

1

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z^2 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 2i(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\
 &= 4\sqrt{6}\sqrt{2} + 2i \times (6 - 2) \\
 &= 8\sqrt{3} + 8i
 \end{aligned}$$

の

実部は $8\sqrt{3}$, 虚部は 8 (答)

$$\begin{aligned}
 (2) \quad z^2 &= 16 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\
 &= 16 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \left\{ 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right\}^2
 \end{aligned}$$

より

$$z = \pm 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$Re(z^2) = \sqrt{6} + \sqrt{2} > 0, \quad Im(z^2) = \sqrt{6} - \sqrt{2} > 0 \text{ より}$$

$$z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

 z の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) は

$$\theta = \frac{\pi}{12} \quad (\text{答})$$

(注) 準有名角の値に反応して

$$z = 4 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

に気づくので, 先に (2) を答えておいて, (1) を

$$z^2 = \left\{ 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right\}^2 = 16 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Re(z^2) = 16 \cos \frac{\pi}{6} = 8\sqrt{3}, \quad Im(z^2) = 16 \sin \frac{\pi}{6} = 8$$

としてもよい。

$$(3) \quad z^k = \left\{ 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right\}^k = 4^k \left(\cos \frac{k\pi}{12} + i \sin \frac{k\pi}{12} \right)$$

が実数となるのは,

$$\frac{k\pi}{12} = n\pi$$

を満たす整数 n が存在するときであり,

$$k = 12n$$

最小の自然数は

$$k = 12 \quad (\text{答})$$

2

$$(1) \alpha = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \text{ より}$$

$$\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2 = \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} = 1$$

であるから,

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1} \quad \therefore (\bar{\alpha})^n = (\alpha^{-1})^n = \alpha^7 (\alpha^{-1})^n = \alpha^{7-n} \quad (\text{証明おわり})$$

$$(2) \beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 \text{ より, (1)も用いて}$$

$$\bar{\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^4 = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3$$

$$\beta + \bar{\beta} = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$$

$$\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \quad \alpha = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \neq 1$$

より

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \quad \therefore \beta + \bar{\beta} = -1 \quad (\text{答})$$

$$\alpha^7 = 1 \text{ も用いて}$$

$$\begin{aligned} \beta \bar{\beta} &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3) \\ &= \alpha(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3) + \alpha^2(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3) + \alpha^4(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3) \\ &= (1 + \alpha^6 + \alpha^4) + (\alpha + 1 + \alpha^5) + (\alpha^3 + \alpha^2 + 1) \\ &= \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3 \\ &= 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 \text{ より}$$

$$\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \text{Im}(\beta)$$

$$(2) \text{より, } \beta, \bar{\beta} \text{ は 2 次方程式}$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

の 2 解であり, これを解くと

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2} \text{ より } 0 < \sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{2\pi}{7} < \sin \frac{3\pi}{7} < 1 \text{ であるから,}$$

$$\text{Im}(\beta) = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \left(\pi - \frac{3\pi}{7} \right) + \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right)$$

$$= \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} > 0$$

であることを考えて,

$$\beta = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$$

$$\text{Im}(\beta) = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad (\text{答})$$

3

(1) $0^4 - 2 \times 0^3 + 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 1 \neq 0$ より $x = 0$ は解ではないから, 両辺を x^2 で割っても方程式は同値であり,

$$x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)^2 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (\beta - \gamma)^4 &= \{\beta - \alpha - (\gamma - \alpha)\}^4 \\ &= (\beta - \alpha)^4 - 4(\beta - \alpha)^3(\gamma - \alpha) + 6(\beta - \alpha)^2(\gamma - \alpha)^2 \\ &\quad - 4(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)^3 + (\gamma - \alpha)^4 \end{aligned}$$

であるから, $(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$ より

$$\begin{aligned} 2(\gamma - \alpha)^4 - 4(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)^3 + 6(\beta - \alpha)^2(\gamma - \alpha)^2 \\ - 4(\beta - \alpha)^3(\gamma - \alpha) + 2(\beta - \alpha)^4 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^4 - 2\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^3 + 3\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} + 1 = 0$$

(1)より

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{複号同順})$$

よって,

$\triangle ABC$ は正三角形 (答)

である。

4

(1) $|z+2|=2|z-1|$ を満たす点 z の全体が表す図形は,

$$|z+2|:|z-1|=2:1$$

を満たす軌跡であるから, 点 -2 から点 1 へ向かう線分を $2:1$ に内分する点 0 と外分する点 4 を直径の両端とする円であり,

中心 2 , 半径 2 の円 (答)

である。

(別法) 次のように, 機械的な計算で求めてもよい。

$$|z+2|^2 = 4|z-1|^2$$

$$(z+2)(\bar{z}+2) = 4(z-1)(\bar{z}-1)$$

$$3z\bar{z} - 6z - 6\bar{z} = 0$$

$$z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 0$$

$$(z-2)(\bar{z}-2) = 2^2$$

$$|z-2|^2 = 2^2 \quad \therefore |z-2| = 2$$

(2) 図形 S は, 等式

$$\{|z+2|-2|z-1|\}\{|z+6i|-3|z-2i|\}=0$$

で表され,

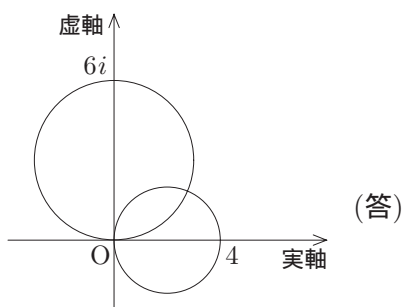
$$|z+2|=2|z-1| \quad \text{または} \quad |z+6i|=3|z-2i|$$

であることと同値である。

$|z+6i|=3|z-2i|$ を満たす点 z が描く図形は,

$$|z+6i|:|z-2i|=3:1$$

と表されることより, 点 $-6i$ から点 $2i$ へ向かう線分を $3:1$ に内分する点 0 と外分する点 $6i$ を直径の両端とする円である。(1)で求めた円とあわせた 2 円が図形 S であり, 複素数平面上に S を図示すると



$$(3) \quad w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w}$$

であるから, $z = \frac{1}{w}$ を $|z-2|=2$ に代入すると

$$\left| \frac{1}{w} - 2 \right| = 2$$

$$|1 - 2w| = 2|w| \quad \therefore \left|w - \frac{1}{2}\right| = |w|$$

これは, 点 0 と点 $\frac{1}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線 $Re(w) = \frac{1}{4}$ を表す。

$z = \frac{1}{w}$ を $|z - 3i| = 3$ に代入すると

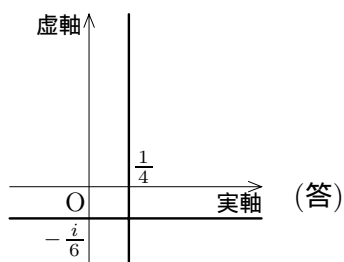
$$\left|\frac{1}{3i} \cdot \frac{1}{w} - 1\right| = 1 \quad \therefore \left|w - \frac{1}{3i}\right| = |w|$$

$\frac{1}{3i} = -\frac{i}{3}$ であるから, これは点 0 と点 $-\frac{i}{3}$ を結ぶ線分の垂直二等分線 $Im(w) = -\frac{1}{6}$ を表す。

以上より, 点 z が S 上を動くとき, $w = \frac{1}{z}$ で定義される点 w が描く図形は

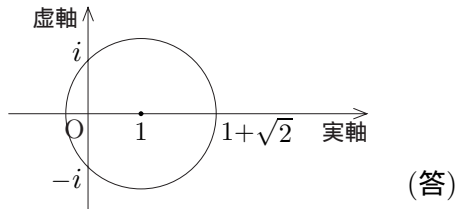
$$2 \text{ 直線 } Re(w) = \frac{1}{4}, Im(w) = -\frac{1}{6}$$

