

1

- (1) 整式
- $P(x)$
- を
- $x+1$
- で割ると 2 余るから, 剰余の定理より

$$P(-1) = 2 \quad (\text{答})$$

- (2) 整式
- $P(x)$
- を
- $x^2 + 5x + 6$
- で割ると
- $x+1$
- 余るから,

$$P(x) = (x^2 + 5x + 6)Q_1(x) + x + 1 \quad (Q_1(x) \text{ は整式}) \dots\dots (*)$$

と表され, (1) より

$$P(-1) = 2Q_1(-1) + 0 = 2 \quad \therefore Q_1(-1) = 1$$

よって,

$$Q_1(x) = (x+1)Q_2(x) + 1 \quad (Q_2(x) \text{ は整式})$$

と表されるから, (*) に代入すると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x^2 + 5x + 6)Q_2(x) + (x^2 + 5x + 6) + x + 1 \\ &= (x+1)(x^2 + 5x + 6)Q_2(x) + x^2 + 6x + 7 \end{aligned}$$

以上より, $P(x)$ を $(x+1)(x^2 + 5x + 6)$ で割った余りは

$$x^2 + 6x + 7 \quad (\text{答})$$

2

(1) $X^m - 1 = (X - 1)(X^{m-1} + X^{m-2} + \cdots + X + 1)$ と因数分解されることを考えて、

$$x^{3m} - 1 = (x^3 - 1)(x^{3(m-1)} + x^{3(m-2)} + \cdots + x^3 + 1)$$

は $x^3 - 1$ で割り切れる。 (証明おわり)

(2)(i) $n = 3m$ (m は正の整数) のとき

(1) より、 $x^n - 1$ は $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ で割り切れるから、
 $x^2 + x + 1$ で割った余りは 0

である。

(ii) $n = 3m - 2 = 3(m - 1) + 1$ (m は正の整数) のとき

$x^{3(m-1)} - 1$ は (零多項式の場合も含めて) $x^2 + x + 1$ で割り切れるから、

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= x^{3(m-1)}x - 1 \\ &= x(x^{3(m-1)} - 1) + x - 1 \end{aligned}$$

を $x^2 + x + 1$ で割った余りは $x - 1$ である。

(iii) $n = 3m - 1 = 3(m - 1) + 2$ (m は正の整数) のとき

$x^{3(m-1)} - 1$ は (零多項式の場合も含めて) $x^2 + x + 1$ で割り切れるから、

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= x^{3(m-1)}x^2 - 1 \\ &= x^2(x^{3(m-1)} - 1) + x^2 - 1 \\ &= x^2(x^{3(m-1)} - 1) + (x^2 + x + 1) - x - 2 \end{aligned}$$

を $x^2 + x + 1$ で割った余りは $-x - 2$ である。

以上をまとめて、 $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りは

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき} & 0 \\ n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき} & x - 1 \\ n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき} & -x - 2 \end{cases} \quad (\text{答})$$

(3) $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ 、および

$$2024 = 3 \times 674 + 2 = 3 \times 673 + 5$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} x^{2024} - 1 &= (x^3)^{673}x^5 - 1 \\ &= x^5 \{ (x^3)^{673} + 1 \} - x^5 - 1 \\ &= x^5(x^3 + 1)(x^{3 \cdot 672} - x^{3 \cdot 671} + x^{3 \cdot 670} - \cdots - x^3 + 1) \\ &\quad - (x^3 + 1)x^2 + x^2 - 1 \\ &= x^5(x^3 + 1)(x^{3 \cdot 672} - x^{3 \cdot 671} + x^{3 \cdot 670} - \cdots - x^3 + 1) \\ &\quad - (x^3 + 1)x^2 + (x^2 - x + 1) + x - 2 \end{aligned}$$

を $x^2 - x + 1$ で割った余りは

$$x - 2 \quad (\text{答})$$

(別解) $2024 = 3 \times 374 + 2$ であるから、(2)より

$$x^{2024} - 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) - x - 2 \quad (Q(x) \text{ は整式})$$

が成り立つ。これは x についての恒等式であるから, x を $-x$ に置き換えても成り立ち,

$$x^{2024} - 1 = (-x)^{2024} - 1 = (x^2 - x + 1)Q(-x) + x - 2$$

を $x^2 - x + 1$ で割った余りは

$$x - 2 \quad (\text{答})$$

3

(1) \sqrt{p} が有理数であるとすれば,

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}$$

を満たす互いに素な自然数 m, n が存在する。両辺を平方しても同値であるから

$$p = \frac{m^2}{n^2} \quad \therefore pn^2 = m^2$$

 m^2 が n^2 で割り切れることになるが, m^2 と n^2 は互いに素であるから,

$$n^2 = 1 \quad \text{したがって} \quad n = 1$$

このとき

$$p = m^2$$

となって, 素数が平方数であることを表すから矛盾である。

よって, 素数は有理数でなく, 無理数である。 (証明おわり)

(注) 厳密に言えば, 高校数学の範囲では実数であることは証明できないので, 無理数であることは証明できない。そのため, 大学入試でこのような出題がなされた場合は, 有理数でないことさえ証明すれば, 正解と認められるようである。それでは, 実数とは何かと言われれば, それは大学で学べるので心配は無用である。

(2) 複素数 z について,

$$f(z) = z^3 + az^2 + b = 0$$

であるとすれば,

$$\overline{f(z)} = \overline{z^3 + az^2 + b} = \bar{z}^3 + \bar{a} \cdot \bar{z}^2 + \bar{b} = \bar{0}$$

ここで, a, b , および 0 は実数であり,

$$\bar{a} = a, \quad \bar{b} = b, \quad \bar{0} = 0$$

であるから,

$$\overline{f(z)} = \bar{z}^3 + \bar{a} \cdot \bar{z}^2 + \bar{b} = \bar{z}^3 + a\bar{z}^2 + b = f(\bar{z})$$

であり, $f(\bar{z}) = 0$ が成り立つ。 (証明おわり)(3) $w = \sqrt{p} + qi$ (p は素数, q は 0 でない有理数) より

$$(w - \sqrt{p})^2 = (qi)^2$$

$$w^2 - 2\sqrt{p}w + p + q^2 = 0$$

 $f(x)$ を $x^2 - 2\sqrt{p}x + p + q^2$ で割ると, x についての恒等式

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b$$

$$= (x^2 - 2\sqrt{p}x + p + q^2)(x + a + 2\sqrt{p}) - (q^2 - 2a\sqrt{p} - 3p)x - (p + q^2)(a + 2\sqrt{p}) + b$$

が成り立つから,

$$f(w) = -(q^2 - 2a\sqrt{p} - 3p)w - (p + q^2)(a + 2\sqrt{p}) + b$$

 $f(w) = 0$ であるとすれば, $q \neq 0$ より w は虚数であるから,

$$\begin{cases} q^2 - 2a\sqrt{p} - 3p = 0 \\ -(p + q^2)(a + 2\sqrt{p}) + b = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} q^2 - 3p - 2a\sqrt{p} = 0 & \dots\dots ① \\ -a(p + q^2) + b - 2(p + q^2)\sqrt{p} = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

p, q は有理数であり, (1)より \sqrt{p} は無理数であるから, a, b が有理数であるとすれば, ①より

$$q^2 - 3p = 0 \quad (\text{かつ } -2a = 0) \quad \dots\dots ③$$

②より

$$\begin{aligned} -a(p + q^2) + b = 0 \quad \text{かつ} \quad -2(p + q^2) &= 0 \\ \text{特に } p + q^2 = 0 &\quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

③かつ④を p, q についての連立方程式として解くと,

$$p = q = 0$$

となって仮定に反するから, a, b がともに有理数ならば, $f(w) \neq 0$ である。

(証明おわり)

4

(1) 相乗平均が定数になる組み合わせを見つけるために,

$$x^a \left(\frac{x}{y^2}\right)^b \left(\frac{y}{x}\right)^c = x^{a+b-c} y^{-2b+c}$$

において

$$a + b - c = 0 \quad \text{かつ} \quad -2b + c = 0$$

とおくと,

$$c = 2b, \quad a = b$$

できるだけ小さい自然数を選ぶと,

$$a = b = 1, \quad c = 2$$

 $x > 0, y > 0$ を考えて, 相加・相乗平均の不等式を適用すると

$$\begin{aligned} 27x + \frac{3x}{y^2} + \frac{2y}{x} &= 27x + \frac{3x}{y^2} + \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \\ &\geq 4\sqrt[4]{27x \cdot \frac{3x}{y^2} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{x}} = 4\sqrt[4]{81} = 12 \end{aligned}$$

ここで, 不等式の等号は

$$27x = \frac{3x}{y^2} = \frac{y}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{\overset{(1)(2)}{\boxed{01}}}{\underset{(3)(4)}{\boxed{09}}}, \quad y = \frac{\overset{(5)(6)}{\boxed{01}}}{\underset{(7)(8)}{\boxed{03}}}$$

のとき成り立つから, 最小値 $\underset{(9)(10)}{\boxed{12}}$ をとる。(2) $x > 1, y > 1, z > 1$ より

$$\log_x y > 0, \log_y x > 0, \log_y z > 0, 4\log_z y > 0$$

であることを考えて, 相加・相乗平均の不等式を適用すると

$$\begin{aligned} \log_x y + \log_y x &= \log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq 2\sqrt{\log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y}} = 2 \\ \log_y z + 4\log_z y &= \log_y z + \frac{4}{\log_y z} \geq 2\sqrt{\log_y z \cdot \frac{4}{\log_y z}} = 4 \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\log_x y + \log_y x + \log_y z + 4\log_z y \geq 6$$

