

[1] 整式 $P(x)$ を $x^2 + 5x + 6$ で割ると $x + 1$ 余り , $x + 1$ で割ると 2 余るとき ,
以下の問いに答えよ。

- (1) $P(-1)$ を求めよ。
- (2) $P(x)$ を $(x + 1)(x^2 + 5x + 6)$ で割った余りを求めよ。

(鳥取大)

[2] m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。

(岡山大)

[3] i を虚数単位とする。 p を素数, q を 0 でない有理数とし, $w = \sqrt{p} + q i$ とする。実数 a, b を係数とする x の整式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ で定める。以下の間に答えよ。

- (1) \sqrt{p} は無理数であることを示せ。
- (2) 複素数 z について, $f(z) = 0$ ならば $f(\bar{z}) = 0$ であることを示せ。ただし, \bar{z} は z と共に複素数を表す。
- (3) a, b は有理数ならば $f(w) \neq 0$ であることを示せ。

(神戸大)

[4]

- (1) x, y を正の実数とするとき

$$27x + \frac{3x}{y^2} + \frac{2y}{x}$$

は, $x = \frac{\boxed{(1)} \boxed{(2)}}{\boxed{(3)} \boxed{(4)}}, y = \frac{\boxed{(5)} \boxed{(6)}}{\boxed{(7)} \boxed{(8)}}$ において最小値 $\boxed{(9)} \boxed{(10)}$ をとる。

- (2) 実数 x, y, z が

$$\begin{cases} x > 1, \quad y > 1, \quad z > 1 \\ \log_x y + \log_y x + \log_y z + 4 \log_z y \leqq 6 \\ 4xz + 3x - 7y - 5z = -5 \end{cases}$$

を満たしているとき

$$x = \frac{\boxed{(11)} \boxed{(12)}}{\boxed{(13)} \boxed{(14)}}, \quad y = \frac{\boxed{(15)} \boxed{(16)}}{\boxed{(17)} \boxed{(18)}}, \quad z = \frac{\boxed{(19)} \boxed{(20)}}{\boxed{(21)} \boxed{(22)}}$$

である。

(慶大)

[5] a, x を実数とする。関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} - 2a(2^x + 2^{-x}) + a^2 + 2a - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $2^x + 2^{-x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の最小値が 9 のとき、 a の値を求めよ。

(甲南大)

[6] 以下の問いに答えなさい。

- (1) 方程式 $\log_2 x - \log_x 64 = 1$ を解きなさい。
- (2) 不等式 $\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) 2^{64} の桁数を求めなさい。
- (4) $\log_{10} 2$ が無理数であることを示しなさい。

(岩手県大)

7 以下の問いに答えよ。必要ならば， $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

- (1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。
- (2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。

(東大)

8 x, y は 1 でない正の実数とする。このとき，次の間に答えよ。

- (1) $\log_x y > 0$ を満たす点 (x, y) の範囲を座標平面に図示せよ。
- (2) $\log_x y + 3 \log_y x - 4 < 0$ を満たす点 (x, y) の範囲を座標平面に図示せよ。

(香川大)

[9] 次の にあてはまる答を解答欄に記入しなさい。

k を実数とする。 xy 平面上に 3 直線

$$l : x - 2y + 6 = 0$$

$$m : 2x - y - 3 = 0$$

$$n : 2x + ky + 3k + 4 = 0$$

がある。

直線 l と m の交点を A とすると、A の座標は (a)" value=""/> である。また、直線 n は k の値にかかわらず定点 P を通る。P の座標は (b)" value=""/> である。

(1) $k = \boxed{(c)}$ のときは直線 n は点 A を通り、3 直線 l, m, n は三角形を作らない。

また、 $k = \boxed{(d)}$ のときは l と n は平行、 $k = \boxed{(e)}$ のときは m と n は平行であり、これらの場合も 3 直線 l, m, n は三角形を作らない。

(2) $k = \boxed{(f)}$ のときは直線 l と n は垂直に交わる。このとき l と n の交点を B と

すると、B の座標は (g)" value=""/> あり、直線 n と m の交点を C とすると、

$BP : PC = \boxed{(h)}$ である。また、P と通り三角形 ABC の面積を二等分する

直線の方程式は $y = \boxed{(i)}$ である。

(明治薬大)

