

1 整式 $P(x)$ を $x^2 + 5x + 6$ で割ると $x + 1$ 余り, $x + 1$ で割ると 2 余るとき,
以下の問いに答えよ。

(1) $P(-1)$ を求めよ。

(2) $P(x)$ を $(x + 1)(x^2 + 5x + 6)$ で割った余りを求めよ。

(鳥取大)

2 m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。

(2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。

(3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。

(岡山大)

3 i を虚数単位とする. p を素数, q を 0 でない有理数とし, $w = \sqrt{p} + qi$ とする. 実数 a, b を係数とする x の整式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ で定める. 以下の問に答えよ.

- (1) \sqrt{p} は無理数であることを示せ.
- (2) 複素数 z について, $f(z) = 0$ ならば $f(\bar{z}) = 0$ であることを示せ. ただし, \bar{z} は z と共役な複素数を表す.
- (3) a, b は有理数ならば $f(w) \neq 0$ であることを示せ.

(神戸大)

4

- (1) x, y を正の実数とすると

$$27x + \frac{3x}{y^2} + \frac{2y}{x}$$

は, $x = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (1) & (2) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (3) & (4) \\ \hline \end{array}}, y = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (5) & (6) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (7) & (8) \\ \hline \end{array}}$ において最小値 $\begin{array}{|c|c|} \hline (9) & (10) \\ \hline \end{array}$ をとる.

- (2) 実数 x, y, z が

$$\begin{cases} x > 1, & y > 1, & z > 1 \\ \log_x y + \log_y x + \log_y z + 4 \log_z y \leq 6 \\ 4xz + 3x - 7y - 5z = -5 \end{cases}$$

を満たしているとき

$$x = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (11) & (12) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (13) & (14) \\ \hline \end{array}}, \quad y = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (15) & (16) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (17) & (18) \\ \hline \end{array}}, \quad z = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (19) & (20) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (21) & (22) \\ \hline \end{array}}$$

である.

(慶大)

□5 a, x を実数とする。関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2a(2^x + 2^{-x}) + a^2 + 2a - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $2^x + 2^{-x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の最小値が 9 のとき、 a の値を求めよ。

(甲南大)

□6 以下の問いに答えなさい。

- (1) 方程式 $\log_2 x - \log_x 64 = 1$ を解きなさい。
- (2) 不等式 $\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) 2^{64} の桁数を求めなさい。
- (4) $\log_{10} 2$ が無理数であることを示しなさい。

(岩手県大)

□7 以下の問いに答えよ。必要ならば, $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

- (1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。
- (2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。

(東大)

□8 x, y は 1 でない正の実数とする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) $\log_x y > 0$ を満たす点 (x, y) の範囲を座標平面に図示せよ。
- (2) $\log_x y + 3 \log_y x - 4 < 0$ を満たす点 (x, y) の範囲を座標平面に図示せよ。

(香川大)

9 次の にあてはまる答を解答欄に記入しなさい。

k を実数とする。 xy 平面上に 3 直線

$$l: x - 2y + 6 = 0$$

$$m: 2x - y - 3 = 0$$

$$n: 2x + ky + 3k + 4 = 0$$

がある。

直線 l と m の交点を A とすると、 A の座標は (a) である。また、直線 n は k の値にかかわらず定点 P を通る。 P の座標は (b) である。

(1) $k =$ (c) のとき直線 n は点 A を通り、3 直線 l, m, n は三角形を作らない。

また、 $k =$ (d) のときは l と n は平行、 $k =$ (e) のときは m と n は平行であり、これらの場合も 3 直線 l, m, n は三角形を作らない。

(2) $k =$ (f) のとき直線 l と n は垂直に交わる。このとき l と n の交点を B とすると、 B の座標は (g) であり、直線 n と m の交点を C とすると、

$BP:PC =$ (h) である。また、 P と通り三角形 ABC の面積を二等分する直線の方程式は $y =$ (i) である。

(明治薬大)