であることがわかり, これを複素数平面上に図示すると



5

(1) $|z - 1| = \sqrt{2}$ を図示すると



$|\alpha| = 2$ より

$$1 \leq |\alpha - 1| \leq 3$$

であり,

$$1^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 2\sqrt{10} - 6 = 2(\sqrt{10} - \sqrt{9}) > 0$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - 3^2 = 2\sqrt{10} - 2 = 2(\sqrt{10} - 1) > 0$$

より

$$\sqrt{5} - \sqrt{2} < |\alpha - 1| < \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

であるから, 円 $|z - 1| = \sqrt{2}$ と円 $|z - \alpha| = \sqrt{5}$ は 2 点で交わる。したがって, ① および ② を満たす複素数は 2 個ある。 (証明おわり)

(2) ① を書き換えると

$$|z - 1|^2 = 2$$

$$(z - 1)(\bar{z} - 1) = 2$$

$$z\bar{z} - z - \bar{z} - 1 = 0 \quad \dots\dots ①'$$

② を書き換えると

$$|z - \alpha|^2 = 5$$

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 5$$

$$z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - 5 = 0 \quad \dots\dots ②'$$

①' - ②' より

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) - \alpha\bar{\alpha} + 4 = 0$$

ここで, 仮定より $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 2^2 = 4$ であるから,

$$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0 \quad \text{(証明おわり)}$$

(3) β, γ は ① および ② を満たすから, (2) より

$$\bar{\beta}(\alpha - 1) + \beta(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

$$\bar{\gamma}(\alpha - 1) + \gamma(\bar{\alpha} - 1) = 0$$

$\bar{z}(\alpha - 1) + z(\bar{\alpha} - 1) = 0$ は

$$\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha} - 1} = -\frac{z}{\alpha - 1}$$

と書けて,

$$z \perp (\alpha - 1)$$

であることを意味するから, 点 β, γ はともに原点を通る $\alpha - 1$ と垂直な直線上にあ

る。特に, $O(0)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ は同一直線上にある。

$D(i)$, $E(-i)$ とおくと, 原点に関する円 $|z-1|=\sqrt{2}$ の方べきを考えると

$$OB \cdot OC = OD \cdot OE$$

が成り立つから,

$$|\beta||\gamma| = 1 \times 1$$

$|\beta| = b$ とおくと

$$|\gamma| = \frac{1}{b} \quad (\text{答})$$

6

$$(1) \quad f(f(x)) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1-x+(1+x)}{1-x-(1+x)} = \frac{2}{-2x} = -\frac{1}{x}$$

$$f(f(f(f(x)))) = -\frac{1}{f(f(x))} = -\frac{1}{-\frac{1}{x}} = x$$

(証明おわり)

(2) $x = \alpha$ が方程式 (E) の解であるとき,

$$\alpha + f(\alpha) + f(f(\alpha)) + f(f(f(\alpha))) = c$$

を満たし, (1) を用いると

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(f(\alpha)) + f(f(f(\alpha))) + f(f(f(f(\alpha)))) \\ = f(\alpha) + f(f(\alpha)) + f(f(f(\alpha))) + \alpha = c \end{aligned}$$

が成り立つから, $f(\alpha)$ も (E) の解である。さらに, α を $f(\alpha)$ に置き換えても同様のことが起こるから, $f(f(\alpha))$ も $f(f(f(\alpha)))$ も (E) の解である。

次に, α が実数であるとすれば, 実数が和, 差, (積), 商について閉じているから,

$$f(\alpha) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \text{ も実数}$$

となる。さらに, $f(f(\alpha))$ も $f(f(f(\alpha)))$ も実数となる。

(証明おわり)

(注) 関係式を満たす (方程式の解である) ことと, 演算について閉じている (再び実数となる) こととは全く別の性質なので, 分けて示すことがポイントである。実数であるという議論はあとに必要なないので, 論理的理解が試されたものと思われる。

(3) $y_1 = \alpha + f(f(\alpha)), y_2 = f(\alpha) + f(f(f(\alpha)))$ とおくと,

$$y_1 + y_2 = c$$

一方,

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \\ y_2 &= f(\alpha) - \frac{1}{f(\alpha)} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \\ &= \frac{(1+\alpha)^2 - (1-\alpha)^2}{(1-\alpha)(1+\alpha)} = \frac{4\alpha}{1-\alpha^2} \\ y_1 y_2 &= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \cdot \frac{4\alpha}{1-\alpha^2} = -4 \end{aligned}$$

解と係数の関係より, y_1, y_2 は 2 次方程式 $y^2 - cy - 4 = 0$ の 2 解である。

(証明おわり)

(4) $c = 3$ のとき, 方程式 (E) の解 α に対して, $\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}, \frac{4\alpha}{1 - \alpha^2}$ を 2 解とする 2 次方程式は $y^2 - 3y - 4 = 0$ であり, これを解くと

$$(y+1)(y-4)=0$$

$$\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}, \frac{4\alpha}{1-\alpha^2}\right) = (-1, 4) \text{ または } (4, -1)$$

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \text{ または } \alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{5}$$

以上より, $c=3$ のとき方程式 (E) の解は

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{5} \quad (\text{答})$$

(注) 問題文冒頭で $x (\neq 0, \pm 1)$ は実数として $f(x)$ を定めるとしているが, $f(x)$ 自体は x が虚数でも定義でき, 方程式 (E) も c が実数でありさえすれば実数解しか持たないので, x や α を実数に限定する意義は薄い。

7

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$$

$$(1) \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (\text{答})$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} \quad (\text{答})$$

(2) $a_n > \sqrt{2}$ であることを数学的帰納法で示す。

1° $n = 1$ のとき, $a_1 = 2 > \sqrt{2}$ である。

2° $a_k > \sqrt{2}$ であるとすれば,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{a_k} - \sqrt{2} \\ &= \frac{a_k^2 - 2\sqrt{2}a_k + 2}{2a_k} = \frac{(a_k - \sqrt{2})^2}{2a_k} > 0 \end{aligned}$$

1° かつ 2° より, すべての自然数 n について $a_n > \sqrt{2}$ が成り立つ。したがって,

$$a_n - a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} > 0$$

も成り立つ。

(証明おわり)

(3) 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2 &= \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}a_n \cdot \frac{1}{a_n} \\ &= \left(\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a_n^2 - 2}{2a_n}\right)^2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}^2 - 2}{a_n^2 - 2} = \frac{a_n^2 - 2}{4a_n^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{a_n^2}\right) < \frac{1}{4}$$

(証明おわり)

(4) (2)より

$$b_n = a_n^2 - 2 > 0$$

(3)より

$$b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 < \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} b_1$$

$0 < \frac{1}{4} < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} b_1 = 0$ であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 2) = 0 + 2 = 2$$

つねに $a_n > \sqrt{2}$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
\boxed{8} \quad \overrightarrow{OA_{n+1}} &= \overrightarrow{OA_n} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A_n B_n} \\
&= \overrightarrow{OA_n} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB_n} - \overrightarrow{OA_n}) \\
&= \frac{1}{2} \overrightarrow{OA_n} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB_n} \\
&= \frac{1}{2} (x_n, y_n) + \frac{1}{2} (-y_n, x_n) = \frac{1}{2} (x_n - y_n, x_n + y_n)
\end{aligned}$$

$$(i) \quad (x_2, y_2) = \frac{1}{2} (x_1 - y_1, x_1 + y_1) = \frac{1}{2} (1 - 1, 1 + 1) = (0, 1) \text{ より}$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 1 \quad (\text{答})$$

$$(x_3, y_3) = \frac{1}{2} (0 - 1, 0 + 1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ より}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}, \quad y_3 = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

$$(ii) \quad x_n = \rho_n \cos \theta_n, \quad y_n = \rho_n \sin \theta_n \quad (\rho_n > 0) \text{ とおくと,}$$

$$-y_n = \rho_n \cos\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right), \quad x_n = \rho_n \sin\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)$$