[10] 座標平面上において、点 P が $S : x^2 + y^2 = 16$ 上を動くとき、点 A($a, 0$) と点 P を結ぶ線分 AP の中点を Q とし、点 Q の軌跡を曲線 C とする。ここで、 $a \geq 0$ とする。このとき、次の問い合わせよ。

(1) 曲線 C の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と円 S の共通接線がちょうど 2 つ存在するように、 a の値の範囲を定めよ。

(3) (2)の条件下において、直線 $y = kx$ が曲線 C と接するとき、 k を a を用いて表せ。ただし、 $k > 0$ とする。

(岩手大)

[11] 実数 m に対し , 2 直線

$$\ell_1 : mx + y = m + 1, \quad \ell_2 : x - my = 2m - 3$$

を考える。このとき , 次の間に答えよ。

- (1) ℓ_1 と ℓ_2 は垂直であることを示せ。
- (2) 直線 ℓ_1 は m の値によらないある 1 点を必ず通る。その点の座標を求めよ。
- (3) m が正の実数全体を動くときの ℓ_1 と ℓ_2 の交点の軌跡を求め , 図示せよ。

(香川大)

[12] 次の に適する答を解答欄にマークせよ .

実数 x, y が 3 つの不等式

$$x + 2y \leq 8$$

$$2x + y \geq 7$$

$$x - y \leq 5$$

をみたすとき ,

- (1) $x + y$ は $(x, y) = (\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ で最大値 をとり ,
 $(x, y) = (\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オカ}})$ で最小値 をとる .

- (2) $\frac{y}{x}$ は $(x, y) = (\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{ケ}})$ で最大値 をとり ,

- $(x, y) = (\boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{スセ}})$ で最小値 をとる .

- (3) $x^2 + y^2$ は $(x, y) = (\boxed{\text{ツテ}}, \boxed{\text{ナ}})$ で最小値 をとる .

(成蹊大)

[13] 三角形 ABCにおいて $\angle A = A$, $\angle B = B$, $\angle C = C$ とする。このとき, 次の問い合わせに答えよ。

- (1) $\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A+B)\cos(A-B)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 4\sin A \sin B \cos C$ が成り立つことを示せ。
- (3) $A = B$ のとき, $1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C$ の最小値を求めよ。

(滋賀大)

[14]

- (1) どの実数 x に対しても

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = A \sin(x + \theta)$$

が成り立つような正の実数 A と実数 θ の組を一つ挙げよ。

- (2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, 不等式 $\sqrt{3} \tan x + 2 \cos x > 2\sqrt{3} \sin x + 1$ を満たす x の範囲を求めよ。

(お茶女大)

- [15] $0 \leq x < 2\pi$, $k > 0$ とする . $(\cos x + 1)(\sin x + 1) = k$ の解の個数が 2 個となるような定数 k の範囲を求めよ .

(早大)

- [16] $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos 4\alpha = \cos \alpha$ を満たす α がただ 1 つある . 以下の間に答えなさい .

(1) α の値を求め , $\cos 2\alpha = \cos 3\alpha$ を示しなさい .

(2) $\cos \alpha = x$, $\cos 2\alpha = y$ とする . $x^2 - y^2 = -\frac{1}{2}(x - y)$ であることを示し , $x + y$ の値を求めなさい .

(3) $\cos \alpha$ の値を求めなさい .

(福岡女大)

[17] 関数

$$f(x) = 2x(x^2 - 3x + 2)$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) m を定数とする。曲線 $y = f(x)$ に点 $(0, m)$ から引くことができる接線の本数を求めよ。

(岩手大)

[18] 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフの概形をかけ。

(2) 実数 t に対して， $t \leq x$ における $f(x)$ の最小値を $m(t)$ とするとき， $m(t)$ を求めよ。

(3) (2)で求めた $m(t)$ に対して， $m(t) \geq t - 3$ を満たすような t をすべて求めよ。

(静岡大)

[19] $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 6x^2 - 6x + 1$ とする。次の問い合わせに答えよ。