仮定より $\log_x y + \log_y x + \log_y z + 4\log_z y \leq 6$ であるから,

$$\log_x y + \log_y x + \log_y z + 4\log_z y = 6$$

よって, 不等式の等号成立条件を考えることにより,

$$\log_x y = \frac{1}{\log_x y} \quad \text{かつ} \quad \log_y z = \frac{4}{\log_z y}$$

$$(\log_x y)^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad (\log_y z)^2 = 4$$

 $\log_x y > 0, \log_y z > 0$ より

$$\log_x y = 1, \quad \log_y z = 2$$

$$\therefore x = y \quad \text{かつ} \quad z = y^2 \quad \dots\dots (*)$$

$$4xz + 3x - 7y - 5z = -5 \text{ より}$$

$$4y \cdot y^2 + 3y - 7y - 5y^2 + 5 = 0$$

$$4y^3 - 5y^2 - 4y + 5 = 0$$

$$(y^2 - 1)(4y - 5) = 0$$

$$y > 1 \text{ より}$$

$$y = \frac{\frac{(15)(16)}{05}}{\frac{(17)(18)}{04}}$$

(*)に代入して x, z も求めて,

$$x = \frac{\frac{(11)(12)}{05}}{\frac{(13)(14)}{04}}, \quad z = \frac{\frac{(19)(20)}{25}}{\frac{(21)(22)}{16}}$$

(注) (1)につられて

$$\begin{aligned} & \log_x y + \log_y x + \log_y z + 4 \log_z y \\ & \geq \sqrt[4]{(\log_x y)(\log_y x)(\log_y z)(4 \log_z y)} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

としてしまいそうであるが, 不等式の等号成立条件

$$\log_x y = \log_y x = \log_y z = 4 \log_z y$$

を満たさないのので, これでは評価が甘くなって結果が出せない。

5

(1) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと,

$$2^{2x} - t \cdot 2^x + 1 = 0$$

と書くことができて,

$$X^2 - tX + 1 = 0$$

を満たす正の実数 $X (= 2^x)$ が (少なくとも 1 つ) 存在する条件が, t のとり得る値の範囲を表す。

$$(2 \text{ 解の積}) = 1 > 0$$

であるから, 2 解がともに正であることと同値であり,

$$\begin{cases} (\text{判別式}) = t^2 - 4 \geq 0 \\ (2 \text{ 解の積}) = 1 > 0 \\ (2 \text{ 解の和}) = t > 0 \end{cases}$$

$$\therefore t \geq 2$$

よって, $2^x + 2^{-x} = t$ のとり得る値の範囲は

$$2^x + 2^{-x} \geq 2 \quad (\text{答})$$

(注) 相加・相乗平均の不等式より

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

を導くだけでは,

$$2^x + 2^{-x} \text{ が } 2 \text{ より小さい値をとらない}$$

ことを示しただけで, 2 以上のすべての値をとり得るかどうかわからない。
不等号は原則的には大小関係を表すだけと理解しなければならない。数学 I, II だけで解決できる問題ではあるが, 関数 $g(x) = 2^x + 2^{-x}$ を微分して増減を調べる解法を用いてもよい。(2) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと,

$$4^x + 4^{-x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2 = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = t^2 - 2$$

$$f(x) = (t^2 - 2) - 2at + a^2 + 2a - 1 = (t - a)^2 + 2a - 3$$

(1) より $t \geq 2$ であるから, $f(x)$ は

$$a \leq 2 \text{ のとき } t = 2 \text{ で最小,}$$

$$a \geq 2 \text{ のとき } t = a \text{ で最小}$$

であり, 最小値が 9 となるのは,

$$\begin{cases} a \leq 2 \text{ のとき} & a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 = 9 & \therefore a - 1 = -3 \\ a \geq 2 \text{ のとき} & 2a - 3 = 9 & \therefore a = 6 \end{cases}$$

以上より, 求める a の値は

$$a = -2, 6 \quad (\text{答})$$

6

(1) $\log_x 64 = \log_x 2^6 = 6 \log_x 2 = \frac{6}{\log_2 x}$ であるから, 与えられた方程式は

$$\log_2 x - \frac{6}{\log_2 x} = 1$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 = 0$$

$$(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 3) = 0 \quad \therefore \log_2 x = -2, 3$$

$\log_2 x = -2$ のとき $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, $\log_2 x = 3$ のとき $x = 2^3 = 8$ であるから,

方程式 $\log_2 x - \log_x 64 = 1$ の解は

$$x = \frac{1}{4}, 8 \quad (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} \log_{10} 2 - \frac{3}{10} &= \frac{10 \log_{10} 2 - 3 \log_{10} 10}{10} \\ &= \frac{\log_{10} 2^{10} - \log_{10} 10^3}{10} \\ &= \frac{\log_{10} 1024 - \log_{10} 1000}{10} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{13} - \log_{10} 2 &= \frac{4 \log_{10} 10 - 13 \log_{10} 2}{13} \\ &= \frac{\log_{10} 10^4 - \log_{10} 2^{13}}{13} \\ &= \frac{\log_{10} 10000 - \log_{10} 8192}{13} > 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

(証明おわり)

(3) $\log_{10} 2^{64} = 64 \log_{10} 2$ であるから, (2)より

$$\frac{96}{5} < \log_{10} 2^{64} < \frac{256}{13}$$

$$\frac{96}{5} = 19 + \frac{1}{5}, \quad \frac{256}{13} = 19 + \frac{9}{13} \quad \text{より}$$

$$19 < \log_{10} 2^{64} < 20 \quad \therefore 10^{19} < 2^{64} < 10^{20}$$

よって,

$$2^{64} \text{ は (10 進表示で) 20 桁 } \quad (\text{答})$$

である。

(注) 本問では $\log_{10} 3 \div 0.3010$ を仮定されていないので, それを用いて解くことはできない。

(4) $\log_{10} 2$ が有理数であるとすれば,

$$\log_{10} 2 = \frac{m}{n}$$

を満たす互いに素な自然数 m, n が存在して,

$$n \log_{10} 2 = m \log_{10} 10$$

$$\log_{10} 2^n = \log_{10} 10^m$$

$$\therefore 2^n = 10^m$$

ところが, 左辺は 5 で割り切れず, 右辺は 5 で割り切れるから矛盾する。

よって, $\log_{10} 2$ は無理数である。

(注) $\boxed{3}$ でも指摘した通り, 高校数学の範囲では実数であることは示せないで、有理数でないことを示しさえすればよい。見かけの上では $\boxed{3}$ と被っているが、矛盾の導き方が全く異なるので、敢えて出題することにした。

7

(1) $5^n > 10^{19}$ において常用対数をとると

$$\log_{10} 5^n > \log_{10} 10^{19}$$

$$n \log_{10} \frac{10}{2} > 19 \log_{10} 10$$

$$n(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) > 19 \quad \therefore n > \frac{19}{1 - \log_{10} 2}$$

 $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ より

$$0.69 < 1 - \log_{10} 2 < 0.7$$

$$\frac{19}{0.7} < \frac{19}{1 - \log_{10} 2} < \frac{19}{0.69}$$

ここで,

$$\frac{19}{0.7} = \frac{190}{7} = 27.1 \dots, \quad \frac{19}{0.69} = \frac{1900}{69} = 27.5 \dots$$

であるから, $5^n > 10^{19}$ すなわち $n > \frac{19}{1 - \log_{10} 2}$ となる最小の自然数 n は

$$n = 28 \quad (\text{答})$$

である。

(2) $5^{28} > 10^{19}$ であるから, 必然的に

$$5^{28} + 4^{28} > 10^{19}$$

が成り立つ。 5^{27} について考えると

$$\log_{10} 5^{27} = 27 \log_{10} \frac{10}{2} = 27(1 - \log_{10} 2)$$

 $\log_{10} 2 > 0.3$ より

$$\log_{10} 5^{27} < 27 \times (1 - 0.3) = 18.9 \quad \therefore 5^{27} < 10^{18.9}$$

 4^{27} については

$$\log_{10} 4^{27} = \log_{10} 2^{54} = 54 \log_{10} 2$$

 $\log_{10} 2 < 0.31$ より

$$\log_{10} 4^{27} < 54 \times 0.31 = 16.74 < 17 \quad \therefore 4^{27} < 10^{17}$$

よって,

$$\begin{aligned} 5^{27} + 4^{27} &< 10^{18.9} + 10^{17} \\ &= 10^{17} \times (10^{1.9} + 1) \\ &= 10^{17} \times \{10 \times (10^{0.3})^3 + 1\} \\ &< 10^{17} \times \{10 \times (10^{\log_{10} 2})^3 + 1\} = 10^{17} \times (10 \times 2^3 + 1) \\ &= 10^{17} \times 81 \\ &< 10^{17} \times 100 = 10^{19} \end{aligned}$$

