

1 i を虚数単位とし, $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i$ とする。次の問に答えよ。

- (1) z^2 の実部と虚部を求めよ。
- (2) z の偏角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とするとき, θ を求めよ。
- (3) k を自然数とする。 z^k が実数となるような最小の k の値を求めよ。

(名城大)

2 i を虚数単位とし, 複素数 z の共役複素数を \bar{z} とする。 $\alpha = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ とし, $\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して, $(\bar{\alpha})^n = \alpha^{7-n}$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\beta + \bar{\beta}$ と $\beta\bar{\beta}$ の値を求めよ。
- (3) $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$ の値を求めよ。

(信州大)

3 以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。

(2) 複素数平面上の $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。

$$(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$$

が成り立つとき, $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか答えよ。

(九大)

4 i を虚数単位とする。複素数平面に関する以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $|z + 2| = 2|z - 1|$ を満たす点 z の全体が表す図形が円であることを示し, その円の中心と半径を求めよ。

(2) 等式

$$\{|z + 2| - 2|z - 1|\} |z + 6i| = 3\{|z + 2| - 2|z - 1|\} |z - 2i|$$

を満たす点 z の全体が表す図形を S とする。このとき S を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点 z が (2) における図形 S 上を動くとき, $w = \frac{1}{z}$ で定義される点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(筑波大)

- 5 複素数平面上に $|\alpha| = 2$ を満たす点 $A(\alpha)$ がある。方程式

$$|z - 1| = \sqrt{2} \quad \dots\dots ①$$

$$|z - \alpha| = \sqrt{5} \quad \dots\dots ②$$

について、次の問に答えよ。

- (1) 複素数平面上で方程式 ① を満たす点 z の全体が表す図形を描け。また、方程式 ① および ② を満たす複素数 z の個数が 2 個であることを示せ。
 (2) 方程式 ① および ② を満たす複素数 z について

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 方程式 ① および ② を満たす異なる 2 つの複素数を β, γ とする。2 点 $B(\beta), C(\gamma)$ と原点 O が一直線上にあることを示せ。また、 $|\beta| = b$ とおくと、 $|\gamma|$ を b を用いて表せ。

(佐賀大)

- 6 x は $x \neq 0, \pm 1$ である実数とし、 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ とおく。 c は実数とし、 x の方程式

$$(E) \quad x + f(x) + f(f(x)) + f(f(f(x))) = c$$

を考える。

- (1) $f(f(f(f(x)))) = x$ であることを証明せよ。
 (2) $x = \alpha$ が方程式 (E) の実数解であるとき

$$f(\alpha), f(f(\alpha)), f(f(f(\alpha)))$$

も (E) の実数解であることを証明せよ。

- (3) (E) の実数解 $x = \alpha$ に対して

$$y_1 = \alpha + f(f(\alpha)), y_2 = f(\alpha) + f(f(f(\alpha)))$$

とおく。 y_1, y_2 が y の 2 次方程式 $y^2 - cy - 4 = 0$ の解であることを証明せよ。

- (4) $c = 3$ のとき方程式 (E) を解け。

(京都府医大)

7 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = a_n - \frac{b_n}{2a_n}, \quad b_n = a_n^2 - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定義する。次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 の値を求めよ。
- (2) すべての n について $a_n > a_{n+1}$ と $a_n > \sqrt{2}$ が成り立つことを示せ。
- (3) すべての n について $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{1}{4}$ が成り立つことを示せ。
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(島根大)

8 O を原点とする座標平面上に

点 $A_n(x_n, y_n)$ および点 $B_n(-y_n, x_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

がある。ただし, $x_1 = y_1 = 1$ とし,

$$\overrightarrow{OA_{n+1}} = \overrightarrow{OA_n} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A_n B_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。

- (i) x_2, y_2, x_3, y_3 の値を求めよ。
- (ii) $\triangle OA_n B_n$ は $\angle A_n O B_n$ が直角の直角二等辺三角形であることを証明せよ。
- (iii) $r_n = |\overrightarrow{OA_n}|$ とおくとき, r_n を n を用いて表せ。
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} |\overrightarrow{A_n A_{n+1}}|$ を求めよ。

(愛媛大)

9 以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} & (n \text{ が偶数 } (n=2m) \text{ のとき}) \\ \sum_{k=1}^m \frac{1}{m-1+k} & (n \text{ が奇数 } (n=2m-1) \text{ のとき}) \end{cases}$$