(1) 以下の A , B , C の値をそれぞれ求めよ。

$$A = \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad B = \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx, \quad C = \int_0^1 \{g(x)\}^2 dx$$

(2) 実数 s , t に対して、関数 $F(x)$ と $G(x)$ を

$$F(x) = sf(x) + tg(x), \quad G(x) = tf(x) + sg(x)$$

で定める。さらに、

$$J = \int_0^1 \{F(x)\}^2 dx, \quad K = \int_0^1 F(x)G(x) dx$$

とする。

実数 s , t が $J = 1$ をみたしながら動くとき、 K の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

(横浜国大)

[20] 2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ がそれぞれ

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 2 + 2 \int_0^1 f(t) dt,$$

$$g(x) = x - \int_0^1 |g(t)| dt$$

を満たすとき、次の問い合わせに答えよ。

(1) $\int_0^x (3t^2 - 2t - 2) dt$ を求めよ。

(2) $I = \int_0^1 f(t) dt$ とおくとき、 I の値を求めよ。また、 $f(x)$ を求めよ。

(3) $g(x)$ を求めよ。

(4) $h(x) = \int_0^x f(t) dt - 2g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めよ。

(大阪工大)

- 21 a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を、次のように定める。

$$C : y = |(x - 3)(x + 3)|, \quad \ell : y = a$$

曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち、 $y \geq a$ の領域にある部分の面積を S_1 、 $y \leq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

(九大)

- 22 曲線 $C : y = x(|x| - 3)$ と $x = -1$ で接する直線 ℓ が、曲線 C と $x = a (a > 0)$ において交わるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 直線 ℓ と曲線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(鳥取大)

- [23] a を 0 でない実数とする。 C を $y = -x^3 + x^2$ で表される曲線、 ℓ を $y = a$ で表される直線とし、 C と ℓ は共有点をちょうど 2 つもつとする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) C と ℓ の共有点の x 座標をすべて求めよ。
- (3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(北大)

- [24] 平面上に三角形 ABC を考え、その重心を G とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 平面上の任意の点 P に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = 3|\overrightarrow{PG}|^2 + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2$$
- (3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{3}$$
- (4) 三角形 ABC の外接円の半径を R とするとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geq \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{9}$$

(岡山大)

[25] s, t を実数とし , $s > 1$, $0 < t < 1$ を満たすとする。 $\triangle ABC$ において , 線分 AB を $s : (s-1)$ に外分する点を P , 線分 AC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする。線分 BC と線分 PQ の交点を X とする。

- (1) \overrightarrow{AP} および \overrightarrow{AQ} をそれぞれ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{AX} を \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} を用いて表せ。
- (3) $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, $BC = 2$ とし , 4 点 B , C , P , Q が同一円周上にあるとする。
 - (i) s を t を用いて表し , t のとりうる値の範囲を求めよ。
 - (ii) $|\overrightarrow{AX}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(京都工織大)

[26] 座標空間の 3 点 $A(3, 1, 3)$, $B(4, 2, 2)$, $C(4, 0, 1)$ の定める平面を H とする。

また ,

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \text{ は非負の実数})$$

が満たすすべての点 P からなる領域を K とする。

- (1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求めよ。
- (2) 原点 $O(0, 0, 0)$ から平面 H に下ろした垂線の足を Q とする。 \overrightarrow{AQ} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} で表せ。
- (3) 領域 K 上の点 P に対して , 線分 QP 上の点で $\overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC}$ (r は非負の実数) を満たす点 R が存在することを示せ。
- (4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ。

(名大)

〔27〕 O を原点とする xyz 空間に点 $A(1, 0, 0)$ と, O を中心とする半径 1 の球面 S がある。また, 2 点 $(2, 3, 4)$, $(-3, -2, -6)$ を通る直線を ℓ とする。直線 ℓ は S と 2 点で交わる。この 2 つの交点のうち x 座標が大きい方を点 B とし, 小さい方を点 C とする。3 点 A, B, C の定める平面を α とする。次の問いに答えよ。