が成り立つから, $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m は

$$m = 28 \quad (\text{答})$$

である。

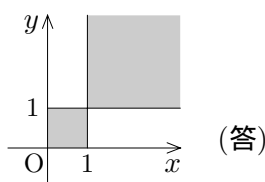
8

(1) x, y が 1 でない正の実数であるというもとで,

$$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} > 0 \iff (\log_2 x)(\log_2 y) > 0$$

$$\iff (x-1)(y-1) > 0$$

であるから, この不等式を満たす点 (x, y) の範囲を図示すると, 次図の網目部分となる。ただし, 境界線上は含まない。



$$\begin{aligned} (2) \quad \log_x y + 3 \log_y x - 4 &= \frac{\log_2 y}{\log_2 x} + 3 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 y} - 4 \\ &= \frac{(\log_2 y)^2 + 3(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x \log_2 y}{\log_2 x \log_2 y} \\ &= \frac{(\log_2 y - \log_2 x)(\log_2 y - 3 \log_2 x)}{\log_2 x \log_2 y} \\ &= \frac{(\log_2 y - \log_2 x)(\log_2 y - \log_2 x^3)}{\log_2 x \log_2 y} < 0 \end{aligned}$$

$$\iff (\log_2 x)(\log_2 y)(\log_2 y - \log_2 x)(\log_2 y - \log_2 x^3) < 0$$

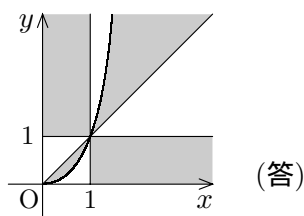
x, y が 1 でない正の実数のもとで, これは

$$(x-1)(y-1)(y-x)(y-x^3) < 0$$

と同値であり,

$$(3-1) \times (2-1) \times (2-3) \times (2-3^3) > 0$$

より点 $(3, 2)$ を含まない側が題意の領域となり, 次図の網目部分 (境界線上を含まない) となる。



9

$$l: x - 2y + 6 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$m: 2x - y - 3 = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$n: 2x + ky + 3k + 4 = 0 \quad \dots\dots ③$$

①かつ②を解くことにより, l と m の交点 A の座標は $\boxed{(4, 5)}$ である。

③を k で整理すると

$$2(x + 2) + k(y + 3) = 0$$

k についての恒等式とみると,

$$x + 2 = 0 \text{ かつ } y + 3 = 0 \quad \therefore x = -2, y = -3$$

よって, 直線 n 上にある k の値に依らない定点 P の座標は $\boxed{(-2, -3)}$ である。
(b)

(1) 直線 n が点 A を通るとき,

$$2 \times 4 + k \times 5 + (3k + 4) = 0 \quad \therefore k = \boxed{-\frac{3}{2}} \quad (c)$$

直線の法線ベクトルに注目して,

$$l \parallel n \iff 1 : (-2) = 2 : k \iff k = \boxed{-4} \quad (d)$$

$$m \parallel n \iff 2 : (-1) = 2 : k \iff k = \boxed{-1} \quad (e)$$

(2) 法線ベクトルの内積を考えて

$$l \perp n \iff 1 \times 2 - 2k = 0 \iff k = \boxed{1} \quad (f)$$

$k = 1$ のとき, 直線 n の方程式は

$$2x + y + 7 = 0 \quad \dots\dots ③'$$

①かつ③'を解くことにより, l と n の交点 B は $\boxed{(-4, 1)}$ である。
(g)

②かつ③'を解くことにより, m と n の交点 C は $(-1, -5)$ であるから, x 座標 (または y 座標) に注目して

$$BP : PC = \boxed{2 : 1} \quad (h)$$

直線 AP は三角形 ABC の面積を $(BP : PC =) 2 : 1$ に分けるから, P を通り三角形 ABC の面積を二等分する直線は辺 AB と交わる。その交点を Q とすると,

$$\frac{BQ}{BA} \cdot \frac{BP}{BC} = \frac{BQ}{BA} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

より

$$\frac{BQ}{BA} = \frac{3}{4} \quad \therefore BQ : QA = 3 : 1$$

分点公式より, 原点を O として

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OA}}{3 + 1} = \frac{1}{4}(-4, 1) + \frac{3}{4}(4, 5) = (2, 4)$$

2 点 P $(-2, -3)$, Q $(2, 4)$ を通る直線の方程式を求めて,

$$y = \frac{4 - (-3)}{2 - (-2)}(x - 2) + 4 \quad \therefore y = \boxed{\frac{7}{4}x + \frac{1}{2}} \quad (i)$$

10

- (1) 曲線 C は, 点 $A(a, 0)$ を中心として相似比 $\frac{1}{2}$ で円 S を相似変換した図形であるから, 中心 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, 半径 2 の円であり, 方程式は

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = 4 \quad (\text{答})$$

- (2) 円 C と円 S の共通接線の本数は

C と S が互いに外側にあるとき 4 本,

C と S が外接するとき 3 本,

C と S が 2 点で交わるとき 2 本,

C と S が内接するとき 1 本,

C と S の一方が他方の内側にあるとき 0 本

であるから, 共通接線がちょうど 2 本存在するのは 2 円が 2 点で交わるときであり,

$$4 - 2 < \frac{a}{2} < 4 + 2 \quad \therefore 4 < a < 12 \quad (\text{答})$$

- (3) (2)のもとで, 直線 $y = kx$ が円 C と接する条件は, 円 C の中心 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ から直線 $kx - y = 0$ までの距離が円 C の半径 2 と等しくなることであるから,

$$\frac{\left|k \cdot \frac{a}{2} - 0\right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$$

$$\frac{a}{2}|k| = 2\sqrt{k^2 + 1}$$

$$a^2 k^2 = 16(k^2 + 1)$$

$$(a^2 - 16)k^2 = 16 \quad \therefore k^2 = \frac{16}{a^2 - 16}$$

$k > 0$ より

$$k = \frac{4}{\sqrt{a^2 - 16}} \quad (\text{答})$$

11

(1) ℓ_1, ℓ_2 の法線ベクトル $\vec{\ell}_1 = (m, 1), \vec{\ell}_2 = (1, -m)$ の内積をとると

$$\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 = m \times 1 + 1 \times (-m) = 0$$

であるから, ℓ_1 と ℓ_2 は垂直である。

(証明おわり)

(2) ℓ_1 の方程式 $mx + y = m + 1$ を m についての恒等式とみると

$$x = 1 \text{ かつ } y = 1$$

であるから, 直線 ℓ_1 上にある k の値によらない点は

$$(1, 1) \text{ (答)}$$

(3) (2)と同様にして, ℓ_2 上の k によらない点を求めると

$$(-3, -2)$$

(1)より, ℓ_1 と ℓ_2 の交点は $(1, 1)$ と $(-3, -2)$ を直径の両端とする円

$$(x-1)(x+3) + (y-1)(y+2) = 0$$

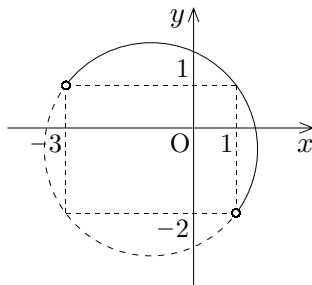
上にあるが, ℓ_1 の傾き $-m$ を負の範囲に限定すると, 交点は

$$(1, -2) \text{ と } (-3, 1) \text{ を結ぶ直線より上方 (点 } (1, 1) \text{ の側)}$$

を動く。以上より, ℓ_1 と ℓ_2 の交点の軌跡は

$$\text{円 } (x-1)(x+3) + (y-1)(y+2) = 0 \text{ 上の } y > -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \text{ の部分 (答)}$$

であり, 図示すると次図のようになる。



(答)

(注) (1), (2)をヒントにして, 図形的に考えると一見わかりやすく感じるが, 通らない点 $(1, -2)$ があるなど題意との必要十分条件を検証することがかえって難しくなってしまう。確実に正解するなら, 教科書通りに解く方が無難である。

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 & \dots\dots ① \\ x - my = 2m - 3 & \dots\dots ② \end{cases}$$

$x = 1$ のとき, ①より $y = 1$ であるが, ②より

$$1 - m = 2m - 3 \quad \therefore m = \frac{4}{3} > 0$$

となるから, 直線 $x = 1$ 上では点 $(1, 1)$ のみが題意の軌跡上の点である。

$x \neq 1$ のとき, ①より

$$m = \frac{-y + 1}{x - 1}$$

であり, $m > 0$ より

$$(-y+1)(x-1) > 0$$

$$\therefore (x-1)(y-1) < 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②に代入すると

$$x+3 = \frac{-y+1}{x-1}(y+2)$$

$$\therefore (x-1)(x+3) + (y-1)(y+2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

よって, 2 直線 ①, ② の交点の軌跡は,

点 $(1, 1)$ または「③ かつ ④」

12

$$x + 2y = 8 \quad \dots\dots ①$$

$$2x + y = 7 \quad \dots\dots ②$$

$$x - y = 5 \quad \dots\dots ③$$

境界線の交点を求めると

$$① \text{ かつ } ② \iff (x, y) = (2, 3)$$

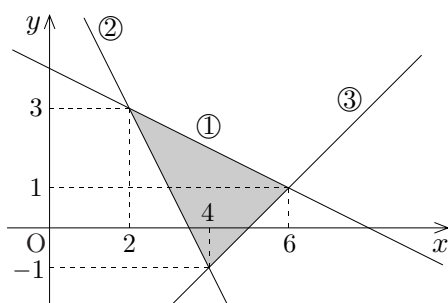
$$① \text{ かつ } ③ \iff (x, y) = (6, 1)$$

$$② \text{ かつ } ③ \iff (x, y) = (4, -1)$$

境界線に関して原点と同じ側か反対側かを考えて、

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 2x + y \geq 7 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$$