であるから, O を中心として辺 OA_n を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させると辺 OB_n に重なる。よって, $\triangle OA_n B_n$ は $\angle A_n O B_n$ を直角とする直角二等辺三角形である。 (証明おわり)

$$(iii) \quad A_{n+1} \text{ は直角二等辺三角形 } \triangle OA_n B_n \text{ の斜辺 } A_n B_n \text{ の中点であるから, } O \text{ を中心として } \triangle OA_n B_n \text{ を } \frac{\pi}{2} \text{ 回転させて } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 倍すると } \triangle OA_{n+1} B_{n+1} \text{ に重なり, 相似比は } 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ であるから,}$$

$$r_n = |\overrightarrow{OA_n}|$$

とおくとき, $\{r_n\}$ は初項 $r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の等比数列であり,

$$r_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} = 2^{-\frac{n-2}{2}} \quad (\text{答})$$

$$(iv) \quad \triangle OA_n A_{n+1} \text{ は } OA_n \text{ を斜辺とする直角二等辺三角形であるから,}$$

$$|\overrightarrow{A_n A_{n+1}}| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\overrightarrow{OA_n}| = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overrightarrow{A_n A_{n+1}}| \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ の無限等比級数であり, } 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ より収束}$$

して, その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overrightarrow{A_n A_{n+1}}| = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} (\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

9

(1) $n = 2m$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k}
 \end{aligned}$$

 $n = 2m - 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} &= \sum_{k=1}^{2(m-1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} + \frac{1}{2m-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{m-1+k} + \frac{1}{2m-1} \\
 &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{m-1+k}
 \end{aligned}$$

(証明おわり)

(2) (1)の結果と区分求積法を用いて

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{m}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2 \\
 \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m-1+k} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k-1}{m}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2
 \end{aligned}$$

n が偶数であるか奇数であるかに依らないから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ は収束して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \log 2 \quad (\text{答})$$

(3) 与えられた無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}
S_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}
\end{aligned}$$

(2) より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{3m} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$S_{3m-1} = S_{3m} + \frac{1}{4m}, \quad S_{3m-2} = S_{3m} + \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m} \text{ より}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{3m-1} = \frac{1}{2} \log 2, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S_{3m-2} = \frac{1}{2} \log 2$$

よって、与えられた無限級数 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は

$$\frac{1}{2} \log 2 \text{ に収束 (答)}$$

する。

- (4) 有限の和では、順序を入れ替えても同じ計算式となるが、無限個の形式和では、迂闊に順序を入れ替えると全く別の計算式になり得る。

(注) 有限部分和を丁寧に变形してみるとわかることであるが、そもそも

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \text{ と } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ とは全くの別物}$$

である。部分和 S_{3m} でみると、

$$\begin{aligned}
S_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2k}
\end{aligned}$$

であり、初めから $-\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2k} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ という無視できない項を追加

していることになる。したがって、問題文の表現につられて、同じ式が操作によって異なる結果になると答えると誤りであり、無限和を不適切に処理すると全く別の式を表し得るというのが正しい。また、無限級数によっては順序を入れ替えられる場合もあるので、自分の言いたいことを間違わないようにしたい。

10

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{1}{(x^2 + 1)^2} (x^2 + 1)' = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

 $x = t$ における C の接線

$$y = -\frac{2t}{(t^2 + 1)^2} (x - t) + \frac{1}{t^2 + 1}$$

が点 $P(0, a)$ を通るとき,

$$a = -\frac{2t}{(t^2 + 1)^2} (0 - t) + \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{3t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} \quad (\text{答})$$

(2) $g(t) = \frac{3t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}$ とおくと,

$$g'(t) = \frac{6t(t^2 + 1)^2 - (3t^2 + 1) \cdot 2(t^2 + 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{t\{6(t^2 + 1) - 4(3t^2 + 1)\}}{(t^2 + 1)^3}$$

$$= \frac{-6t}{(t^2 + 1)^3} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$g'(t) > 0 \iff t \left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0$$

$$\iff t < -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ または } 0 < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから, $g(t)$ の増減は

t	$(-\infty)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	(∞)				
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	(0)	\nearrow	極大	\searrow	極小	\nearrow	極大	\searrow	(0)

$$g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} + 1}{\left(\frac{1}{3} + 1\right)^2} = \frac{9}{8}, \quad g(0) = 1$$

 tu 平面上で $u = g(t)$ のグラフと直線 $u = a$ が 4 点で交わる範囲を求めて,

$$1 < a < \frac{9}{8} \quad (\text{答})$$

11

〔 1 〕 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x - 2\sqrt{4x^2 + 3}$ を微分すると

$$f'(x) = 3x + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 3}} \cdot 8x = 3x + 1 - \frac{8x}{\sqrt{4x^2 + 3}}$$

 $x = a$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$y = \left(3a + 1 - \frac{8a}{\sqrt{4a^2 + 3}}\right)(x - a) + \frac{3}{2}a^2 + a - 2\sqrt{4a^2 + 3}$$

であり, y 切片は

$$\begin{aligned} & \left(3a + 1 - \frac{8a}{\sqrt{4a^2 + 3}}\right)(0 - a) + \frac{3}{2}a^2 + a - 2\sqrt{4a^2 + 3} \\ &= -\frac{3}{2}a^2 - \frac{6}{\sqrt{4a^2 + 3}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

〔 2 〕 $g'(x) = 2x + 1$ $x = b$ における曲線 $y = g(x)$ の接線 ℓ と (1) の接線が直交するための条件は

$$f'(a)g'(b) = -1 \quad (a > 0)$$

$$\therefore f'(a) = -\frac{1}{2b+1} \quad \dots\dots (*)$$

 $a > 0$ における $f'(a) = 3a + 1 - \frac{8a}{\sqrt{4a^2 + 3}}$ の値域を求めると,

$$\begin{aligned} f''(a) &= 3 - 8 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{4a^2 + 3} - a \cdot \frac{8a}{2\sqrt{4a^2 + 3}}}{4a^2 + 3} \\ &= 3 - 8 \cdot \frac{(4a^2 + 3) - 4a^2}{(4a^2 + 3)\sqrt{4a^2 + 3}} \\ &= 3 - 24(4a^2 + 3)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 3(4a^2 + 3)^{-\frac{3}{2}} \{(4a^2 + 3)^{\frac{3}{2}} - 8\} \end{aligned}$$

 $a > 0$ において

$$\begin{aligned} f''(a) < 0 &\iff (4a^2 + 3)^{\frac{3}{2}} < 8 \\ &\iff 4a^2 + 3 < 8^{\frac{2}{3}} = 4 \\ &\iff a^2 < \frac{1}{4} \\ &\iff (0 <) a < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから, $f'(x)$ の増減は

a	(0)	$\frac{1}{2}$	(∞)
$f''(a)$	—	0	+
$f'(a)$	(1)	\searrow 極小 \nearrow	

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + 1 - \frac{4}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f'(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(3a + 1 - \frac{8}{\sqrt{4 + \frac{3}{a^2}}} \right) = \infty$$

(*)を満たす正の実数 a が存在するのは

$$-\frac{1}{2b+1} \geq \frac{1}{2}$$

のときであり,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2b+1} \leq 0$$

$$\frac{2b+3}{2(2b+1)} \leq 0$$

$$2b+1 \neq 0 \text{ かつ } (2b+3)(2b+1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq b < -\frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

