

# 方程式 $27x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2$ について

大塚美紀生

[2]において、A.Wakulicz は方程式  $x^3 + y^3 = 2z^3$  の整数解問題を解決するため、<sup>注1</sup> 方程式  $27x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2$  が自然数解を持たないことを示したが、その証明にはいわゆるオイラーメソッド<sup>注2</sup> が用いられている。本稿では、パラメタの設定を変え、新たなアイデアを盛り込む<sup>注3</sup> ことで、見通しの良い別証明を与えることにする。

## 定理 方程式

$$27x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

## 定理の証明

(1)を満たす自然数(正の整数)  $x, y, z$  が存在すると仮定して、 $x$  はそのとり得る最小の値であるとする。

$d = \gcd(x, y) > 1$  とすると、 $x = dx_1, y = dy_1$  ( $x_1, y_1 \in \mathbf{N}$ ) と表されて、(1)より  $d^4 | z^2$  であるから、 $z = d^2 z_1$  ( $z_1 \in \mathbf{N}$ ) と表される。このとき、

$$27x_1^4 + 9x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

となるので、はじめから

$$\gcd(x, y) = 1$$

であるとして差し支えない。

ここで  $3 | y$  であるとする、(1)より

$$3 | y \implies 3^3 | z^2 \implies 3^2 | z \implies 3^4 | 3^3 x^4 \implies 3 | x$$

となって  $x$  と  $y$  が互いに素であることに反するから、

$y$  は 3 で割り切れない。

$3^3 x^4 + 3^2 x^2 y^2 = z^2 - y^4 = (z + y^2)(z - y^2)$  より  $z + y^2$  と  $z - y^2$  の少なくとも一方は 3 で割り切れるが、

$$(z + y^2) - (z - y^2) = 2y^2$$

は 3 で割り切れないから、

$z + y^2$  と  $z - y^2$  の一方は 3 で割り切れ、他方は 3 で割り切れない。

1°  $3 \nmid z + y^2, 3 | z - y^2$  のとき

$$\frac{z + y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数}) \quad (2)$$

とおくと、 $3 \nmid m$  であり、

$$z = \frac{m}{n} x^2 - y^2$$

(1)に代入して

$$\begin{aligned}27x^4 + 9x^2y^2 &= \frac{m^2}{n^2}x^4 - \frac{2m}{n}x^2y^2 \\ \left(9 + \frac{2m}{n}\right)x^2y^2 &= \left(\frac{m^2}{n^2} - 27\right)x^4 \\ \therefore \frac{y^2}{x^2} &= \frac{m^2 - 27n^2}{n(9n + 2m)}\end{aligned}\tag{3}$$

$$m^2 - 27n^2 + 3n(9n + 2m) = m(m + 6n) \text{ より}$$

$$\gcd(m^2 - 27n^2, n(9n + 2m)) = \gcd(n(9n + 2m), m(m + 6n))$$

$$\gcd(m, n) = 1 \text{ および } 3 \nmid m \text{ より}$$

$$\gcd(n, m + 6n) = \gcd(n, m) = 1$$

$$\gcd(9n + 2m, m) = \gcd(9n, m) = 1$$

$$9n + 2m = 2(m + 6n) - 3n \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\gcd(9n + 2m, m + 6n) &= \gcd(m + 6n, 3n) \\ &= \gcd(m, 3n) \\ &= 1\end{aligned}$$

であるから, (3)より

$$x^2 = n(9n + 2m) > 0\tag{4}$$

$$y^2 = m^2 - 27n^2\tag{5}$$

に定まる。

$$(5) \iff (m + y)(m - y) = 27n^2$$

$$3 \nmid 2m = (m + y) + (m - y)$$

より,  $m + y$  と  $m - y$  の一方は 3 で割り切れ, 他方は 3 で割り切れないから,

$$\begin{cases} 3 \nmid m + y \text{ のとき } \frac{m + y}{n} = \frac{l}{k} \\ 3 \nmid m - y \text{ のとき } \frac{m - y}{n} = \frac{l}{k} \end{cases} \quad (k \text{ と } l \text{ は互いに素な自然数})\tag{6}$$

とおくと, いずれの場合も (5)より

$$\frac{l^2}{k^2}n^2 - \frac{2l}{k}mn = -27n^2$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{k}{2l} \left( \frac{l^2}{k^2} + 27 \right) = \frac{27k^2 + l^2}{2kl}$$

(4)より

$$\frac{x^2}{n^2} = 9 + 2 \cdot \frac{m}{n} = \frac{27k^2 + 9kl + l^2}{kl}\tag{7}$$