を図示すると、次図の網目部分(境界線上を含む)となる。



(1) $x + y = k$ とおくと、

$y = -x + k$ は傾き -1 , y 切片 k の直線

を表すから、領域と共有点をもつ条件を考えると、 k は

$$(x, y) = \left(\underset{\text{(ア)}}{\boxed{6}}, \underset{\text{(イ)}}{\boxed{1}} \right) \text{ で最大値 } \underset{\text{(ウ)}}{\boxed{7}},$$

$$(x, y) = \left(\underset{\text{(エ)}}{\boxed{4}}, \underset{\text{(オカ)}}{\boxed{-1}} \right) \text{ で最小値 } \underset{\text{(キ)}}{\boxed{3}}$$

をとる。

(2) $\frac{y}{x}$ は原点と領域内の点 (x, y) を結ぶ直線の傾きを表すから、

$$(x, y) = \left(\underset{\text{(ク)}}{\boxed{2}}, \underset{\text{(ケ)}}{\boxed{3}} \right) \text{ で最大値 } \underset{\text{(サ)}}{\overset{\text{(コ)}}{\boxed{\frac{3}{2}}}},$$

$$(x, y) = \left(\underset{\text{(シ)}}{\boxed{4}}, \underset{\text{(スセ)}}{\boxed{-1}} \right) \text{ で最小値 } \underset{\text{(チ)}}{\overset{\text{(ソタ)}}{\boxed{-\frac{1}{4}}}}$$

をとる。

- (3) $x^2 + y^2$ は原点と領域内の点 (x, y) との距離の平方を表す。原点を通り、直線 ② に垂直な直線の方程式は

$$x - 2y = 0 \quad \dots\dots ④$$

- ②かつ④を解くことにより、原点から直線②に下ろした垂線の足は

$$\left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

であり、 $2 < \frac{14}{5} < 4$, $-1 < \frac{7}{5} < 3$ を満たし、領域内の点であるから、 $x^2 + y^2$ は

$$(x, y) = \left(\overset{\text{(ツテ)}}{\frac{\boxed{14}}{\boxed{5}}}, \overset{\text{(ナ)}}{\frac{\boxed{7}}{\boxed{5}}} \right) \text{で最小値} \left(\frac{7}{5}\right)^2 \times (2^2 + 1^2) = \frac{\boxed{49}}{\boxed{5}} \overset{\text{(ヌネ)}}{\text{}} \overset{\text{(ノ)}}{\text{}}$$

をとる。

13

(1) 加法定理を用いて,

$$\begin{aligned}
 \cos 2A + \cos 2B &= \cos \{A + B + (A - B)\} + \cos \{A + B - (A - B)\} \\
 &= \{\cos(A + B) \cos(A - B) - \sin(A + B) \sin(A - B)\} \\
 &\quad + \{\cos(A + B) \cos(A - B) + \sin(A + B) \sin(A - B)\} \\
 &= 2 \cos(A + B) \cos(A - B) \quad (\text{証明おわり})
 \end{aligned}$$

(2) 2倍角の公式, $A + B + C = \pi$, および補角の公式より

$$\begin{aligned}
 1 + \cos 2C &= 2 \cos^2 C \\
 &= 2 \cos^2(\pi - A - B) \\
 &= 2 \cos^2(A + B)
 \end{aligned}$$

であるから, (1)とあわせて,

$$\begin{aligned}
 1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C &= 2 \cos^2(A + B) - 2 \cos(A + B) \cos(A - B) \\
 &= 2 \cos(A + B) \{\cos(A + B) - \cos(A - B)\} \\
 &= 2 \cos(\pi - C) \cdot (-2 \sin A \sin B) \\
 &= 2(-\cos C)(-2 \sin A \sin B) = 4 \sin A \sin B \cos C \quad (\text{証明おわり})
 \end{aligned}$$

(3) $A = B$ のとき $C = \pi - 2A$ であり, (2) より

$$\begin{aligned}
 1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C &= 4 \sin^2 A (-\cos 2A) \\
 &= 4 \sin^2 A (2 \sin^2 A - 1) \\
 &= 8 \left(\sin^4 A - \frac{1}{2} \sin^2 A \right) \\
 &= 8 \left(\sin^2 A - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

 $A = B > 0$, $C = \pi - 2A > 0$ より $0 < A < \frac{\pi}{2}$ であるから,

$$\sin^2 A = \frac{1}{4} \text{ すなわち } A = \frac{\pi}{6}$$

のとき

$$\text{最小値} - \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

をとる。

14

(1) 加法定理を用いて

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} \sin x - \cos x &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) \\
 &= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$

と変形できるから、例えば

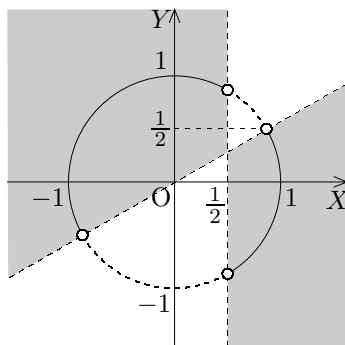
$$A = 2, \quad \theta = -\frac{\pi}{6} \quad (\text{答})$$

(2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ では $\cos x > 0$ であるから、題意の不等式は

$$\sqrt{3} \sin x + 2 \cos^2 x > \cos x (2\sqrt{3} \sin x + 1)$$

と同値である。これをさらに変形すると

$$\begin{aligned}
 2 \cos x (\cos x - \sqrt{3} \sin x) &> \cos x - \sqrt{3} \sin x \\
 (2 \cos x - 1)(\cos x - \sqrt{3} \sin x) &> 0
 \end{aligned}$$

XY 平面上に $(2X - 1)(X - \sqrt{3}Y) > 0$ を図示すると、次図の網目部分(境界線上は含まない)となる。単位円 $X^2 + Y^2 = 1$ 上 $X > 0$ の部分を読み取ることにより、

$$\sqrt{3} \tan x + 2 \cos x > 2\sqrt{3} \sin x + 1$$

を満たす x は、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲では

$$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \quad (\text{答})$$

15

$$(\cos x + 1)(\sin x + 1) = k \quad (0 \leq x < 2\pi) \quad \dots\dots ①$$

$\cos x + \sin x = t$ とおくと,

$$t = \cos x + \sin x \quad \dots\dots ②$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \dots\dots ③$$

であり, ②の両辺を平方すると

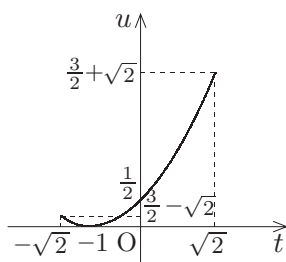
$$t^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos x \sin x = 1 + 2 \cos x \sin x$$

$$\therefore \cos x \sin x = \frac{t^2 - 1}{2} \quad \dots\dots ④$$

②, ④を①に代入すると

$$k = \frac{t^2 - 1}{2} + t + 1 = \frac{1}{2} t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (t + 1)^2$$

$u = \frac{1}{2} (t + 1)^2$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) のグラフの概形は



③より

$$\begin{cases} t < -\sqrt{2} \text{ または } t > \sqrt{2} \text{ のとき } x \text{ はない} \\ t = \pm\sqrt{2} \text{ のとき } t \text{ と } x \text{ は 1 対 1 に対応} \\ -\sqrt{2} < t < \sqrt{2} \text{ のとき } t \text{ に対して 2 つの } x \text{ が対応} \end{cases}$$

となるから, 方程式①の解がちょうど 2 個になるのは, $u = \frac{1}{2} (t + 1)^2$ のグラフと直線

$u = k$ の共有点が $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ の範囲にちょうど 1 個となる (または $t = \sqrt{2}$ と $t = -\sqrt{2}$ で交わる) 場合であり, 求める k は

$$k = 0 \text{ または } \frac{3}{2} - \sqrt{2} < k < \frac{3}{2} + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

である。

16

(1) $\cos 4\alpha = \cos \alpha$ より

$$4\alpha = \pm\alpha + 2n\pi \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}n\pi \text{ または } \frac{2}{5}n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\alpha = \frac{2}{5}\pi \quad (\text{答})$$

 $5\alpha = 2\pi$ であるから, 基本周期が 2π であることと負角の公式を用いて

$$\cos 2\alpha = \cos(2\pi - 3\alpha) = \cos(-3\alpha) = \cos 3\alpha \quad (\text{証明おわり})$$

(2) $\cos \alpha = x$, $\cos 2\alpha = y$ とするとき, 2倍角の公式と $\cos 4\alpha = \cos \alpha$ より

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 2\alpha) \\ &= -\frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos 2\alpha) \\ &= -\frac{1}{2}(x - y) \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$x - y = \cos \frac{2}{5}\pi - \cos \frac{4}{5}\pi \neq 0$$