12

(1) $F(x) = \sin x - \log(1+x)$ を微分すると

$$f(x) = F'(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = -\cos x - \frac{2}{(1+x)^3}$$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ において $f''(x) < 0$ であるから, $f'(x)$ は $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において狭義単調減少であり,

$$f'(\alpha) = 0 \text{ となる } \alpha \text{ は } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ に多くても 1 つしかない。} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$f'(x)$ は連続関数であり,

$$f'(0) = 1 > 0, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)^2} < 0$$

であるから,

$$f'(\alpha) = 0 \text{ となる } \alpha \text{ は } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ に少なくとも 1 つある。} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①かつ②より, $f'(\alpha) = 0$ となる α が $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ にただ 1 つある。
(証明おわり)

(2) (1)の考察より, $f'(\alpha) = 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす α がただ 1 つあり, $f(x)$ の増減が

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	↗ 極大 ↘	

となることがわかる。

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{2 + \pi} < 0$$

であるから, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ において $f(\beta) = 0$ となる β がただ 1 つ存在する。(証明おわり)

(3) $F'(x) = f(x)$ であるから, (2)より

x	0	β	$\frac{\pi}{2}$	
$F'(x)$	0	+	0	-
$F(x)$	0	\nearrow	極大	\searrow

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

であるが, $\pi = 3.14 \dots < 3.2$, $e > 2.7$ より

$$1 + \frac{\pi}{2} < 1 + \frac{3.2}{2} = 2.6 < e$$

であるから,

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) > 1 - \log e = 0$$

よって, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ において $F(x) > 0$ である。

(証明おわり)

- (4) (3)より, 曲線 $y = \sin x$, 曲線 $y = \log(1+x)$, および $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin x - \log(1+x)\} dx$$

で求められることになり,

$$\begin{aligned} S &= \left[-\cos x - (1+x)\{\log(1+x) - 1\} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -0 + 1 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \log 1 + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \\ &= \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left\{1 - \log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

13

(1) 四角形 ABCD の外接円の中心を O とすると,

$$AB = BC = CD = 1, \quad OA = OB = OC = OD$$

より

$$\triangle OAB \equiv \triangle OBC \equiv \triangle OCD$$

$\angle OAB = \angle OBA = \alpha$ とおくと, $\angle OBC = \angle OCB = \angle OCD = \angle ODC = \alpha$ であるから,

$$\theta = \angle ABC = \angle OBA + \angle OBC = 2\alpha$$

$$\angle BCD = \angle OCB + \angle OCD = \alpha + \alpha = \theta \quad (\text{証明おわり})$$

(2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \\ &= 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \theta \\ &= 2(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC + \angle ABC = \pi \quad \therefore \angle ADC = \pi - \theta$$

AD = x と置き, $\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC \\ 2(1 - \cos \theta) &= x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \cos(\pi - \theta) \\ x^2 + 2x \cos \theta + 2 \cos \theta - 1 &= 0 \\ (x + 1)(x + 2 \cos \theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$x = AD > 0$ であり, $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$ より $-1 < \cos \theta < \frac{1}{2}$ であるから,

$$AD = 1 - 2 \cos \theta \quad (\text{答})$$

(3) 四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} (1 - 2 \cos \theta) \cdot 1 \cdot \sin(\pi - \theta) \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta (1 + 1 - 2 \cos \theta) \\ &= \sin \theta (1 - \cos \theta) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\theta} &= \cos \theta (1 - \cos \theta) + \sin \theta \sin \theta \\ &= \cos \theta (1 - \cos \theta) + 1 - \cos^2 \theta \\ &= \cos \theta (1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \\ &= (1 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$ において

$$\frac{dS}{d\theta} > 0 \iff (\cos \theta - 1)(2 \cos \theta + 1) < 0$$

$$\iff -\frac{1}{2} < \cos \theta < 1$$

$$\iff \left(\frac{\pi}{3} < \right) \theta < \frac{2}{3}\pi$$

であるから, S の (θ の関数としての) 増減は

θ	$\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{2}{3}\pi$	(π)
$\frac{dS}{d\theta}$	+	0	-
S	↗ 極大 ↘		

よって, S は

$$\theta = \frac{2}{3}\pi \quad (\text{答})$$

のとき最大値

$$\sin \frac{2}{3}\pi \left(1 - \cos \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

をとる。

14

(1) $f(t) = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = t \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) \quad (t > 0)$ とおくと

$$f'(t) = 1 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) + t \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t+1}$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t(t+1)} + \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{-(t+1) + t}{t(t+1)^2} = \frac{-1}{t(t+1)^2} < 0$$

$f'(t)$ は減少する連続関数であり,

$$\lim_{t \rightarrow +0} f'(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0$$

であるから,

$$f'(t) > 0$$

となって, $f(t)$ は増加関数である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \log e = 1$$

であるから,

$$f(t) = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < \log e$$

であり, 自然対数の底は 1 より大きいから

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e \quad (\text{答})$$

である。

(2) $g(t) = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t - \log e^{1 - \frac{1}{2t}} = t \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \left(1 - \frac{1}{2t}\right) \quad (t > 0)$ とおくと

$$g'(t) = f'(t) - \frac{1}{2t^2} = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2t^2}$$

$$g''(t) = \frac{-1}{t(t+1)^2} + \frac{1}{t^3}$$

$$= \frac{-t^2 + (t+1)^2}{t^3(t+1)^2}$$

$$= \frac{2t+1}{t^2(t+1)^2} > 0$$

より $g'(t)$ は増加関数であり,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g'(t) = 0$$

であるから,

$$g'(t) < 0$$

よって, $g(t)$ は減少関数であり,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ f(t) - 1 + \frac{1}{2t} \right\} = 1 - 1 + 0 = 0$$

であるから，

$$g(t) = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t - \log e^{1 - \frac{1}{2t}} > 0$$

であり，自然対数の底は 1 より大きいから

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t > e^{1 - \frac{1}{2t}} \quad (\text{答})$$

である。

15

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$) のとき

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$-\pi < x < \pi$ において $t = \tan \frac{x}{2}$ は狭義単調増加であるから, 特に逆関数 $x = \varphi(t)$ が存在する。よって, 逆関数の微分の定理 (公式) より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{1+t^2}$$

(証明おわり)

(2) $t = \tan \frac{x}{2}$ の逆関数により置換して, (1)を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \int_0^{\tan \frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t^2) + 2t + (1-t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt \\ &= [\log(t+1)]_0^1 \\ &= \log 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) (1)を用いて置換積分しなくても, 直接計算することができる。

$$\begin{aligned} \sin x + (1 + \cos x) &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} \left(\tan \frac{x}{2} + 1 \right) \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)' dt \\ &= \left[\log \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

(3) $x = \frac{\pi}{2} - \theta$ により置換積分して, 余角の公式を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)' d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx \end{aligned}$$

(証明おわり)

(4) (3)より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x+1+2\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(5) (2)と(4)を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x+\cos x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \log 2 \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + \int_0^\pi f(t) \cos(x+t) dt \\
 &= x + \int_0^\pi f(t) (\cos x \cos t - \sin x \sin t) dt \\
 &= x + \cos x \int_0^\pi f(t) \cos t dt - \sin x \int_0^\pi f(t) \sin t dt
 \end{aligned}$$

ここで,

$$a = \int_0^\pi f(t) \cos t dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b = \int_0^\pi f(t) \sin t dt \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

とおくと,

$$f(x) = x + a \cos x - b \sin x \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

③を①に代入して

$$\begin{aligned}
 a &= \int_0^\pi (t + a \cos t - b \sin t) \cos t dt \\
 &= \int_0^\pi \left(t \cos t + a \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} - \frac{b}{2} \sin 2t \right) dt \\
 &= [t \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin t dt + \left[\frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + \frac{b}{4} \cos 2t \right]_0^\pi \\
 &= 0 + [\cos x]_0^\pi + \frac{a}{2}(\pi + 0) + 0 \\
 &= -2 + \frac{\pi}{2}a \\
 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a &= 2 \quad \therefore a = \frac{4}{\pi - 2}
 \end{aligned}$$