$k$  と  $l$  は互いに素であるから

$$\gcd(k, 27k^2 + 9kl + l^2) = \gcd(k, l^2) = 1$$

(6)より  $3 \nmid l$  であるから

$$\gcd(l, 27k^2 + 9kl + l^2) = \gcd(l, 27k^2) = 1$$

よって, (7)より

$$k = u^2, \quad l = v^2, \quad 27k^2 + 9kl + l^2 = w^2 \quad (8)$$

を満たす自然数  $u, v, w$  が存在し,  $k$  と  $l$  を消去すると

$$27u^4 + 9u^2v^2 + v^4 = w^2$$

(8), (6), (2)より

$$u^2 = k \leq n \leq x^2$$

$x$  の最小性より  $u = x, \quad k = n = x^2$  となり, (7)より

$$1 = k \cdot \frac{x^2}{n^2} = \frac{27k^2 + 9kl + l^2}{l} = \frac{27k^2}{l} + 9k + l$$

であるから  $\frac{27k^2}{l}$  は整数であり,  $\gcd(k, l) = 1, \quad 3 \nmid l$  より

$$l = 1$$

このとき

$$27k^2 + 9k = 9k(3k + 1) = 0$$

となって,  $k > 0$  に反する。

2°  $3 \mid z + y^2, \quad 3 \nmid z - y^2$  のとき

$(z - y^2)(z + y^2) = 27x^4 + 9x^2y^2$  より  $z - y^2 > 0$  であることにも注意して

$$\frac{z - y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な自然数}) \quad (9)$$

とおくと,  $3 \nmid m$  であり,

$$z = \frac{m}{n}x^2 + y^2$$

(1)に代入して

$$27x^4 + 9x^2y^2 = \frac{m^2}{n^2}x^4 + \frac{2m}{n}x^2y^2$$

$$\left(9 - \frac{2m}{n}\right)x^2y^2 = \left(\frac{m^2}{n^2} - 27\right)x^4$$

$$\therefore \frac{y^2}{x^2} = \frac{m^2 - 27n^2}{n(9n - 2m)} \quad (10)$$

$m^2 - 27n^2 + 3n(9n - 2m) = m(m - 6n)$  より

$$\gcd(m^2 - 27n^2, n(9n - 2m)) = \gcd(n(9n - 2m), m(m - 6n))$$

$\gcd(m, n) = 1$  および  $3 \nmid m$  より

$$\gcd(n, m - 6n) = \gcd(n, m) = 1$$

$$\gcd(9n - 2m, m) = \gcd(9n, m) = 1$$

$9n - 2m = -2(m - 6n) - 3n$  より

$$\gcd(9n - 2m, m - 6n) = \gcd(m - 6n, 3n)$$

$$= \gcd(m, 3n) \\ = 1$$

であるから, (10)より

$$x^2 = \pm n(9n - 2m), \quad y^2 = \pm(m^2 - 27n^2) \quad (\text{複号同順}) \quad (11)$$

ここで,  $x$  が奇数であるとすれば,

$$27x^4 + 9x^2y^2 + y^4 \equiv 3 + y^2 + y^4 \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$$

となって(1)が成り立たない<sup>註4</sup>から,

$x$  は偶数

である。  $\gcd(x, y) = 1$  より  $y$  および  $27x^2 + 9y^2$  は奇数であり,

$$x^2(27x^2 + 9y^2) = (z + y^2)(z - y^2)$$

において  $z + y^2, z - y^2$  はともに偶数であるから, (9)より

$m$  は奇数,  $n$  は偶数

である。

$$m^2 - 27n^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

であるから, (11)より

$$y^2 = m^2 - 27n^2, \quad x^2 = n(9n - 2m)$$

に定まる。

$m > 0, n > 0, x^2 = n(9n - 2m) > 0$  より

$$0 < m < \frac{9}{2}n \quad \therefore 0 < m^2 < \frac{81}{4}n^2$$

$y^2 = m^2 - 27n^2 > 0$  より

$$27n^2 < m^2 < \frac{3}{4} \cdot 27n^2$$

であるから  $1 < \frac{3}{4}$  となって矛盾する。

以上により, 定理が証明された。

注1 どのように帰着させるかは、文献[2]を読んでいただければおわかりになると思うが、話を完結させる意味でここでも述べておこう。

$x^3 + y^3 = 2z^3$  を満たす整数  $x, y$  は偶奇が等しい ( $x - y$  は偶数である) から、

$$x = u + v, \quad y = u - v \quad (u, v \text{ は整数})$$

とおくことができ、

$$x^3 + y^3 = (u + v)^3 + (u - v)^3 = 2(u^3 + 3uv^2)$$

と変形されるから、与えられた方程式は

$$u(u^2 + 3v^2) = z^3$$

$u$  と  $v$  に共通な素因数  $p$  があるとすれば、 $p$  は  $x$  と  $y$  の公約数となるから、 $x$  と  $y$  が互いに素なら  $u$  と  $v$  も互いに素であり、