に注意して両辺を $x - y$ で割ると,

$$x + y = -\frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(3) (2)の結果と 2倍角の公式より

$$\cos \alpha + (2\cos^2 \alpha - 1) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \alpha + \frac{1}{2}\cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\left(\cos \alpha + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

$$\cos \alpha + \frac{1}{4} = \cos \frac{2}{5}\pi + \frac{1}{4} > 0 \text{ より}$$

$$\cos \alpha + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad (\text{答})$$

(注) $\cos \alpha = \cos \frac{2}{5}\pi$ を求めるには, $\cos 4\alpha = \cos \alpha$ または (1) の $\cos 2\alpha = \cos 3\alpha$ より $\cos \alpha$ について的高次方程式を導くのが一般解法であるが, 本問では (2) により簡易化されているところが面白い。それでも, 一般解法で本問を解くのも決して悪くない。

〔別法 1〕2 倍角の公式より

$$\begin{aligned}
 \cos 4\alpha &= 2\cos^2 2\alpha - 1 \\
 &= 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 \\
 &= 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1
 \end{aligned}$$

 $\cos 4\alpha = \cos \alpha$ より

$$\begin{aligned}
 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha - \cos \alpha + 1 &= 0 \\
 (\cos \alpha - 1)\{8\cos^2 \alpha(\cos \alpha + 1) - 1\} &= 0 \\
 (\cos \alpha - 1)(8\cos^3 \alpha + 8\cos^2 \alpha - 1) &= 0 \\
 (\cos \alpha - 1)(2\cos \alpha + 1)(4\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \cos \frac{2}{5}\pi \neq 1, -\frac{1}{2} \text{ より}$$

$$4\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1 = 0$$

以下, 上の (3) の解答と同じ。

〔別法 2〕2 倍角の公式, 3 倍角の公式より

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

であるから, $\cos 2\alpha = \cos 3\alpha$ より

$$\begin{aligned}
 4\cos^3 \alpha - 2\cos^2 \alpha - 3\cos \alpha + 1 &= 0 \\
 (\cos \alpha - 1)(4\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \cos \frac{2}{5}\pi \neq 1 \text{ より}$$

$$4\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1 = 0$$

以下, 上の (3) の解答と同じ。

別法 1 では, 方程式 $\cos 4x = \cos x$ は $x = 0, \frac{2}{3}\pi$ を解に持つから, $\cos \alpha - 1$ および $2\cos \alpha - 1$ を因数に持つことが初めからわかっており, 別法 2 では, 方程式 $\cos 2\alpha = \cos 3\alpha$ が $x = 0$ を解に持つから, 初めから $\cos \alpha - 1$ を因数に持つことがわかっていて, これらをヒントにして, 因数定理と結びつけることがポイントである。ヒントを無視しても因数を見つけることはできるが, 少し時間がかかってしまう。

17

(1) $f(x) = 2(x^3 - 3x^2 + 2x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(3x^2 - 6x + 2) \\ &= 2\{3(x-1)^2 - 1\} \\ &= 6\left(x-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

となるから, その符号変化から $f(x)$ の増減を調べると

x	$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$		$1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	↗	極大	↘	極小

$f(x) = 2\left\{\left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)(x-1) - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{3}f'(x)(x-1) - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ であることを考えて,

$$f\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{3}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{4}{3} = \mp \frac{4}{3\sqrt{3}} \quad (\text{複号同順})$$

と計算されるから,

$$\text{極大値 } f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}, \quad \text{極小値 } f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$

(2) $x = t$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2(3t^2 - 6t + 2)(x - t) + 2(t^3 - 3t^2 + 2t) \\ \therefore y &= 2(3t^2 - 6t + 2)x - 4t^3 + 6t^2 \end{aligned}$$

この接線が点 $(0, m)$ を通るとすれば,

$$m = 2(3t^2 - 6t + 2) \cdot 0 - 4t^3 + 6t^2 = -4t^3 + 6t^2$$

$g(t) = -4t^3 + 6t^2$ とおくと,

$$g'(t) = -12t^2 + 12t = -12t(t-1)$$

t	0	1
$g'(t)$	-	+
$g(t)$	↘ 極小 0	↗ 極大 2

tu 平面上で $u = g(t)$ のグラフと直線 $u = m$ の共有点の個数が題意の接線の本数であると考えられるから,

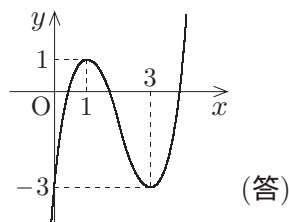
$$\begin{cases} m < 0 \text{ または } m > 2 \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \\ m = 0 \text{ または } m = 2 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \\ 0 < m < 2 \text{ のとき} & 3 \text{ 本} \end{cases} \quad (\text{答})$$

18

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

x	1		3	
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	↗	極大	↘	極小

 $f(x)$ の極値は極大値 $f(1) = 1$, 極小値 $f(3) = -3$ (答) $y = f(x)$ のグラフの概形は(2) (1)のグラフより, $x \geq t$ における $f(x)$ の最小値は

$$t \leq 0 \text{ または } t \geq 3 \text{ のとき } f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 3$$

$$0 \leq t \leq 3 \text{ のとき } f(3) = -3$$

であり,

$$m(t) = \begin{cases} t^3 - 6t^2 + 9t - 3 & (t \leq 0 \text{ または } t \geq 3 \text{ のとき}) \\ -3 & (0 \leq t \leq 3 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(3) $m(t) \geq t - 3$ を計算すると(i) $t \leq 0$ または $t \geq 3$ のとき

$$f(t) - (t - 3) = t^3 - 6t^2 + 8t = t(t-2)(t-4) \geq 0$$

$$\text{「} t \leq 0 \text{ または } t \geq 3 \text{」かつ「} 0 \leq t \leq 2 \text{ または } t \geq 4 \text{」}$$

$$\therefore t = 0 \text{ または } t \geq 4$$

(ii) $0 \leq t \leq 3$ のとき

$$t - 3 - f(3) = t \leq 0$$

$$0 \leq t \leq 3 \text{ かつ } t \leq 0 \quad \therefore t = 0$$

(i), (ii) より, $m(t) \geq t - 3$ を満たす t は

$$t = 0 \text{ または } t \geq 4 \quad (\text{答})$$

19

(1) $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $g(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ であるから ,

$$A = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \left\{12\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right\} dx = 0 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = 4 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= 4 \times 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= 8 \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{8}{3} \left(0 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 \{g(x)\}^2 dx = \int_0^1 \left\{36\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{36\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\} dx \\ &= 2 \left[\frac{36}{5} \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{72}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{9 - 10 + 5}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $F(x) = sf(x) + tg(x)$ より

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \{F(x)\}^2 dx = \int_0^1 \{s^2 f(x)^2 + 2stf(x)g(x) + t^2 g(x)^2\} dx \\ &= s^2 B + 2stA + t^2 C \\ &= \frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{5}t^2 \end{aligned}$$

$G(x) = tf(x) + sg(x)$ より

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 F(x)G(x)dx = \int_0^1 \{stf(x)^2 + (s^2 + t^2)f(x)g(x) + stg(x)^2\} dx \\ &= A(s^2 + t^2) + (B + C)st \\ &= 0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)st \\ &= \frac{8}{15}st \end{aligned}$$

$J = 1$ より

$$\frac{s}{\sqrt{3}} = \cos \theta, \quad \frac{t}{\sqrt{5}} = \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおくことができ、

$$K = \frac{8}{\sqrt{15}} \cos \theta \sin \theta = \frac{4}{\sqrt{15}} \sin 2\theta$$

であるから,

$$K \text{ の最大値は } \frac{4}{\sqrt{15}}, \text{ 最小値は } -\frac{4}{\sqrt{15}} \quad (\text{答})$$

である。

20

$$(1) \int_0^x (3t^2 - 2t - 2)dt = x^3 - x^2 - 2x \quad (\text{答})$$

(2)

$$I = \int_0^1 f(t)dt \quad \dots\dots ①$$

とおくとき,

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 2 + 2I \quad \dots\dots ②$$

①に②を代入して,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (3t^2 - 2t - 2 + 2I)dt \\ &= 1^3 - 1^2 - 2 \cdot 1 + 2I \quad \therefore I = 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

②に代入して

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 2 \quad (\text{答})$$

(3)

$$J = \int_0^1 |g(t)|dt \quad \dots\dots ③$$

とおくと,

$$g(x) = x - J \quad \dots\dots ④$$

③に④を代入して

$$J = \int_0^1 |t - J|dt$$

③より $J \geq 0$ であることを考えて,(i) $0 \leq J \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} J &= \int_0^J (J - t)dt + \int_J^1 (t - J)dt \\ &= \left[Jt - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^J + \left[\frac{1}{2}t^2 - Jt \right]_J^1 \\ &= 2\left(J^2 - \frac{1}{2}J^2 \right) + \frac{1}{2} - J \\ J^2 - 2J + \frac{1}{2} &= 0 \\ (J - 1)^2 &= \frac{1}{2} \\ J - 1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore J = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(ii) $J \geq 1$ のとき

$$J = \int_0^1 (J - t)dt = J - \frac{1}{2}$$

は成り立たないから不適である。

(i), (ii)の結果を④に代入して、求める関数は

$$g(x) = x - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$

(4) (2), (3)より

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x (3t^2 - 2t + 2)dt - 2\left(x - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= x^3 - x^2 + 2 - \sqrt{2} \\ h'(x) &= 3x^2 - 2x = 3x\left(x - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$ において $h(x)$ の増減は

