_2} + \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} \\ &= \frac{1 \times 10 + 8 \times 12 + 6 \times 6}{15 \times 21} \\ &= \frac{142}{315} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

21

(1) ウイルス X を保有していないが発熱がみられる確率は

$$\left(1 - \frac{20000}{100000}\right) \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{2}{25}} \quad (\text{ト})$$

(2) ウイルス Y を保有し、かつ発熱がみられる確率は

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{15+8}{100} = \boxed{\frac{23}{400}} \quad (\text{ナ})$$

(3)(i) 1 回の試行で選ばれた人に腹痛がみられる確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{9+6}{40} = \frac{3}{8}$$

であるから、3 回の試行で選ばれた人のうち、1 人のみ腹痛が見られる確率は

$$\frac{3}{8} \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times {}_3C_1 = \frac{3^2 \cdot 5^2}{2^9} = \boxed{\frac{225}{512}} \quad (\text{ニ})$$

(ii) 1 回の試行でウイルス Y を保有しないで

$$\text{腹痛がみられる確率は } \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20},$$

$$\text{腹痛がみられない確率は } \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

3 回の試行で選ばれた人がすべてウイルス Y を保有しないで 1 人のみ腹痛がみられる確率は

$$\frac{3}{20} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times {}_3C_1 = \frac{3^4}{2^2 \cdot 5^3} = \frac{81}{500}$$

よって、3 回の試行で 1 人のみに腹痛がみられるとき、少なくとも 1 人がウイルス Y を保有している(条件付き)確率は

$$\frac{\frac{225}{512} - \frac{81}{500}}{\frac{225}{512}} = 1 - \frac{81}{500} \cdot \frac{512}{225} = 1 - \frac{1152}{3125} = \boxed{\frac{1973}{3125}} \quad (\text{ヌ})$$

22

- (1) 2 個目の玉を取り出したところで操作が終了となるのは、取り出した玉が 2 個とも白玉のときであるから、確率は

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \quad (\text{ア})$$

3 個目の玉を取り出したところで操作が終了となるのは、

- 3 個とも赤玉を取り出す
- 赤玉, 白玉, 白玉の順に取り出す
- 白玉, 赤玉, 白玉の順に取り出す

のいずれかの場合であるから、確率は

$$\begin{aligned} \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} &= \frac{1+8+6}{36} \\ &= \frac{\boxed{5}}{\boxed{12}} \quad (\text{ウ}) \end{aligned}$$

(エオ)

- (2) 4 個目の玉を取り出し、かつその玉が 3 個目の赤玉であるのは、
白赤赤赤 または 赤白赤赤 または 赤赤白赤 と取り出す

場合であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \\ = \frac{3+4+5}{6^3} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{18}} \quad (\text{カ}) \end{aligned}$$

(キク)

- (3) 4 個目の玉を取り出したところで操作が終了するのは、

白赤赤赤, 赤白赤赤, 赤赤白赤, 白赤赤白, 赤白赤白, 赤赤白白

と取り出す場合であるから、このとき白玉が袋から連続して取り出されている条件付き確率は、

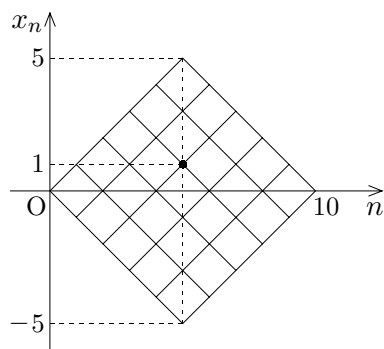
$$\begin{aligned} &\frac{3 \times 2 \times 5 \times 5}{3 \times 3 \times 2 \times 1 + 3 \times 4 \times 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 5 \times 1 + 3 \times 3 \times 2 \times 5 + 3 \times 4 \times 2 \times 5 + 3 \times 2 \times 5 \times 5} \\ &= \frac{25}{3+4+5+15+20+25} = \frac{\boxed{25}}{\boxed{72}} \quad (\text{ケコ}) \end{aligned}$$

(サシ)

23

(1) $x_{10} = 0$ となるのは、表と裏が 5 回ずつ出る場合であるから、求める確率は

$$\begin{aligned}
 P(x_{10} = 0) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times {}_{10}C_5 \\
 &= \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= \frac{9 \times 7}{2^8} \\
 &= \frac{63}{256} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



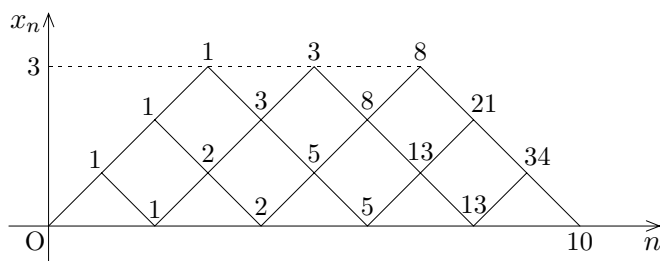
(2) 根元事象を表すダイヤグラムを参考にと

$$P(x_5 = 1 \text{ かつ } x_{10} = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times {}_5C_2 \times {}_5C_2 = \frac{25}{256}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
 P(x_5 \neq 1 \text{ かつ } x_{10} = 0) &= P(x_{10} = 0) - P(x_5 = 1 \text{ かつ } x_{10} = 0) \\
 &= \frac{63 - 25}{256} \\
 &= \frac{19}{128} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) $0 \leq x_n \leq 3$ ($n = 1, 2, \dots, 9$) かつ $x_{10} = 0$ となる根元事象を図示すると



この根元事象を(図に書き込みながら)数えると 34 通りあるから、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times 34 = \frac{17}{512} \quad (\text{答})$$

24

(1) 操作を 2 回行なって点 P の座標が 4 になるのは,

「1 回目に 3 枚とも裏が出て, 2 回目に 3 枚のうち表が 1 枚出る」

または

「1 回目に 3 枚のうち表が 1 枚出て, 2 回目に 4 枚とも裏が出る」

場合であるから, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6+3}{2^7} = \frac{9}{128} \quad (\text{答})$$

(2) 操作を 2 回行なって点 P の座標が 5 になるのは,

- 1 回目に 3 枚とも裏が出て, 2 回目に 3 枚のうち表が 2 枚出る
- 1 回目に 3 枚のうち表が 1 枚出て, 2 回目に 4 枚のうち表が 1 枚出る
- 1 回目に 3 枚のうち表が 2 枚出て, 2 回目に 5 枚とも裏が出る

のいずれかの場合であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{12+24+3}{2^8} \\ &= \frac{39}{256} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 操作を 3 回行なって点 P の座標が 5 になるのは,

- 2 回目の座標が 3 であり, 3 回目に 3 枚のうち表が 2 枚出る
- 2 回目の座標が 4 であり, 3 回目に 4 枚のうち表が 1 枚出る
- 2 回目の座標が 5 であり, 3 回目に 5 枚とも裏が出る

のいずれかの場合であり, (1), (2) の結果も用いて, 求める確率は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_2 + \frac{9}{128} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4 + \frac{39}{256} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{48+144+39}{2^{13}} \\ &= \frac{231}{8192} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$