〔1〕 点 B と点 C の座標を, それぞれ求めよ。

〔2〕 $\triangle ABC$ において, $\angle B$ の大きさを求めよ。

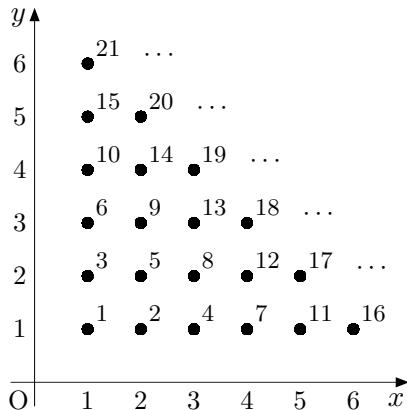
〔3〕 平面 α において 3 点 A, B, C を通る円を K とする。円 K の中心を P とし, 半径を r とする。

(1) 点 P の座標と r の値を求めよ。

(2) 点 P を通り α に垂直な直線を m とすると, m と S は 2 点で交わる。この 2 つの交点のうち z 座標が大きい方を点 Q とするとき, 四面体 $ABCQ$ の体積を求めよ。

(東京農工大)

- [28] xy 平面上で、 x 座標と y 座標がともに正の整数であるような各点に、下の図のような番号をつける。点 (m, n) につけた番号を $f(m, n)$ とする。たとえば、 $f(1, 1) = 1$ 、 $f(3, 4) = 19$ である。



- (1) $f(m, n) + f(m+1, n+1) = 2f(m, n+1)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $f(m, n) + f(m+1, n) + f(m, n+1) + f(m+1, n+1) = 2023$ となるような整数の組 (m, n) を求めよ。

(一橋大)

- [29] 1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。ただし $0 < p < 1$ である。この試行を 10 回くり返すとき、事象 A が n 回起こる確率を α_n とする。このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) $0 \leq n \leq 9$ とするとき、 $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq 1$ となる p の範囲を n を用いて表せ。
- (2) α_n のうち、 α_7 が最大となるための p の範囲を求めよ。

(東京女大)

[30]

与えられた自然数 a_0 に対して、自然数からなる数列 a_0, a_1, a_2, \dots を次のように定める。

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

- (1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。
- (2) a_0, a_1, \dots, a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

(京大)

[31]

2つのチーム W, K が n 回試合を行う。ただし、 $n \geq 2$ とする。各試合での W, K それぞれの勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし、引き分けはないものとする。 W が連敗しない確率を p_n とする。ただし、連敗とは 2 回以上続けて負けることを言う。

- (1) p_3 を求めよ。
- (2) 以下の 2 式を満たす α, β を求めよ。ただし、 $\alpha < \beta$ とする。

$$p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$$

$$p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$$

- (3) p_n を求めよ。

(早大)

[32] 数列 $\{a_n\}$ に対して $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とし, さらに $S_0 = 0$ と定める. $\{a_n\}$ は,

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+3)a_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすとする.

(1) $a_1 = \frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}}$ である. また $n \geq 1$ に対して $a_n = S_n - S_{n-1}$ であるから,

関係式

$$\left(n + \boxed{(24)}\right)a_{n+1} = \left(n + \boxed{(25)}\right)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (*)$$

が得られる. 数列 $\{b_n\}$ を,

$$b_n = n(n+1)(n+2)a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めると, $b_1 = \boxed{(26)}$ であり, $n \geq 1$ に対して $b_{n+1} = \boxed{(27)} b_n$ が成り立つ.
ゆえに

$$a_n = \frac{\boxed{(28)}}{n(n+1)(n+2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が得られる.

次に, 数列 $\{T_n\}$ を $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+3)(k+4)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める.

(2) (*) より導かれる関係式

$$\frac{a_k}{k+3} - \frac{a_{k+1}}{k+4} = \frac{\boxed{(29)} a_k}{(k+3)(k+4)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を用いると,

$$T_n = A - \frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}(n+p)(n+q)(n+r)(n+s)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が得られる. ただしここに, $A = \frac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}$ であり, $p < q < r < s$ として

$p = \boxed{(35)}$, $q = \boxed{(36)}$, $r = \boxed{(37)}$, $s = \boxed{(38)}$ である.

(3) 不等式

$$|T_n - A| < \frac{1}{10000(n+1)(n+2)}$$

を満たす最小の自然数 n は $n = \boxed{(39)}\boxed{(40)}$ である.

(慶大)