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$h'(x)$	0	-	0
$h(x)$		\searrow 極小 \nearrow	

$$h(0) = h(1) = 2 - \sqrt{2}$$

$$h\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3} - 1\right) + 2 - \sqrt{2} = \frac{50}{27} - \sqrt{2}$$

$0 \leq x \leq 1$ において、 $h(x)$ は

$$\text{最大値 } h(0) = h(1) = 2 - \sqrt{2}, \quad \text{最小値 } h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27} - \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

をとる。

- [21] $x^2 - 9 = a$ となる x を求めると $x = \pm\sqrt{9+a}$
 $-x^2 + 9 = a$ となる x を求めると $x = \pm\sqrt{9-a}$
 C と ℓ で囲まれる図形のうち $y \geq a$ にある部分の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\sqrt{9-a}}^{\sqrt{9-a}} (-x^2 + 9 - a) dx \\ &= - \int_{-\sqrt{9-a}}^{\sqrt{9-a}} (x + \sqrt{9-a})(x - \sqrt{9-a}) dx \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{9-a} + \sqrt{9-a})^3 \\ &= \frac{4}{3}(9-a)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

C と ℓ で囲まれる図形のうち $y \leq a$ にある部分の面積を S_2 とすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_2 &= a(\sqrt{9+a} - \sqrt{9-a}) - \int_{\sqrt{9-a}}^3 (-x^2 + 9) dx - \int_3^{\sqrt{9+a}} (x^2 - 9) dx \\ &= a(\sqrt{9+a} - \sqrt{9-a}) + \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_{\sqrt{9-a}}^3 - \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_3^{\sqrt{9+a}} \\ &= a(\sqrt{9+a} - \sqrt{9-a}) + 9 - 27 - \frac{1}{3}(9-a)^{\frac{3}{2}} + 9\sqrt{9-a} \\ &\quad - \frac{1}{3}(9+a)^{\frac{3}{2}} + 9\sqrt{9+a} + 9 - 27 \\ &= \frac{2}{3}(9+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(9-a)^{\frac{3}{2}} - 36 \end{aligned}$$

$S_1 = S_2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(9+a)^{\frac{3}{2}} - 72 &= 0 \\ (9+a)^{\frac{3}{2}} &= 54 \\ 9+a &= 54^{\frac{2}{3}} = 9\sqrt[3]{4} \quad \therefore a = 9(\sqrt[3]{4} - 1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(別法 1) S_2 の計算の部分は, 次のようにすれば $\frac{1}{6}$ 公式だけで済ませることができる。

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\sqrt{9+a}}^{\sqrt{9+a}} \{a - (x^2 - 9)\} dx - 2 \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx + S_1 \\ &= - \int_{-\sqrt{9+a}}^{\sqrt{9+a}} (x + \sqrt{9+a})(x - \sqrt{9+a}) dx \\ &\quad + 2 \int_{-3}^3 (x+3)(x-3) dx + S_1 \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{9+a} + \sqrt{9+a})^3 + 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times (3+3)^3 + S_1 \\ &= \frac{4}{3}(9+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}(9-a)^{\frac{3}{2}} - 36 \end{aligned}$$

(別法 2) 実は y で積分する方が労力が少ない。 $x \geq 0$ において

$$y = -x^2 + 9 \iff x = \sqrt{9-y}$$

$$y = x^2 - 9 \iff x = \sqrt{9+y}$$

であるから,

$$\frac{1}{2}S_1 = \int_a^9 (9-y)^{\frac{1}{2}} dy = \left[-\frac{2}{3}(9-y)^{\frac{3}{2}} \right]_a^9 = \frac{2}{3}(9-a)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{2}S_2 = \int_0^a \left\{ (9+y)^{\frac{1}{2}} - (9-y)^{\frac{1}{2}} \right\} dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}(9+y)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(9-y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a$$

$$= \frac{2}{3}(9+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(9-a)^{\frac{3}{2}} - 36$$

$S_1 = S_2$ のとき

$$\frac{2}{3}(9+a)^{\frac{3}{2}} - 36 = 0$$

$$(9+a)^{\frac{3}{2}} = 54$$

$$9+a = 54^{\frac{2}{3}} = 9\sqrt[3]{4} \quad \therefore a = 9(\sqrt[3]{4} - 1) \quad (\text{答})$$

22

(1)

$$f(x) = x(|x| - 3) = \begin{cases} x(-x - 3) = -x^2 - 3x & (x \leq 0) \\ x(x - 3) = x^2 - 3x & (x \geq 0) \end{cases}$$

とくと, $x < 0$ において

$$f'(x) = -2x - 3$$

 $f'(-1) = -1$, $f(-1) = 2$ であるから, 接線 ℓ の方程式は

$$y = -(x + 1) + 2 \quad \therefore y = -x + 1$$

 ℓ は $x = a$ ($a > 0$) において C と交わるから,

$$a^2 - 3a = -a + 1$$

$$a^2 - 2a - 1 = 0 \quad \therefore a = 1 \pm \sqrt{2}$$

 $a > 0$ より

$$a = 1 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

(2) ℓ と C で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{-x + 1 - (-x^2 - 3x)\} dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} \{-x + 1 - (x^2 - 3x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x + 1)^2 dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} \{-(x - 1)^2 + 2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}(x - 1)^3 + 2x \right]_0^{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} - 0 - \frac{1}{3} \{2\sqrt{2} - (-1)\} + 2(1 + \sqrt{2}) \\ &= \frac{6 + 4\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

23

(1) $f(x) = -x^3 + x^2$ とおくと

$$f'(x) = -3x^2 + 2x = -3x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

x	0	$\frac{2}{3}$
$f'(x)$	- 0 + 0 -	
$f(x)$	\searrow 0 \nearrow 極大 \searrow	

直線 $y = a$ は曲線 $C: y = f(x)$ とちょうど 2 つの共有点をもち, $a \neq 0$ であるから

$$a = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{4}{27} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad a - f(x) = x^3 - x^2 + \frac{4}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

であるから, C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \{a - f(x)\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{2}{3} + 1\right) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left\{ \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 + \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(x - \frac{2}{3}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{3}(-1)^3 \\ &= \frac{1}{12} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

24

- (1) BC を中点を M とすると
- $AG : GM = 2 : 1$
- であるから ,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} &= -2\overrightarrow{GM} = -2 \cdot \frac{\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}{2} = -(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ \therefore \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \vec{0} \quad (\text{証明おわり})\end{aligned}$$

(注) 重心の公式より

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG} = \vec{0}$$

が直ちに得られるから , 公式を導く過程が解決のヒントになる。

- (2) 平面上の任意の点 P に対して , ベクトルの演算法則と (1) より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 &= |\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{PG}|^2 + 2\overrightarrow{PG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{PG}|^2 + 2\overrightarrow{PG} \cdot \vec{0} + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{PG}|^2 + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 \quad (\text{証明おわり})\end{aligned}$$

- (3) (2) と同様にして

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 &= |\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}|^2 \\ &= 2|\overrightarrow{GA}|^2 + 2|\overrightarrow{GB}|^2 + 2|\overrightarrow{GC}|^2 - (2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) \\ &= 3|\overrightarrow{GA}|^2 + 3|\overrightarrow{GB}|^2 + 3|\overrightarrow{GC}|^2 - (|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 \\ &\quad + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) \\ &= 3|\overrightarrow{GA}|^2 + 3|\overrightarrow{GB}|^2 + 3|\overrightarrow{GC}|^2 - |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{GA}|^2 + 3|\overrightarrow{GB}|^2 + 3|\overrightarrow{GC}|^2 \\ \therefore |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 &= \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{3} \quad (\text{証明おわり})\end{aligned}$$

- (4) 三角形 ABC の外心を O とする。(2) の等式は
- $P = O$
- としても成り立つから ,

$$\begin{aligned}R^2 &= \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2}{3} \\ &= |\overrightarrow{OG}|^2 + \frac{|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2}{3} \\ &= |\overrightarrow{OG}|^2 + \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{9} \quad (\because (3) \text{より}) \\ &\geq \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{9} \quad (\text{証明おわり})\end{aligned}$$

25

(1) 点 P は AB を $s : (s-1)$ に外分するから

$$\overrightarrow{AP} = s \overrightarrow{AB} \quad (\text{答})$$

点 Q は AC を $t : (1-t)$ に内分するから

$$\overrightarrow{AQ} = t \overrightarrow{AC} \quad (\text{答})$$

(2) メネラウスの定理より

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$$

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{1-t}{t} \cdot \frac{s}{s-1} = 1$$

$$\therefore \frac{BX}{XC} = \frac{t(s-1)}{s(1-t)}$$

 $t(s-1) + s(1-t) = s-t$ であるから, 分点公式より

$$\overrightarrow{AX} = \frac{s(1-t)}{s-t} \overrightarrow{AB} + \frac{t(s-1)}{s-t} \overrightarrow{AC} \quad (\text{答})$$

(3)(i) $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, $BC = 2$ より

$$\angle ABC = 60^\circ \quad \therefore \angle PBC = 120^\circ$$

P, B, Q, C は同一円周上にあるから,

$$\angle PQC = \angle PBC = 120^\circ$$

であり, これは $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = s \overrightarrow{AB} - t \overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{QC} = (1-t) \overrightarrow{AC}$ のなす角である。 $|\overrightarrow{AB}| = 1$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ より