③を②に代入して

$$\begin{aligned}
 b &= \int_0^\pi (t + a \cos t - b \sin t) \sin t dt \\
 &= \int_0^\pi \left(t \sin t + \frac{a}{2} \sin 2t - b \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt \\
 &= [t(-\cos t)]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos t) dt + \left[\frac{a}{4}(-\cos 2t) - \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^\pi \\
 &= \pi + [\sin t]_0^\pi + \frac{a}{4} \times 0 - \frac{b}{2}(\pi - 0) \\
 &= \pi - \frac{\pi}{2}b \\
 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) b &= \pi \quad \therefore b = \frac{2\pi}{\pi + 2}
 \end{aligned}$$

③に代入して

$$f(x) = x + \frac{4}{\pi - 2} \cos x - \frac{2\pi}{\pi + 2} \sin x \quad (\text{答})$$

17

(1) 部分積分することにより, $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin x \, dx \\
 &= \left[\sin^n x (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sin^{n-1} x \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\
 &= 0 + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\
 &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x - \sin^{n+1} x) \, dx \\
 &= n(I_{n-1} - I_{n+1}) \\
 \therefore (n+1)I_{n+1} &= nI_{n-1} \quad (\text{証明おわり})
 \end{aligned}$$

(2) (1) で得られた等式の両辺に I_n をかけると

$$(n+1)I_{n+1}I_n = nI_nI_{n-1}$$

となるから, nI_nI_{n-1} は定数であり,

$$nI_nI_{n-1} = 1 \cdot I_1I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{答})$$

(3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において

$$0 < \sin x < 1 \quad \therefore 0 < \sin^{n+1} x < \sin^n x < 1$$

被積分関数の大小関係は定積分の計算後も変わらないから

$$0 < I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx < I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (\text{証明おわり})$$

(注) $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$ というだけであれば $I_{n+1} < I_n$ とは言えない。不等式の等号成立条件を満たさないことを指摘する必要がある。

(4) (3) より

$$nI_{n+1}I_n < nI_n^2 < nI_nI_{n-1}$$

(2) より $nI_{n+1}I_n = \frac{n}{n+1}(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{n+1}$, $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ であるから,

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{n+1} < nI_n^2 < \frac{\pi}{2}$$

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}$ であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{答})$$

18

$$(1) \quad a_1 = \int_1^e \log x \, dx = [x(\log x - 1)]_1^e = 1 \quad (\text{答})$$

(2) $1 \leq x \leq e$ において $0 \leq \log x \leq 1$ であるから,

$$0 \leq (\log x)^n \leq 1$$

定積分の性質より

$$0 \leq \int_1^e (\log x)^n \, dx \leq \int_1^e dx = e - 1$$

各辺を $n! \, (> 0)$ で割って

$$0 \leq a_n \leq \frac{e-1}{n!}$$

(証明おわり)

(3) $n \geq 2$ のとき, 部分積分することにより

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} \int_1^e 1 \cdot (\log x)^n \, dx \\ &= \frac{1}{n!} \left\{ [x(\log x)^n]_1^e - \int_1^e x \cdot n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{n!} \left\{ e - n \int_1^e (\log x)^{n-1} \, dx \right\} \\ &= \frac{e}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \int_1^e (\log x)^{n-1} \, dx = \frac{e}{n!} - a_{n-1} \end{aligned}$$

(証明おわり)

(4) (3)より

$$\begin{aligned} a_n + a_{n-1} &= \frac{e}{n!} \quad (n \geq 2) \\ (-1)^n a_n - (-1)^{n-1} a_{n-1} &= e \cdot \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} &= \frac{1}{e} \sum_{k=2}^n \{(-1)^k a_k - (-1)^{k-1} a_{k-1}\} \\ &= \frac{1}{e} \{(-1)^n a_n - (-a_1)\} \\ &= \frac{(-1)^n}{e} a_n + \frac{1}{e} \quad ((1) \text{より } a_1 = 1) \end{aligned}$$

(2)より

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^n}{e} a_n \right| = \frac{1}{e} a_n \leq \frac{e-1}{n!e}$$

であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e-1}{n!e} = 0$ であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{e} a_n = 0$$

よって、題意の無限級数は収束し、その和は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \quad (\text{答})$$

(注) 一般的には $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ を問われることが多いが、 a_0 を別個に考えるという本質的ではない議論を増やしたり、 $0! = 1$ を誤解する恐れがあることに配慮したものと思われる。結果的には注意深く議論できるかが試されているが、偶然 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ となることもあり、戸惑った人も多いかもしれない。

19

(1) $\triangle AOP_k$ の外接円の方程式は

$$(x-1)(x-0) + (y-0)\left(y - \frac{k}{n}\right) = 0$$

$$x^2 - x + y^2 - \frac{k}{n}y = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{k}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$$

 $\triangle AOP_k$ の外接円の面積 b_k は

$$b_k = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$$

数列の和の公式を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4n} \left(\sum_{k=1}^n 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4n} \left\{ n + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2\right) \\ &= \frac{\pi}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)(i) $\sqrt{x^2+1} + x = t$ とおいたとき,

$$t - x = \sqrt{x^2+1}$$

$$(t-x)^2 = x^2+1$$

$$t^2 - 2tx = 1$$

$$2tx = t^2 - 1 \quad \therefore x = \frac{t^2-1}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

よって, 求める式は

$$\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad (\text{答})$$

(ii) $x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ により置換すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x^2+1} \, dx &= \int_1^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \frac{dx}{dt} \, dt \\ &= \int_1^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \, dt \\ &= \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{2}+1} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) \, dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2}t^2 + 2 \log t - \frac{1}{2t^2} \right]_1^{\sqrt{2}+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{2}+1)^2 - (\sqrt{2}-1)^2}{8} + \frac{1}{2} \log(\sqrt{2}+1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \log(1+\sqrt{2}) \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(3) $\triangle AOP_k$ は $\angle AOP_k$ を直角とする直角三角形であるから, 内接円の半径 c_k は

$$c_k = \frac{OA + OP_k - AP_k}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{k}{n} - \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right\}$$

であり, 区分布積法と (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{k}{n} - \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + x - \sqrt{1 + x^2}) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(1 + x)^2 \right]_0^1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ 3 - \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) \right\} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

20

(1) $f(x) = \frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x$ を微分すると,

$$f'(x) = e^2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - (\log x) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^2(2 - \log x)}{2x\sqrt{x}}$$

$x > 0$ において

$$f'(x) > 0 \iff 2 - \log x > 0 \iff \log x < 2 = \log e^2 \iff x < e^2$$

であるから, $f(x)$ の増減は

x	(0)	e^2	(∞)		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	($-\infty$)	\nearrow	極大	\searrow	(0)

$f(x)$ の極値は

極大値 $f(e^2) = 2e$, 極小値なし (答)

$f'(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^2}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{x} \cdot x\sqrt{x} - (2 - \log x) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3} \\ &= e^2 \cdot \frac{-2 - 3(2 - \log x)}{4x^2\sqrt{x}} \\ &= \frac{e^2(3\log x - 8)}{4x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$f''(x)$ は $x = e^{\frac{8}{3}}$ で符号を変えるから, $x = e^{\frac{8}{3}}$ で曲線 $y = f(x)$ は凹凸を変える。

$$f\left(e^{\frac{8}{3}}\right) = e^{2 - \frac{4}{3}} \log e^{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3} e^{\frac{2}{3}}$$

曲線 $y = f(x)$ の変曲点の座標は

$$\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3} e^{\frac{2}{3}}\right) \quad (\text{答})$$