10 座標平面上において、点 P が $S: x^2 + y^2 = 16$ 上を動くとき、点 $A(a, 0)$ と点 P を結ぶ線分 AP の中点を Q とし、点 Q の軌跡を曲線 C とする。ここで、 $a \geq 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と円 S の共通接線がちょうど 2 つ存在するように、 a の値の範囲を定めよ。

(3) (2) の条件下において、直線 $y = kx$ が曲線 C と接するとき、 k を a を用いて表せ。ただし、 $k > 0$ とする。

(岩手大)

11 実数 m に対し, 2 直線

$$\ell_1: mx + y = m + 1, \quad \ell_2: x - my = 2m - 3$$

を考える。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) ℓ_1 と ℓ_2 は垂直であることを示せ。
- (2) 直線 ℓ_1 は m の値によらないある 1 点を必ず通る。その点の座標を求めよ。
- (3) m が正の実数全体を動くときの ℓ_1 と ℓ_2 の交点の軌跡を求め, 図示せよ。

(香川大)

12 次の に適する答を解答欄にマークせよ。

実数 x, y が 3 つの不等式

$$x + 2y \leq 8$$

$$2x + y \geq 7$$

$$x - y \leq 5$$

をみたすとき,

- (1) $x + y$ は $(x, y) = (\text{ア}, \text{イ})$ で最大値 ウ をとり,
 $(x, y) = (\text{エ}, \text{オカ})$ で最小値 キ をとる。

- (2) $\frac{y}{x}$ は $(x, y) = (\text{ク}, \text{ケ})$ で最大値 $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ をとり,

$(x, y) = (\text{シ}, \text{スセ})$ で最小値 $\frac{\text{ソタ}}{\text{チ}}$ をとる。

- (3) $x^2 + y^2$ は $(x, y) = \left(\frac{\text{ツテ}}{\text{ト}}, \frac{\text{ナ}}{\text{ニ}} \right)$ で最小値 $\frac{\text{ヌネ}}{\text{ノ}}$ をとる。

(成蹊大)

13 三角形 ABC において $\angle A = A$, $\angle B = B$, $\angle C = C$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\cos 2A + \cos 2B = 2 \cos(A + B) \cos(A - B)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 4 \sin A \sin B \cos C$ が成り立つことを示せ。
- (3) $A = B$ のとき, $1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C$ の最小値を求めよ。

(滋賀大)

14

- (1) どの実数 x に対しても

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = A \sin(x + \theta)$$

が成り立つような正の実数 A と実数 θ の組を一つ挙げよ。

- (2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, 不等式 $\sqrt{3} \tan x + 2 \cos x > 2\sqrt{3} \sin x + 1$ を満たす x の範囲を求めよ。

(お茶女大)

[15] $0 \leq x < 2\pi$, $k > 0$ とする. $(\cos x + 1)(\sin x + 1) = k$ の解の個数が 2 個となるような定数 k の範囲を求めよ.

(早大)

[16] $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos 4\alpha = \cos \alpha$ を満たす α がただ 1 つある. 以下の問に答えなさい.

(1) α の値を求め, $\cos 2\alpha = \cos 3\alpha$ を示しなさい.

(2) $\cos \alpha = x$, $\cos 2\alpha = y$ とする. $x^2 - y^2 = -\frac{1}{2}(x - y)$ であることを示し, $x + y$ の値を求めなさい.

(3) $\cos \alpha$ の値を求めなさい.

(福岡女大)

17 関数

$$f(x) = 2x(x^2 - 3x + 2)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) m を定数とする。曲線 $y = f(x)$ に点 $(0, m)$ から引くことができる接線の本数を求めよ。

(岩手大)

18 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフの概形をかけ。
- (2) 実数 t に対して、 $t \leq x$ における $f(x)$ の最小値を $m(t)$ とするとき、 $m(t)$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた $m(t)$ に対して、 $m(t) \geq t - 3$ を満たすような t をすべて求めよ。

(静岡大)

[19] $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 6x^2 - 6x + 1$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 以下の A , B , C の値をそれぞれ求めよ。

$$A = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad B = \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx, \quad C = \int_0^1 \{g(x)\}^2 dx$$