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QC} = s(1-t) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - t(1-t) |\overrightarrow{AC}|^2 = -3t(1-t)$$

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = s^2 |\overrightarrow{AB}|^2 + t^2 |\overrightarrow{AC}|^2 = s^2 + 3t^2$$

$$|\overrightarrow{QC}| = (1-t) |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}(1-t)$$

であるから,

$$\cos 120^\circ = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QC}}{|\overrightarrow{QP}| |\overrightarrow{QC}|} = \frac{-3t(1-t)}{\sqrt{s^2 + 3t^2} \sqrt{3}(1-t)} = \frac{-\sqrt{3}t}{\sqrt{s^2 + 3t^2}}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3t^2}{s^2 + 3t^2}$$

$$s^2 + 3t^2 = 12t^2 \quad \therefore s^2 = 9t^2$$

 $s > 0$, $t > 0$ より

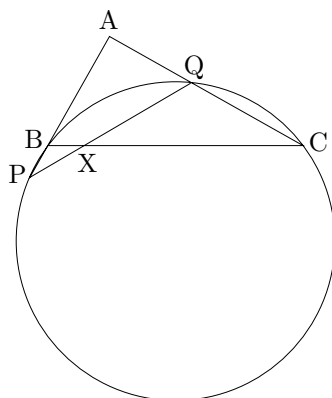
$$s = 3t \quad (\text{答})$$

 $s = 3t > 1$ かつ $0 < t < 1$ より, t のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{3} < t < 1 \quad (\text{答})$$

(3)(ii) (2)および(3)(i)より

$$\overrightarrow{AX} = \frac{3t(1-t)}{2t} \overrightarrow{AB} + \frac{t(3t-1)}{2t} \overrightarrow{AC}$$



$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AX}|^2 &= \frac{9(1-t)^2}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{(3t-1)^2}{4} |\overrightarrow{AC}|^2 \\
&= \frac{9(1-t)^2 \times 1 + (3t-1)^2 \times 3}{4} \\
&= 9t^2 - 9t + 3 \\
&= 9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$f(t) = 9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ とおくと,}$$

$$|\overrightarrow{AX}| = \sqrt{f(t)}$$

$\frac{1}{3} < t < 1$ より, $f(t)$ のとり得る値の範囲は

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(t) < f(1)$$

であるから,

$$\frac{3}{4} \leq f(t) < 3$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \leq |\overrightarrow{AX}| < \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

26

$$(1) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (4, 2, 2) - (3, 1, 3) = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{AC} &= (4, 0, 1) - (3, 1, 3) = (1, -1, -2) \end{aligned}$$

であるから, 求める内積は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} &= 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 3 \quad (\text{答}) \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} &= 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 6 \quad (\text{答}) \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 1 \times 1 + 1 \times (-1) - 1 \times (-2) = 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) Q は平面 H 上の点であるから

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数}) \quad \dots\dots ①$$

と表され, \overrightarrow{OQ} は平面 H と垂直であるから

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$$

であり,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 1 + 3\alpha + 2\beta = 0 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -4 + 2\alpha + 6\beta = 0 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

②かつ③を連立方程式として解くと

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1$$

①に代入して

$$\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad (\text{答})$$

(3) 領域 K 上の点 P に対して, 線分 QP 上の点 R は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= (1-k)\overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{AP} \quad (0 \leq k \leq 1) \\ &= (1-k)(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + k(s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}) \quad (s \geq 0, t \geq 0) \\ &= (ks + k - 1)\overrightarrow{AB} + (kt - k + 1)\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

と表され,

$$ks + k - 1 = 0$$

のとき,

$$k = \frac{1}{s+1}, \quad kt - k + 1 = \frac{t-1}{s+1} + 1 = \frac{s+t}{s+1}$$

 $s \geq 0$ より $0 < \frac{1}{s+1} \leq 1$ であるから, このような実数 k は存在し,

$$r = \frac{s+t}{s+1}$$

とおくと, $s \geq 0, t \geq 0$ より $r \geq 0$ であり,

$$\overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC}$$

を満たす点 R が線分 QP 上に存在する。

(証明おわり)

- (4) 原点 O から平面 H に下ろした垂線の足 Q は, (2) より領域 K の外部にあるから, 領域 K において原点 O から最も近い点 S は, 平面 H 上で点 Q から最も近い領域 K 内の点である。(3) より, 領域 K 内の任意の点 P に対して線分 QP は半直線 AC と点 R で交わるから, QR が最小となる点 R が点 S である。

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AQ} = r\overrightarrow{AC} - (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + (r-1)\overrightarrow{AC}$$

が半直線 AC と垂直であるとき $S = R$ となるから,

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (r-1)\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

となる r の値を求めて,

$$2 + 6(r-1) = 0 \quad \therefore r = \frac{2}{3} \quad (r \geq 0 \text{ を満たす})$$

よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = (3, 1, 3) + \frac{2}{3}(1, -1, -2) \\ &= \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

求める座標は

$$S\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \quad (\text{答})$$

(注) 大学入試の答案においては

$$\overrightarrow{OS} = \cdots = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \quad (\text{答})$$

と書いても減点されないと思われるが, そもそもベクトルの成分と点の座標とは異なる概念なので, 上の解答では無難な表現にしておいた。

27

〔 1 〕 球面 S の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots\dots ①$$

直線 ℓ のベクトル方程式は

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= t(2, 3, 4) + (1-t)(-3, -2, -6) \quad (t \text{ は実数}) \\ &= (5t-3, 5t-2, 10t-6) \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

②を①に代入して

$$\begin{aligned} (5t-3)^2 + (5t-2)^2 + (10t-6)^2 &= 1 \\ 150t^2 - 170t + 48 &= 0 \\ 75t^2 - 85t + 24 &= 0 \\ (5t-3)(15t-8) &= 0 \quad \therefore t = \frac{3}{5}, \frac{8}{15} \end{aligned}$$

 $x_B > x_C$ であることを考えて, ①より

$$B(0, 1, 0), C\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad (\text{答})$$

$$〔 2 〕 \quad \overrightarrow{BA} = (1, 0, 0) - (0, 1, 0) = (1, -1, 0),$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (0, 1, 0) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

の内積をとると,

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

となるから,

$$\angle ABC = 90^\circ \quad (\text{答})$$

〔 3 〕(1) $\angle ABC = 90^\circ$ より, $\triangle ABC$ の外接円 K は AC を直径とする円である。円 K の中心 P は AC の中点であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(1, 0, 0) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1, 0, 0) = \frac{1}{3}(-2, 1, -1)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{3}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

円 K の

$$\text{中心は } P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \text{ 半径は } r = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\text{答})$$

(2) 3点 A, B, C は球面 S 上にあるから, 円 K は球面 S と平面 α の交線である。よって, 円 K の中心 P を通り, 平面 α に垂直な直線 M は球面 S の中心 O を通るから, m 上の点 Q は

$$\overrightarrow{OQ} = 2k\overrightarrow{OP} = (k, k, -k) \quad (k \text{ は実数})$$

と表される。①に代入すると

$$k^2 + k^2 + (-k)^2 = 1 \quad \therefore k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より}$$

$$Q\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{3}, \frac{-\sqrt{3}-1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)$$

PQ の長さ h は

$$h = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$\triangle ABC$ の面積 M は

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \times \frac{1}{3} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

四面体 $ABCQ$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} M h = \frac{1+\sqrt{3}}{9} \quad (\text{答})$$

28

- (1) 点 (m, n) につけた番号は、直線 $x + y = m + n$ 上にあるものの中で n 番目であり、直線 $x + y = m + n$ 上には $m + n - 1$ 個の点があるから、

$$\begin{aligned} f(m, n+1) &= f(m, n) + (m-1) + (n+1) \\ &= f(m, n) + m + n \\ f(m+1, n+1) &= f(m, n+1) + (m-1) + (n+1) \\ &= f(m, n+1) + m + n \end{aligned}$$

であるから、等差数列の関係式より

$$2f(m, n+1) = f(m, n) + f(m+1, n+1)$$

(証明おわり)

- (2) $f(m+1, n) + 1 = f(m, n+1)$

であるから、(1) より

$$\begin{aligned} f(m, n) + f(m+1, n) + f(m, n+1) + f(m+1, n+1) \\ = 4f(m, n+1) - 1 = 2023 \\ \therefore f(m, n+1) = 506 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 31 \cdot 32 = 496, \quad \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 33 = 528 \text{ より}$$

$$\sum_{k=1}^{31} k < 506 \leq \sum_{k=1}^{32} k$$

であるから、

$$m + n = 32 \text{ かつ } n + 1 = 506 - 496$$

$$\therefore (m, n) = (23, 9) \quad (\text{答})$$

29

(1) 反復試行の確率の考え方から

$$\alpha_n = {}_{10}C_n \cdot p^n (1-p)^{10-n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 9, 10)$$

 $0 \leq n \leq 9$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \frac{{}_{10}C_{n+1}}{{}_{10}C_n} \cdot \frac{p}{1-p} \\ &= \frac{n!(10-n)!}{(n+1)!(9-n)!} \cdot \frac{p}{1-p} \\ &= \frac{10-n}{n+1} \cdot \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