(2) $0 \leq y \leq f(x)$ かつ $0 < x \leq e^2$ となるのは,

$$1 \leq x \leq e^2$$

の範囲であるから, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^2} \frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x \, dx \\ &= e^2 \left[2\sqrt{x} \log x \right]_1^{e^2} - e^2 \int_1^{e^2} 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= e^2 \cdot 2e \cdot 2 - 2e^2 \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \\ &= 4e^3 - 2e^2 \left[2\sqrt{x} \right]_1^{e^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4e^3 - 2e^2(2e - 2) \\
 &= 4e^2 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) (2)で定めた領域を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の堆積 V は

$$\begin{aligned}
 V &= \int_1^{e^2} \pi \left(\frac{e^2}{\sqrt{x}} \log x \right)^2 dx \\
 &= \pi e^4 \int_1^{e^2} (\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \pi e^4 \left[\frac{1}{3} (\log x)^3 \right]_1^{e^2} \\
 &= \frac{8}{3} \pi e^4 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

21

(1) $\frac{dx}{dt} = \cos t = 0$ ($0 \leq t \leq \pi$) となるのは,

$$t = \frac{\pi}{2}$$

のときである。加法定理を用いて y を変形すると

$$\begin{aligned} y &= \sin t \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(t + t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(t - t + \frac{\pi}{6}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

$\frac{dy}{dt} = \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ($-\frac{\pi}{6} \leq 2t - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi - \frac{\pi}{6}$) となるのは,

$$2t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

のときであり,

$$t = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi$$

$\frac{dx}{dt} = 0$ または $\frac{dy}{dt} = 0$ となる t の値は

$$t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi \quad (\text{答})$$

(2) $0 < t < \pi$ において

$$\frac{dx}{dt} = \cos t > 0 \iff 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) > 0$$

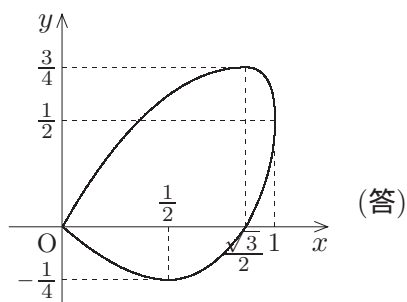
$$\iff -\frac{\pi}{6} < 2t - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{3}{2}\pi < 2t - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\iff 0 < t < \frac{\pi}{3} \text{ または } \frac{5}{6}\pi < t < \pi$$

であるから,

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\frac{dx}{dt}$	+		+	0	-
$\frac{dy}{dt}$	+	0	-	-	0
C	$(0, 0) \nearrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right) \searrow \left(1, \frac{1}{2}\right) \swarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \nwarrow (0, 0)$				

C の概形は



- (3) C の $y \leq 0$ の部分は, C の $\frac{2}{3}\pi \leq t \leq \pi$ の部分である。これを $y = f(x)$ とおくと, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \{-f(x)\} dx \\
 &= -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin t \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t\right) \cos t dt \\
 &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 t (\cos t)' + \frac{1}{2} \sin^2 t (\sin t)' \right\} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2\sqrt{3}} \cos^3 t + \frac{1}{6} \sin^3 t \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ (-1)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \right\} + \frac{1}{6} \left\{ 0 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \right\} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{7}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

22

(1) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = a \geq 1 \ (x \geq 0)$ を解くと,

$$e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0$$

$$(e^x - a)^2 = a^2 - 1$$

$$e^x - a = \pm \sqrt{a^2 - 1} \quad \therefore e^x = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$a = 1$ のとき $\sqrt{a^2 - 1} = 0$, $a > 1$ のとき $a - \sqrt{a^2 - 1} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} < 1$,

$e^x \geq e^0 = 1$ であるから,

$$e^x = a + \sqrt{a^2 - 1}$$

に定まり,

$$x = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = a \ (x \geq 0)$ を解くと,

$$e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0$$

$$(e^x - a)^2 = a^2 + 1$$

$$e^x - a = \pm \sqrt{a^2 + 1} \quad \therefore e^x = a \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

$e^x > 0$ より

$$e^x = a + \sqrt{a^2 + 1} \quad \therefore x = \log(a + \sqrt{a^2 + 1})$$

$\alpha = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$, $\beta = \log(a + \sqrt{a^2 + 1})$ とおくと, D_a の面積 S_a は

$$\begin{aligned} S_a &= \int_0^\alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx + a(\beta - \alpha) - \int_0^\beta \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx \\ &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^\alpha + a(\beta - \alpha) - \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]_0^\beta \\ &= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} + a(\beta - \alpha) - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + 1 \\ &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 1} - (a - \sqrt{a^2 - 1})}{2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{a^2 + 1} + a + \sqrt{a^2 + 1} - a}{2} + 1 \\ &= a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{a^2 + 1} + 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} &= a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{a^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \\ &= a \log \left(1 + \frac{\sqrt{a^2 + 1} - \sqrt{a^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right) \\ &= a \log \left(1 + \frac{2}{(a + \sqrt{a^2 - 1})(\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 - 1})} \right) \end{aligned}$$

$(a + \sqrt{a^2 - 1})(\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 - 1}) = x$ とおくと ,

$$a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2a}{x} \cdot \frac{x}{2} \log \left(1 + \frac{2}{x} \right)$$

$a \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a}{x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right)(\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 - 1})} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{x}{2} \log \left(1 + \frac{2}{x} \right) = \log e = 1$$

であるから ,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} = 0$$

また ,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} (\sqrt{a^2 - 1} - \sqrt{a^2 + 1}) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^2 - 1 - (a^2 + 1)}{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{a^2 + 1}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{a^2 + 1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから , (1) より

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S_a = 1 \quad (\text{答})$$

(注) $a \log \frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$ の変形は一見難しそうであるが , $a \rightarrow \infty$ のときの不定形

が $\infty \times 0$ であるから , 基本通り $\frac{1}{h} \log(1 + h)$ の形を作ればよいだけである。

見かけや作業量に惑わされずに基本に徹することの大切さが実感できる。

23

(1) 平面 $x = t$ による V の切り口は

$$x^2 + t^2 \leq 1 \text{ かつ } t \geq y \text{ かつ } t \geq -y$$

$$\therefore -\sqrt{1-t^2} \leq x \leq \sqrt{1-t^2} \text{ かつ } -t \leq y \leq t \quad \dots\dots (*)$$

 $0 \leq t \leq 1$ のとき, 断面積 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\sqrt{1-t^2} \times 2t = 4t\sqrt{1-t^2}$$

$$t = \sin \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおくと,}$$

$$S(t) = 4 \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 4 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin 2\theta$$

 $0 \leq 2\theta \leq \pi$ より, $S(t)$ は

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大}$$

であり, 最大値は

$$S\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = 2 \quad (\text{答})$$

(別法) $S(t)$ を微分して増減を調べる方針で最大値を求めてもよい。詳細は省略する。(2) 切り口 $(*)$ の存在条件は

$$1 - t^2 \geq 0 \text{ かつ } -t \leq t$$

であり, V の存在範囲 (平面 $z = t$ による切り口が存在する範囲) は

$$0 \leq t \leq 1$$

である。よって, V の体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 4t\sqrt{1-t^2} dt \\ &= -2 \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} (1-t^2)' dt \\ &= -2 \left[\frac{2}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) (1)の問題文に $0 \leq t \leq 1$ と書かれているが, 実際の存在範囲より狭めて仮定されている可能性もあるので, (2)において改めて存在範囲をチェックする必要がある。上の解答では定石通りの調べ方をしているが, 本問では

$$z \geq y \text{ かつ } z \geq -y \iff z \geq |y|$$

であるから, 立体 V が $0 \leq z \leq 1$ の範囲内にあることは直観的にわかるであろう。

24

(1) $0 \leq 2\theta \leq \pi$ より, $y = \sin 2\theta$ は $2\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大, $2\theta = 0, \pi$ のとき最小となる。 $\theta = \frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{2}$ のときの $x = 3 \cos \theta$ を求めて, 曲線 C 上で y 座標が最大となる点は $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 1\right)$, 最小となる点は $(3, 0), (0, 0)$ (答)(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ では