を証明せよ。

(2) (1)の左辺において $n \rightarrow \infty$ として、区分別求積法を用いて無限級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

の和の値を求めよ。

(3) (2)の無限級数の項の順序を入れ替えてできる無限級数

$$1 - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{2 \text{ 項}} + \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{2 \text{ 項}} + \frac{1}{5} - \underbrace{\frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{2 \text{ 項}} + \cdots$$

の和の値を求めよ。

(4) 上の結果からどのようなことが考察されるか。「有限」と「無限」という言葉を用いて述べよ。

(浜松医大)

10 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ とする。座標平面上の曲線 $C: y = f(x)$ と y 軸上の点 $P(0, a)$ に対し、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 $Q(t, f(t))$ における接線が点 $P(0, a)$ を通るとき、 a を t を用いて表せ。

(2) 点 $P(0, a)$ から曲線 C 上の相異なる 4 点へ接線が引けるような定数 a の範囲を求めよ。

(兵庫県大)

11 関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x - 2\sqrt{4x^2 + 3} \quad (x > 0)$$

$$g(x) = x^2 + x$$

と定める。次の問いに答えよ。

〔1〕 a は正の実数とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の y 切片を a を用いて表せ。

〔2〕 b は実数とし、曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(b, g(b))$ における接線を ℓ とする。
曲線 $y = f(x)$ の接線で、 ℓ と垂直に交わるものが存在するように、定数 b の値の範囲を求めよ。

(東京農工大)

12 関数 $F(x) = \sin x - \log(1+x)$ と $f(x) = F'(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $f'(\alpha) = 0$ となる α が開区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ に 1 つだけあることを示せ。

(2) $f(\beta) = 0$ となる β が開区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ に 1 つだけあることを示せ。

(3) 開区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ において、 $F(x) > 0$ であることを示せ。ただし、自然対数の底 e が $e > 2.7$ を満たすことを用いてもよい。

(4) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において、曲線 $y = \sin x$ 、曲線 $y = \log(1+x)$ 、および直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(金沢大)

- 13 四角形 ABCD の 3 辺の長さが $AB = BC = CD = 1$ であり, 4 点 A, B, C, D は同一円周上にあるとする. $\angle ABC = \theta$ $\left(\frac{\pi}{3} < \theta < \pi\right)$ とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\angle BCD = \theta$ を示せ.
- (2) AD を θ を用いて表せ.
- (3) 四角形 ABCD の面積 S を θ を用いて表せ. さらに, S の最大値およびそのときの θ の値を求めよ.

(奈良女大)

- 14 以下で e は自然対数の底である. 必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を用いてもよい.

- (1) $t > 0$ のとき, e と $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ の大小を判定し, その結果が正しいことを示せ.
- (2) $t > 0$ のとき, $e^{1 - \frac{1}{2t}}$ と $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ の大小を判定し, その結果が正しいことを示せ.

(北大)

15 次の問いに答えよ。

- (1) $t = \tan \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$) とおく。

このとき, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ であることを示せ。

- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ を求めよ。

- (3) 2つの定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ が等しいことを示せ。

- (4) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ を求めよ。

- (5) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ を求めよ。

(富山大)

16 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x + \int_0^{\pi} f(t) \cos(x+t) dt$$

(信州大)

17 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ とおく。また, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx$ とする。

(1) $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$ を示せ。

(2) $nI_n I_{n-1}$ を求めよ。

(3) $I_{n+1} < I_n$ を示せ。

(4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2$ を求めよ。

(中央大)

18 $a_n = \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n \, dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。

(1) a_1 を求めよ。

(2) 不等式 $0 \leq a_n \leq \frac{e-1}{n!}$ が成り立つことを示せ。

(3) $n \geq 2$ のとき, $a_n = \frac{e}{n!} - a_{n-1}$ であることを示せ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ を求めよ。

(青山学院大)

19 座標平面上に点 $A(1, 0)$ がある。原点を O とし, 0 より大きい整数 n に対して点 P_k の座標を $(0, \frac{k}{n})$ とする ($k = 1, 2, \dots, n$)。このとき, 以下の問に答えよ。

- (1) $\triangle AOP_k$ の外接円の面積を b_k としたとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{n}$ はいくらか。
- (2)(i) 実数 x について, $\sqrt{x^2 + 1} + x = t$ とおいたとき, $\sqrt{x^2 + 1}$ を t で表せ。
 (ii) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$ の値を求めよ。
- (3) $\triangle AOP_k$ の内接円の半径を c_k としたとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{n}$ はいくらか。