であるから, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq 1$ となるのは

$$\begin{aligned} (10-n)p &\geq (n+1)(1-p) \\ 11p &\geq n+1 \quad \therefore p \geq \frac{n+1}{11} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) α_7 が最大となるためには,

$$\frac{\alpha_7}{\alpha_6} \geq 1 \text{ かつ } \frac{\alpha_8}{\alpha_7} \leq 1 \text{ が必要}$$

であり, (1) より

$$p \geq \frac{6+1}{11} \text{ かつ } p \leq \frac{7+1}{11} \quad \therefore \frac{7}{11} \leq p \leq \frac{8}{11}$$

逆に, $p \geq \frac{7}{11}$ のとき $p \geq \frac{n+1}{11} \left(\Leftrightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq 1 \right)$ が $n = 6, 5, \dots, 2, 1$ で成り立つから,

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_6 \leq \alpha_7$$

となり, $p \leq \frac{8}{11}$ のとき $p \leq \frac{n+1}{11} \left(\Leftrightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq 1 \right)$ が $n \geq 7$ で成り立つから,

$$\alpha_7 \geq \alpha_8 \geq \alpha_9 \geq \dots$$

となるから, α_7 は最大となる(ために十分である)。以上より, α_7 が最大となるための必要十分条件は

$$\frac{7}{11} \leq p \leq \frac{8}{11} \quad (\text{答})$$

30

(1) 3 と 2^n (n は自然数) は互いに素であることに注意すると

$$\begin{aligned}
a_3 = \frac{3a_2 + 1}{2} \text{ が奇数} &\iff 3a_2 + 1 \equiv 2 \pmod{4} \\
&\iff 3a_2 \equiv -3 \pmod{2^2} \\
&\iff \frac{3a_1 + 1}{2} = a_2 \equiv -1 \pmod{2^2} \\
&\iff 3a_1 + 1 \equiv -2 \pmod{2^3} \\
&\iff 3a_1 \equiv -3 \pmod{2^3} \\
&\iff a_1 \equiv -1 \pmod{2^3} \\
&\vdots \\
&\iff a_0 \equiv -1 \pmod{2^4}
\end{aligned}$$

このような自然数 a_0 の中で最小のものは

$$a_0 = 2^4 - 1 = 15 \quad (\text{答})$$

(2) (1) と同様にして,

$$\begin{aligned}
a_{10} \text{ が奇数} &\iff a_{10} = \frac{3a_9 + 1}{2} \equiv -1 \pmod{2} \\
&\iff 3a_9 + 1 \equiv -2 \pmod{2^2} \\
&\iff 3a_9 \equiv -3 \pmod{2^2} \\
&\iff a_9 \equiv -1 \pmod{2^2} \\
&\iff a_8 \equiv -1 \pmod{2^3} \\
&\vdots \\
&\iff a_0 \equiv -1 \pmod{2^{11}}
\end{aligned}$$

このような自然数 a_0 の中で最小のものは

$$2^{11} - 1 = 2047 \quad (\text{答})$$

(注) 上の解答は (おそらくは出題者が想定したであろう) 発見的考察により解いているが, 必要条件のもとで漸化式を解くという方針も考えられる。

 a_0, a_1, \dots, a_n がすべて正の奇数であるとき, 漸化式

$$a_{k+1} = \frac{3a_k + 1}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

が成り立つから,

$$a_{k+1} + 1 = \frac{3}{2}(a_k + 1)$$

 $\{a_k + 1\}$ は初項 $a_0 + 1$, 公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列であるから,

$$a_k + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^k (a_0 + 1) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

 a_0, a_1, \dots, a_n がすべて奇数となるのは

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k (a_0 + 1) \text{ がすべて偶数} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

のときであり ,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k (a_0 + 1) = 2b_k \quad (b_k \text{ は自然数})$$

と表され ,

$$3^k (a_0 + 1) = 2^{k+1} b_k \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$$

3^k と 2^{k+1} は互いに素であるから ,

$$a_0 + 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$$

これが $k = 0, 1, \dots, n$ すべてで成り立つから ,

$$a_0 + 1 \equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$$

31

(1) W と K が 3 回試合を行うとき, W が連敗しないのは「2 回目に W が勝つ」または「2 回目だけ W が負ける」

場合であるから,

$$p_3 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8} \quad (\text{答})$$

(2) W と K が $n+2$ 回試合を行うとき, W が連敗しないのは

- 1 回目に W が勝ち, 2 回目以降 $n+1$ 回は W が連敗しない
- 1 回目に W が負け, 2 回目に W が勝ち, 3 回目以降 W が連敗しない

のいずれかであるから,

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n \quad (\text{答})$$

(3) $p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$ と $p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$ のいずれの場合も

$$p_{n+2} = (\alpha + \beta)p_{n+1} - \alpha\beta p_n$$

(2) で得られた漸化式と比べて

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

解と係数の関係より, α, β を 2 解とする 2 次方程式は

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

であり, これを解くと

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

 $\alpha < \beta$ より

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad (\text{答})$$

(4) $\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4} = 0$ が成り立つことより

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{8}$$

であることに注意すると, 数列 $\{p_{n+1} - \beta p_n\}$ は初項

$$\begin{aligned} p_2 - \beta p_1 &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \beta \cdot 1 = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \\ &= \alpha + \frac{1}{4} \\ &= 2\alpha^3, \end{aligned}$$

公比 α の等比数列であるから ,

$$p_{n+1} - \beta p_n = 2\alpha^2 \cdot \alpha^{n-1} = 2\alpha^{n+2} \quad \dots\dots ①$$

同様に ,

$$p_{n+1} - \alpha p_n = 2\beta^3 \cdot \beta^{n-1} = 2\beta^{n+2} \quad \dots\dots ②$$

も成り立つから , ② - ① より

$$(\beta - \alpha)p_n = 2(\beta^{n+2} - \alpha^{n+2})$$

$$\therefore p_n = \frac{4}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n+2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^{n+2} \right\} \quad (\text{答})$$

(注) p_n の表現は他にも多数ある。例えば ,

$$p_2 - \beta p_1 = \frac{3}{4} - \beta = \frac{2 - \sqrt{5}}{4}$$

とすると , ①は

$$p_{n+1} - \beta p_n = \frac{2 - \sqrt{5}}{4} \alpha^{n-1}$$

と表され , 同様に ②は

$$p_{n+1} - \alpha p_n = \frac{2 + \sqrt{5}}{4} \beta^{n-1}$$

と表されるから , ② - ① より

$$p_n = \frac{2 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1} - \frac{2 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1}$$

これもまた正解である。

$$\boxed{32} \quad S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+3)a_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) ①は $n=0$ のときも成り立つから

$$S_0 = 0 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} \quad \begin{matrix} (22) \\ (23) \end{matrix}$$

$a_n = S_n - S_{n-1} \ (n \geq 1)$ より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+3)a_{n+1} - \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+2)a_n \right\} \\ &= \frac{n+2}{2}a_n - \frac{n+3}{2}a_{n+1} \\ \therefore (n + \boxed{3})a_{n+1} &= (n + \boxed{0})a_n \end{aligned} \quad \begin{matrix} (24) \\ (25) \end{matrix} \quad (*)$$

$b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ と定めると

$$b_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_1 = \boxed{1} \quad (26)$$

であり, (*)より

$$(n+3) \cdot \frac{b_{n+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)} = n \cdot \frac{b_n}{n(n+1)(n+2)}$$

であるから,

$$b_{n+1} = \boxed{1} b_n \quad (27)$$

が成り立つ。ゆえに, すべての自然数 n に対して

$$b_n = b_1 = 1$$

であり,

$$a_n = \frac{\boxed{1}}{n(n+1)(n+2)} \quad (28)$$

(2) (*)より $a_{k+1} = \frac{k}{k+3}a_k$ であるから

$$\frac{a_k}{k+3} - \frac{a_{k+1}}{k+4} = \frac{a_k}{k+3} \left(1 - \frac{k}{k+4} \right) = \frac{\boxed{4}}{(k+3)(k+4)} a_k \quad (29)$$

となることを用いて

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+3)(k+4)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{k+3} - \frac{a_{k+1}}{k+4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{4} - \frac{a_{n+1}}{n+4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{n+4} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\overset{(32)}{\boxed{1}}}{\underset{(33)(34)}{\boxed{96}}} - \frac{\overset{(30)}{\boxed{1}}}{\underset{(31)}{\boxed{4}} \underset{(35)}{(n + \boxed{1})} \underset{(36)}{(n + \boxed{2})} \underset{(37)}{(n + \boxed{3})} \underset{(38)}{(n + \boxed{4})}}$$

(注) (1)で a_n が求まっているので, 定石通り

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{(k+3)(k+4)} &= \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \right\} \end{aligned}$$

と変形して和 T_n を求めてもよい。実は, 見た目の印象が違うだけで, 問題文の式変形はこれと全く同じである。

(3) (2)より

$$|T_n - A| = \frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

であり, 不等式 $|T_n - A| < \frac{1}{10000(n+1)(n+2)}$ は

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)} < \frac{1}{2500}$$

$$(n+3)(n+4) > 2500$$

と書けるから,

$$49 \cdot 50 = 2450, \quad 50 \cdot 51 = 2550$$

より

$$n+3 \geq 50 \quad \therefore n \geq \underset{(39)(40)}{\boxed{47}}$$