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

であるから, $x = 3 \cos \theta$ のとき

$$y = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{2}{9} x \sqrt{9 - x^2}$$

 $0 \leq 3 \cos \theta \leq 3, \sin 2\theta \geq 0$ であるから, 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \frac{2}{9} x \sqrt{9 - x^2} dx \\ &= -\frac{1}{9} \int_0^3 (9 - x^2)^{\frac{1}{2}} (9 - x^2)' dx \\ &= -\frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\ &= 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \pi \left(\frac{2}{9} x \sqrt{9 - x^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{4}{81} \pi \int_0^3 (9x^2 - x^4) dx \\ &= \frac{4}{81} \pi \left[3x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^3 \\ &= \frac{8}{5} \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

25

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \overrightarrow{AB} &= (0, 3, 0) - (2, 1, 2) = (-2, 2, -2) \\
 \overrightarrow{AC} &= (0, -3, 0) - (2, 1, 2) = (-2, -4, -2) \\
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -2 \times (-2) + 2 \times (-4) - 2 \times (-2) = 0
 \end{aligned}$$

より

$$\angle BAC = 0^\circ \quad (\text{答})$$

(2) 点 P, Q はそれぞれ線分 BA, CA を $h : 2 - h$ に内分するから

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} &= \frac{(2-h)\overrightarrow{OB} + h\overrightarrow{OA}}{h + (2-h)} \\
 &= \frac{2-h}{2}(0, 3, 0) + \frac{h}{2}(2, 1, 2) = (h, 3-h, h) \\
 \overrightarrow{OQ} &= \frac{2-h}{2}(0, -3, 0) + \frac{h}{2}(2, 1, 2) = (h, 2h-3, h)
 \end{aligned}$$

求める点の座標は

$$P(h, 3-h, h), \quad Q(h, 2h-3, h) \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad (3-h) - (2h-3) = 3(2-h) \geq 0$$

を考えて, 点 $(h, 0, 0)$ と線分 PQ の距離 d は

$$d = \begin{cases} h & \left(0 \leq h \leq \frac{3}{2}\right) \\ \sqrt{(2h-3)^2 + h^2} = \sqrt{5h^2 - 12h + 9} & \left(\frac{3}{2} \leq h \leq 2\right) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(4) 題意の回転体を平面 $x = h$ ($0 \leq h \leq 2$) により切ったときの断面積を $S(h)$ とすると, (2), (3) の考察を参考にして, $0 \leq h \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$S(h) = \pi \{(3-h)^2 + h^2\} - \pi h^2 = \pi(h-3)^2$$

 $\frac{3}{2} \leq h \leq 2$ のとき

$$S(h) = \pi \{(3-h)^2 + h^2\} - \pi \{(2h-3)^2 + h^2\} = \pi(h-3)^2 - \pi(2h-3)^2$$

求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^2 S(h) dh \\
 &= \pi \int_0^2 (h-3)^2 dh - \pi \int_{\frac{3}{2}}^2 (2h-3)^2 dh \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3}(h-3)^3 \right]_0^2 - \pi \left[\frac{1}{6}(2h-3)^3 \right]_{\frac{3}{2}}^2 \\
 &= \frac{\pi}{3}(-1+27) - \frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{17}{2}\pi \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

26

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^{3x} + 4e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} dx &= \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^x(e^{2x} + 1) + 4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} dx \\
 &= \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx + 2 \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} dx
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx &= \int_{\log 1}^{\log \sqrt{3}} \frac{1}{(e^x)^2 + 1} (e^x)' dx \\
 &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} (\tan \theta)' d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} dx &= \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{(e^{2x} + 1)'}{(e^{2x} + 1)^2} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{e^{2x} + 1} \right]_0^{\log \sqrt{3}} \\
 &= -\frac{1}{3 + 1} + \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^{3x} + 4e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(2) $f(t)$ は連続関数で, $\frac{t}{(t^2 + 1)f(t)}$ も連続関数であるから,

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{(t^2 + 1)f(t)} dt + 1 \text{ は微分可能}$$

である。 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)f(x)}$$

$$2f(x)f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\int_0^x 2f(t)f'(t) dt = \int_0^x \frac{2t}{t^2 + 1} dt = \int_0^x \frac{(t^2 + 1)'}{t^2 + 1} dt$$

$$f(x)^2 - f(0)^2 = \log(x^2 + 1) - \log 1$$

$$f(0) = \int_0^0 \frac{t}{(t^2 + 1)f(t)} dt + 1 = 1 \text{ であるから}$$

$$f(x)^2 = 1 + \log(x^2 + 1)$$

$$f(x) > 0 \text{ より}$$

$$f(x) = \sqrt{1 + \log(x^2 + 1)} \quad (\text{答})$$

27

- (1) 楕円 C を ($y = 0$ を中心として) y 軸方向に $\frac{2}{a}$ 倍すると

$$\text{円 } C' : x^2 + y^2 = 4$$

になり, 点 P は点 $P' \left(x_1, \frac{2}{a} y_1 \right)$ に移る。点 P' における円 C' の接線 ℓ' は, 点 P' を通り, OP' に垂直な直線であるから, ℓ' の方程式は

$$x_1(x - x_1) + \frac{2}{a} y_1 \left(y - \frac{2}{a} y_1 \right) = 0$$

$$x_1 x + \frac{2}{a} y_1 y = x_1^2 + \left(\frac{2}{a} y_1 \right)^2 = 4$$

これを y 軸方向に $\frac{a}{2}$ することにより, P における C の接線の方程式は

$$x_1 x + \frac{2}{a} y_1 \cdot \frac{2}{a} y = 4 \quad \therefore \frac{x_1}{4} x + \frac{y_1}{a^2} y = 1$$

よって, 直線 ℓ は点 P において楕円 C に接する。 (証明おわり)

(別法) 楕円は円を一定方向にのみ伸縮したものであるため, 楕円の接線は上のように導くのが簡単であるが, 放物線や双曲線の場合には使えない。そこで, どの曲線にも共通する解法も記しておくことにする。

点 $P(x_1, y_1)$ を通る直線の方程式は, 媒介変数 t を用いて

$$x = x_1 + pt, \quad y = y_1 + qt \quad ((p, q) \text{ は方向ベクトル})$$

と表される。楕円 C の式に代入すると

$$\frac{(x_1 + pt)^2}{4} + \frac{(y_1 + qt)^2}{a^2} = 1$$

$$\left(\frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{a^2} \right) t^2 + 2 \left(\frac{x_1 p}{4} + \frac{y_1 q}{a^2} \right) t + \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1$$

$$\left(\frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{a^2} \right) t^2 + 2 \left(\frac{x_1 p}{4} + \frac{y_1 q}{a^2} \right) t = 0$$

この直線が点 P における C の接線であるとすれば, $t = 0$ を重解とするから,

$$\frac{x_1 p}{4} + \frac{y_1 q}{a^2} = 0 \quad \therefore (p, q) \perp \left(\frac{x_1}{4}, \frac{y_1}{a^2} \right)$$

よって, 点 P における楕円 C の接線の方程式は

$$\frac{x_1}{4} (x - x_1) + \frac{y_1}{a^2} (y - y_1) = 0$$

$$\therefore \frac{x_1}{4} x + \frac{y_1}{a^2} y = \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1$$

(証明おわり)