(2) 実数 s , t に対して, 関数 $F(x)$ と $G(x)$ を

$$F(x) = sf(x) + tg(x), \quad G(x) = tf(x) + sg(x)$$

で定める。さらに,

$$J = \int_0^1 \{F(x)\}^2 dx, \quad K = \int_0^1 F(x)G(x) dx$$

とする。

実数 s , t が $J = 1$ を満たしながら動くとき, K の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

(横浜国大)

[20] 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ がそれぞれ

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 2 + 2 \int_0^1 f(t) dt,$$

$$g(x) = x - \int_0^1 |g(t)| dt$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^x (3t^2 - 2t - 2) dt$ を求めよ。

(2) $I = \int_0^1 f(t) dt$ とおくとき, I の値を求めよ。また, $f(x)$ を求めよ。

(3) $g(x)$ を求めよ。

(4) $h(x) = \int_0^x f(t) dt - 2g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めよ。

(大阪工大)

- 21 a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。 xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を、次のように定める。

$$C: y = |(x-3)(x+3)|, \quad \ell: y = a$$

曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち、 $y \geq a$ の領域にある部分の面積を S_1 、 $y \leq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

(九大)

- 22 曲線 $C: y = x(|x| - 3)$ と $x = -1$ で接する直線 ℓ が、曲線 C と $x = a$ ($a > 0$) において交わる時、以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 直線 ℓ と曲線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(鳥取大)

[23] a を 0 でない実数とする。 C を $y = -x^3 + x^2$ で表される曲線, ℓ を $y = a$ で表される直線とし, C と ℓ は共有点をちょうど 2 つもつとする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) C と ℓ の共有点の x 座標をすべて求めよ。
- (3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(北大)

[24] 平面上に三角形 ABC を考え, その重心を G とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 平面上の任意の点 P に対して, 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = 3|\overrightarrow{PG}|^2 + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2$$

- (3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{3}$$

- (4) 三角形 ABC の外接円の半径を R とするとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geq \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{9}$$

(岡山大)

[25] s, t を実数とし, $s > 1, 0 < t < 1$ を満たすとする。△ABC において, 線分 AB を $s : (s-1)$ に外分する点を P, 線分 AC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする。線分 BC と線分 PQ の交点を X とする。

- (1) \overrightarrow{AP} および \overrightarrow{AQ} をそれぞれ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{AX} を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。
- (3) $AB=1, AC=\sqrt{3}, BC=2$ とし, 4 点 B, C, P, Q が同一円周上にあるとする。
 - (i) s を t を用いて表し, t のとりうる値の範囲を求めよ。
 - (ii) $|\overrightarrow{AX}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(京都工繊大)

[26] 座標空間の 3 点 $A(3, 1, 3), B(4, 2, 2), C(4, 0, 1)$ の定める平面を H とする。
また,

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \text{ は非負の実数})$$

が満たすすべての点 P からなる領域を K とする。

- (1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求めよ。
- (2) 原点 $O(0, 0, 0)$ から平面 H に下ろした垂線の足を Q とする。 \overrightarrow{AQ} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} で表せ。
- (3) 領域 K 上の点 P に対して, 線分 QP 上の点で $\overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC}$ (r は非負の実数) を満たす点 R が存在することを示せ。
- (4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ。

(名大)

27 O を原点とする xyz 空間に点 $A(1, 0, 0)$ と, O を中心とする半径 1 の球面 S がある。また, 2 点 $(2, 3, 4)$, $(-3, -2, -6)$ を通る直線を ℓ とする。直線 ℓ は S と 2 点で交わる。この 2 つの交点のうち x 座標が大きい方を点 B とし, 小さい方を点 C とする。3 点 A, B, C の定める平面を α とする。次の問いに答えよ。