(防衛医大)

20 関数 $f(x) = \frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x$ ($x > 0$) について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減と極値, およびグラフの変曲点を調べよ。
- (2) 連立不等式 $0 \leq y \leq \frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x$, $0 < x \leq e^2$ で定まる領域の面積 S を求めよ。
- (3) (2) で定めた領域を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(三重大)

21 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

- (1) $\frac{dx}{dt} = 0$ または $\frac{dy}{dt} = 0$ となる t の値を求めよ．
- (2) C の概形を xy 平面上に描け．
- (3) C の $y \leq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(神戸大)

22

a は $a \geq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geq 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leq y, \quad y \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \leq a$$

次の問いに答えよ．

- (1) D_a の面積 S_a を求めよ．
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} S_a$ を求めよ．

(京大)

23 xyz 空間において, 連立不等式

$$x^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq y, \quad z \geq -y$$

の表す立体を V とする。そのとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq t \leq 1$ とする。平面 $z = t$ による V の切り口の面積を $S(t)$ とするとき, $S(t)$ の最大値を求めよ。
- (2) V の体積を求めよ。

(兵庫県大)

24 曲線 C を媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表す。

- (1) 曲線 C 上の点で, y 座標の値が最大となる点の座標 (x, y) を求めなさい。また, 曲線 C 上の点で, y 座標が最小となる点の座標 (x, y) をすべて求めなさい。
- (2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。
- (3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めなさい。

(大分大)

25 xyz 空間において, 3 点 $A(2, 1, 2)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, -3, 0)$ を頂点とする三角形 ABC を考える。以下の問に答えよ。

- (1) $\angle ABC$ を求めよ。
- (2) $0 \leq h \leq 2$ に対し, 線分 AB, AC と平面 $x = h$ との交点をそれぞれ P, Q とする。点 P, Q の座標を求めよ。
- (3) $0 \leq h \leq 2$ に対し, 点 $(h, 0, 0)$ と線分 PQ の距離を h で表せ。ただし, 点と線分の距離とは, 点と線分上の点の距離の最小値である。
- (4) 三角形 ABC を x 軸のまわりに 1 回転させ, そのときに三角形が通過する点全体からなる立体の体積を求めよ。

(早大)

26 次の問いに答えよ。

- (1) 定積分

$$\int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^{3x} + 4e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} dx$$

を求めよ。

- (2) 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が, すべての実数 x に対して $f(x) > 0$, かつ

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{(t^2 + 1)f(t)} dt + 1$$

をみたすとき, $f(x)$ を求めよ。

(横浜国大)

27 xy 平面上で楕円 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($0 < a < 2$) 上の点 $P(x_1, y_1)$ ($y_1 \neq 0$) を通る直線 $\frac{x_1}{4}x + \frac{y_1}{a^2}y = 1$ を ℓ とする。楕円 C の焦点のうち, x 座標が正の方を F , 負の方を F' とし, F, F' から ℓ へ下した垂線と ℓ との交点をそれぞれ H, H' とする。下の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ は点 P において楕円 C に接することを示せ。
- (2) $\triangle PHF$ と $\triangle PH'F'$ は相似であることを示せ。
- (3) $\triangle PHF$ と $\triangle PH'F'$ の面積の比が $1:4$ となる点 P が存在する a の範囲を求めよ。

(東京学芸大)

28 放物線 $y^2 = 2x$ を C とする。以下の設問(1), (2)の モ ~ ロ に当てはまる数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ。

- (1) C 上の2点 $A\left(\frac{9}{2}, 3\right), B\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ での接線の交点を P とする。このとき, P の座標は (モ, ヤ) である。また, $\angle APB$ の大きさを弧度法で表すと ユ である。
- (2) C 上の2点を $A\left(\frac{a^2}{2}, a\right), B\left(\frac{b^2}{2}, b\right)$ とおく。ただし, $a > b$ である。 A, B での接線の交点を $P(X, Y)$ とするとき, X と Y を a, b で表すと $X = \frac{\text{ヨ}}{2}, Y = \frac{\text{ラ}}{2}$ である。
- (3) (2)において $\angle APB$ を(1)の ユ に保ったまま A, B を動かすとき, X の最小値は リ となる。また, 点 P の軌跡は双曲線 $\frac{x^2}{\text{ル}} + \frac{y^2}{\text{レ}} = 1$ を x 軸方向に ロ だけ平行移動した曲線の一部である。

(聖マリアンナ医大)