- (2) 楕円 C の焦点の座標は

$$F(\sqrt{4 - a^2}, 0), \quad F'(-\sqrt{4 - a^2}, 0)$$

点と直線の距離公式より

$$FH = \frac{\left| \frac{x_1}{4} \sqrt{4-a^2} + \frac{y_1}{a^2} \cdot 0 - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{a^2}\right)^2}} = \frac{a^2 |x_1 \sqrt{4-a^2} - 4|}{\sqrt{a^4 x_1^2 + 16 y_1^2}}$$

$$-2 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq \sqrt{4-a^2} \leq 2 \text{ より}$$

$$FH = \frac{a^2(4 - x_1 \sqrt{4-a^2})}{\sqrt{a^4 x_1^2 + 16 y_1^2}}$$

$\sqrt{4-a^2}$ を $-\sqrt{4-a^2}$ に置き換えて,

$$F'H = \frac{a^2(4 + x_1 \sqrt{4-a^2})}{\sqrt{a^4 x_1^2 + 16 y_1^2}}$$

2点間の距離公式より

$$\begin{aligned} FP^2 &= (x_1 - \sqrt{4-a^2})^2 + y_1^2 \\ &= (x_1 - \sqrt{4-a^2})^2 + a^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{4}\right) \\ &= \frac{4-a^2}{4} x_1^2 - 2x_1 \sqrt{4-a^2} + (4-a^2) + a^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x_1 - 2\right)^2 \end{aligned}$$

$$-2 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq \sqrt{4-a^2} \leq 2 \text{ より}$$

$$FP = \left| \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x_1 - 2 \right| = 2 - \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x_1 = \frac{4 - x_1 \sqrt{4-a^2}}{2}$$

$\sqrt{4-a^2}$ を $-\sqrt{4-a^2}$ に置き換えて,

$$F'P = \frac{4 + x_1 \sqrt{4-a^2}}{2}$$

以上より

$$\frac{FH}{FP} = \frac{F'H}{F'P} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^4 x_1^2 + 16 y_1^2}}$$

であり, 三平方の定理より 3 辺とも長さの比が等しくなるから,

$$\triangle PHF \quad \triangle PH'F'$$

である。

(証明おわり)

(注) 楕円の基本的な性質として

$$\angle HPF = \angle H'PF'$$

が成り立つが, 本問は事実上この定理の証明である。それゆえ, この定理を用いて本問を示すのは循環論法となり, 正解とは認められない。

(3) $\triangle PHF$ と $\triangle PH'F'$ の面積比が $1:4$ であるとき, 相似比は $1:2$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{FP}{F'P} &= \frac{4 - x_1 \sqrt{4-a^2}}{4 + x_1 \sqrt{4-a^2}} = \frac{1}{2} \\ 2(4 - x_1 \sqrt{4-a^2}) &= 4 + x_1 \sqrt{4-a^2} \end{aligned}$$

$$3x_1\sqrt{4-a^2} = 4$$

$$\therefore x_1 = \frac{4}{3\sqrt{4-a^2}}$$

このような点 P ($y_1 \neq 0$) が存在するための条件は

$$(0 <) \frac{4}{3\sqrt{4-a^2}} < 2$$

$$\frac{2}{3} < \sqrt{4-a^2}$$

$$\frac{4}{9} < 4 - a^2 \quad \therefore a^2 < 4 - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}$$

$0 < a < 2$ のもとで ,

$$0 < a < \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答})$$

28

(1) 点 $A\left(\frac{a^2}{2}, a\right)$ における放物線 $y^2 = 2x$ の接線の方程式は

$$ay = x + \frac{a^2}{2}$$

点 $B\left(\frac{b^2}{2}, b\right)$ における放物線 $y^2 = 2x$ の接線の方程式は

$$by = x + \frac{b^2}{2}$$

この 2 接線の交点を $P(X, Y)$ とするとき,

$$\begin{cases} aY = X + \frac{a^2}{2} & \dots\dots ① \\ bY = X + \frac{b^2}{2} & \dots\dots ② \end{cases}$$

① - ② より

$$(a - b)Y = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$$

$a > b$ より $a - b \neq 0$ であるから, 両辺 $a - b$ で割って

$$Y = \frac{\boxed{a+b}}{2} \quad (\text{㉞}) \quad \dots\dots ③$$

①に代入して

$$X = a \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{\boxed{ab}}{2} \quad (\text{㉟}) \quad \dots\dots ④$$

$A\left(\frac{9}{2}, 3\right), B\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ のとき, $a = 3, b = \frac{1}{2}$ として

$$P\left(\underbrace{\boxed{\frac{3}{4}}}_{(\text{㊱})}, \underbrace{\boxed{\frac{7}{4}}}_{(\text{㊲})}\right)$$

$\cos \angle APB$ を計算すると,

$$\overrightarrow{PA} = \left(\frac{a^2}{2}, a\right) - \frac{1}{2}(ab, a+b) = \frac{a-b}{2}(a, 1)$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(\frac{b^2}{2}, b\right) - \frac{1}{2}(ab, a+b) = \frac{b-a}{2}(b, 1)$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\frac{1}{4}(a-b)^2(ab+1)$$

$a > b$ より

$$|\overrightarrow{PA}| = \frac{a-b}{2}\sqrt{a^2+1}, \quad |\overrightarrow{PB}| = \frac{a-b}{2}\sqrt{b^2+1}$$

であるから,

$$\cos \angle APB = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} = -\frac{ab+1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$$

$a = 3, b = \frac{1}{2}$ のとき

$$\cos \angle APB = -\frac{3 \times \frac{1}{2} + 1}{\sqrt{3^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leq \angle APB \leq \pi$ より

$$\angle APB = \boxed{\frac{3}{4}\pi} \text{ (ㄱ)}$$

$\angle APB = \frac{3}{4}\pi$ を保ったまま 2 点 A, B を動かすとき

$$-\frac{ab+1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2(ab+1)^2 = (a^2+1)(b^2+1)$$

b についての 2 次方程式を解くと考えて,

$$(a^2-1)b^2 + 4ab - (a^2-1) = 0$$

$$(a+1)(a-1)b^2 + \{(a+1)^2 - (a-1)^2\}b - (a+1)(a-1) = 0$$

$$\{(a+1)b - (a-1)\}\{(a-1)b + a+1\} = 0$$

$$(ab+1-a+b)(ab+1+a-b) = 0$$

$$ab+1 = \frac{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{2}} > 0, \quad a-b > 0 \text{ より}$$

$$ab+1 = a-b \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

点 $P(X, Y)$ の軌跡は,

$$a > b \text{ かつ } \textcircled{3} \text{ かつ } \textcircled{4} \text{ かつ } \textcircled{5}$$

が表す図形である。③は

$$a+b=2Y$$

④かつ⑤より

$$a-b=ab+1=2X+1$$

a, b の連立方程式として解くことにより, $a+b=2Y$ かつ $a-b=2X+1$ は

$$a = X + Y + \frac{1}{2}, \quad b = Y - X - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

と同値であるから, 点 $P(X, Y)$ の軌跡は

$$\textcircled{6} \text{ かつ } a > b \text{ かつ } \textcircled{4}$$

が表す図形に言い換えられる。⑥を $a > b$ に代入して

$$X + Y + \frac{1}{2} > Y - X - \frac{1}{2} \quad \therefore X > -\frac{1}{2}$$

⑥を④に代入して

$$\begin{aligned} 2X &= \left(Y + X + \frac{1}{2}\right) \left(Y - X - \frac{1}{2}\right) \\ &= Y^2 - X^2 - X - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$X^2 + 3X - Y^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 - Y^2 = 2$$

よって、点 P の軌跡は

$$\text{双曲線 } \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - y^2 = 2 \text{ の } x > -\frac{1}{2} \text{ の部分}$$

であるが、双曲線の図形的特徴から、実際の存在範囲は

$$X \geq \boxed{-\frac{3}{2} + \sqrt{2}} \quad (\text{リ})$$

である。また、双曲線 $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - y^2 = 2$ は、

$$\text{双曲線 } \frac{\boxed{\frac{x^2}{2}}}{(\text{ル})} + \frac{\boxed{\frac{y^2}{2}}}{(\text{レ})} = 1 \text{ を } x \text{ 軸方向に } \boxed{-\frac{3}{2}} \text{ だけ平行移動}$$

したものである。