〔 1 〕 点 B と点 C の座標を, それぞれ求めよ。

〔 2 〕 $\triangle ABC$ において, $\angle B$ の大きさを求めよ。

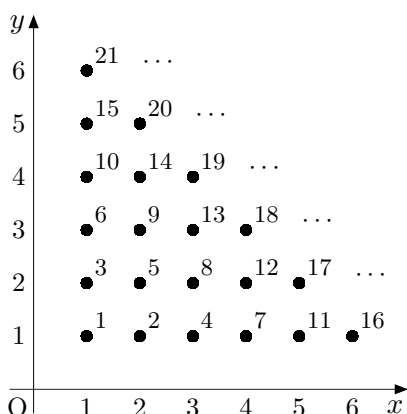
〔 3 〕 平面 α において 3 点 A, B, C を通る円を K とする。円 K の中心を P とし, 半径を r とする。

(1) 点 P の座標と r の値を求めよ。

(2) 点 P を通り α に垂直な直線を m とすると, m と S は 2 点で交わる。この 2 つの交点のうち z 座標が大きい方を点 Q とするとき, 四面体 $ABCQ$ の体積を求めよ。

(東京農工大)

- 28 xy 平面上で, x 座標と y 座標がともに正の整数であるような各点に, 下の図のような番号をつける。点 (m, n) につけた番号を $f(m, n)$ とする。たとえば, $f(1, 1) = 1$, $f(3, 4) = 19$ である。



- (1) $f(m, n) + f(m+1, n+1) = 2f(m, n+1)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $f(m, n) + f(m+1, n) + f(m, n+1) + f(m+1, n+1) = 2023$ となるような整数の組 (m, n) を求めよ。

(一橋大)

- 29 1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。ただし $0 < p < 1$ である。この試行を 10 回くり返すとき, 事象 A が n 回起こる確率を α_n とする。このとき, 以下の設問に答えよ。

- (1) $0 \leq n \leq 9$ とするとき, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq 1$ となる p の範囲を n を用いて表せ。
- (2) α_n のうち, α_7 が最大となるための p の範囲を求めよ。

(東京女大)

30

与えられた自然数 a_0 に対して, 自然数からなる数列 a_0, a_1, a_2, \dots を次のように定める.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ.

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ.
- (2) a_0, a_1, \dots, a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ.

(京大)

31

2つのチーム W, K が n 回試合を行う。ただし, $n \geq 2$ とする。各試合での W, K それぞれの勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし, 引き分けはないものとする。 W が連敗しない確率を p_n とする。ただし, 連敗とは2回以上続けて負けることを言う。

- (1) p_3 を求めよ。
- (2) 以下の2式を満たす α, β を求めよ。ただし, $\alpha < \beta$ とする。

$$p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$$

$$p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$$

- (3) p_n を求めよ。

(早大)

[32] 数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とし, さらに $S_0 = 0$ と定める.
 $\{a_n\}$ は,

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+3)a_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすとする.

(1) $a_1 = \frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}}$ である. また $n \geq 1$ に対して $a_n = S_n - S_{n-1}$ であるから,

関係式

$$(n + \boxed{(24)})a_{n+1} = (n + \boxed{(25)})a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (*)$$

が得られる. 数列 $\{b_n\}$ を,

$$b_n = n(n+1)(n+2)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めると, $b_1 = \boxed{(26)}$ であり, $n \geq 1$ に対して $b_{n+1} = \boxed{(27)}b_n$ が成り立つ.
 ゆえに

$$a_n = \frac{\boxed{(28)}}{n(n+1)(n+2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が得られる.

次に, 数列 $\{T_n\}$ を $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+3)(k+4)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める.

(2) (*) より導かれる関係式

$$\frac{a_k}{k+3} - \frac{a_{k+1}}{k+4} = \frac{\boxed{(29)}a_k}{(k+3)(k+4)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を用いると,

$$T_n = A - \frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}(n+p)(n+q)(n+r)(n+s)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が得られる. ただしここに, $A = \frac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}$ であり, $p < q < r < s$ として

$p = \boxed{(35)}$, $q = \boxed{(36)}$, $r = \boxed{(37)}$, $s = \boxed{(38)}$ である.

(3) 不等式

$$|T_n - A| < \frac{1}{10000(n+1)(n+2)}$$

を満たす最小の自然数 n は $n = \boxed{(39)}\boxed{(40)}$ である.

(慶大)