$$\gcd(u, u^2 + 3v^2) = \gcd(u, 3v^2) = \gcd(u, 3) = 1 \text{ または } 3$$

(i)  $3 \nmid u$  のとき

$u$  と  $u^2 + 3v^2$  は互いに素であるから

$$u = a^3, \quad u^2 + 3v^2 = b^3$$

を満たす整数  $a, b$  が存在し、

$$3v^2 = b^3 - a^6 = (b - a^2)^3 + 3a^2b(b - a^2)$$

$3c = b - a^2$  ( $c$  は整数) とおくことができ、

$$3v^2 = (3c)^3 + 3a^2(3c + a^2)3c$$

$$\therefore c(9c^2 + 9a^2c + 3a^4) = v^2$$

このとき  $v = 3w$  ( $w$  は整数) と表され、

$$c(3c^2 + 3a^2c + a^4) = 3w^2$$

$3c = b - a^2$ ,  $\gcd(a, b) = 1$  より  $a$  は 3 で割り切れないから、

$$c = 3d \quad (d \text{ は整数})$$

とおくことができ

$$d(27d^2 + 9a^2d + a^4) = w^2$$

ここで、 $3 \nmid a$  および

$$\gcd(a, 9d) = \gcd(a, b - a^2) = \gcd(a, b) = 1$$

より  $\gcd(a, d) = 1$  であるから

$$d = s^2, \quad 27d^2 + 9a^2d + a^4 = t^2$$

を満たす正の整数  $s, t$  が存在し、

$$27s^4 + 9s^2a^2 + a^4 = t^2$$

(ii)  $3 \mid u$  のとき

$u = 3u_1$  とおくと

$$u(u^2 + 3v^2) = 9u_1(3u_1^2 + v^2) = z^3$$

$\gcd(u, v) = 1$  より  $3 \nmid v$  であるから

$$u_1 = 3a^3, \quad 3u_1^2 + v^2 = b^3$$

を満たす整数  $a, b$  が存在し、

$$v^2 = b^3 - 27a^6 = (b - 3a^2)^3 + 3b \cdot 3a^2(b - 3a^2)$$

$c = b - 3a^2$  とおくと ,

$$v^2 = c^3 + 9(c + 3a^2)a^2c = c(27a^4 + 9a^2c + c^2)$$

$a$  と  $b$  は互いに素であるから

$$\gcd(a, c) = \gcd(a, b - 3a^2) = \gcd(a, b) = 1$$

であり ,  $3 \nmid v$  より  $b$  も  $c$  も  $3$  で割り切れないから

$$\gcd(c, 27a^4 + 9a^2c + c^2) = \gcd(c, 27a^4) = 1$$

よって ,

$$c = d^2, \quad 27a^4 + 9a^2c + c^2 = e^2$$

を満たす整数  $d, e$  が存在し ,

$$27a^4 + 9a^2d^2 + d^4 = e^2$$

注 2 正式な呼び方なのかどうかはわからないが , 整数値をとる式の比を既約分数の形で文字を置き ,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ の両辺が既約分数ならば } a = \pm c, \quad b = \pm d \text{ (複号同順)}$$

が成り立つことから新しい条件式を導く手法を , オイラーメソッドと紹介している文献を多く見かける。

注 3 文献 [1] で用いた文字設定を採用すると , うまく同じ形の式が作り出されるので , 無限降下法に持ち込むことができる。そのことと ,  $3$  で割り切れるかどうかで文字の置き方を変えたことが , 証明を見通し良くしている。とはいえ , 整数論独特の議論の長さは避けられないが。

注 4 (1)の右辺  $z^2$  についても同様に  $z^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$  であるから ,  $3, 5, 7$  のいずれにも一致しない。本稿では  $z$  は奇数であるから , 実際には  $z^2 \equiv 1 \pmod{8}$  に限定される。

## 参考文献

[ 1 ] 大塚美紀生 , 方程式  $3x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = z^2$  について ,

早稲田数学フォーラム (2010)

<http://wasmath.la.coocan.jp/3x4-3x2y2+y4=z2.pdf>

[ 2 ] A.Wakulicz, *On the equation  $x^3 + y^3 = 2z^3$* , Colloq. Math. 5, 11–15 (1957)

2011.2.12