

# 方程式 $3x^2 - 2y^2 = 1$ の正整数解について

大塚美紀生

本稿では、Pell 方程式ではない 2 次不定方程式

$$3x^2 - 2y^2 = 1$$

について考えたい。Pell 方程式<sup>注1</sup>

$$x^2 - dy^2 = 1 \quad (d \text{ は正の整数})$$

であれば、2 次体  $Q(\sqrt{d})$  において  $x + y\sqrt{d}$  のノルムが 1 であることを表し、整数解は  $Q(\sqrt{d})$  の単数と実質的に同じであるため、実 2 次体の単数群の構造から整数解が求められる。一方、 $3x^2 - 2y^2$  は 2 次体の整数のノルムとみることができない<sup>注2</sup>ので、Pell 方程式のように単数群の構造をそのまま適用することはできない。

しかしながら、[4] にみるように、2 次不定方程式の整数解は行列や漸化式により線型表現できるので、表現行列をうまく見つけさえすれば、同じように解けることが期待できる。実際、次のような結果を得る。

定理 方程式

$$3x^2 - 2y^2 = 1 \tag{1}$$

の正整数解  $(x, y)$  は、

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1 \tag{2}$$

かつ

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 4b_n & \text{注3} \\ b_{n+1} = 6a_n + 5b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{3}$$

で定まる  $(a_n, b_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) ですべて尽くされ、

$$\begin{cases} x = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n-1} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n-1}}{2\sqrt{3}} \\ y = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n-1} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n-1}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{4}$$

である。

定理の証明

まず、 $(a_n, b_n)$  が (1) の正整数解であることを、 $n$  についての数学的帰納法で示す。 $n = 1$  のときは、(2) より成り立つ。

$(a_n, b_n)$  が (1) の正整数解であるとすれば、整数は加減乗法について閉じているから、(3) より  $a_{n+1}, b_{n+1}$  も整数であり、

$$\begin{aligned} 3a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 &= 3(5a_n + 4b_n)^2 - 2(6a_n + 5b_n)^2 \\ &= 3a_n^2 - 2b_n^2 \end{aligned} \tag{5}$$

であるから， $(a_{n+1}, b_{n+1})$ も(1)の(整数)解である。また，(3)より

$$a_{n+1} = 5a_n + 4b_n > 0, \quad b_{n+1} = 6a_n + 5b_n > 0$$

であるから， $(a_{n+1}, b_{n+1})$ も(1)の正の(整数)解である。

次に，(1)の正整数解が(2)かつ(3)を満たす $(a_n, b_n)$ に限られることを示す。

$$(3) \iff \begin{cases} a_n = 5a_{n+1} - 4b_{n+1} \\ b_n = -6a_{n+1} + 5b_{n+1} \end{cases}$$

および(5)より，(1)の正整数解 $(X, Y)$ に対して $(5X - 4Y, -6X + 5Y)$ も(1)の整数解であり，

$$\begin{aligned} 5X - 4Y &= \frac{25X^2 - 16Y^2}{5X + 4Y} = \frac{25X^2 - 8(3X^2 - 1)}{5X + 4Y} = \frac{X^2 + 8}{5X + 4Y} > 0 \\ -6X + 5Y &= \frac{-36X^2 + 25Y^2}{-6X + 5Y} = \frac{-12(2Y^2 + 1) + 25Y^2}{6X + 5Y} = \frac{Y^2 - 12}{6X + 5Y} \\ Y - (-6X + 5Y) &= 2(3X - 2Y) \\ &= \frac{2(9X^2 - 4Y^2)}{3X + 2Y} \\ &= \frac{6(2Y^2 - 1) - 8Y^2}{6X + 5Y} = \frac{2(2Y^2 - 3)}{6X + 5Y} \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$Y \geq 4 \implies -6X + 5Y > 0$$

であるが，

$$2 \times 3^2 + 1 = 19 \neq 3x^2, \quad 2 \times 2^2 + 1 = 9 \neq 3x^2$$

であるから， $Y > 1$ である限りこの操作を繰り返すことができ，

$$X = x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > 0$$

$$Y = y_1 > y_2 > y_3 > \cdots > 0$$

を満たす方程式(1)の正整数解 $(x_n, y_n)$ の列が得られる。ところが， $Y$ 以下の正整数は有限個しかないからこの操作が有限で終わり，ある自然数 $N$ に対して

$$y_N = 1 = b_1$$

となる。<sup>注4</sup> このとき

$$x_N = 1 = a_1$$

であり，

$$X = x_1 = a_N, \quad Y = y_1 = b_N$$

が成り立つ。

最後に，連立漸化式(2)，(3)を解いて(4)を導く。(3)は

$$\sqrt{3} a_{n+1} + \sqrt{2} b_{n+1} = (5 + 2\sqrt{6})(\sqrt{3} a_n + \sqrt{2} b_n) \quad (6)$$

$$\sqrt{3} a_{n+1} - \sqrt{2} b_{n+1} = (5 - 2\sqrt{6})(\sqrt{3} a_n - \sqrt{2} b_n) \quad (7)$$

と変形できる。<sup>注5</sup> (6)より， $\{\sqrt{3} a_n + \sqrt{2} b_n\}$ は初項 $\sqrt{3} a_1 + \sqrt{2} b_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ，公比 $5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ の等比数列であるから，

$$\begin{aligned}\sqrt{3} a_n + \sqrt{2} b_n &= (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2\}^{n-1} \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n-1}\end{aligned}\tag{8}$$

同様に, (7)より

$$\sqrt{3} a_n - \sqrt{2} b_n = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n-1}\tag{9}$$

であるから, (8)かつ(9)を連立1次方程式として解くことにより,

$$a_n = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n-1} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n-1}}{2\sqrt{3}}$$

$$b_n = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n-1} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$$

(証明おわり)

注1 1657年, Fermat(フェルマー)が, 特にイギリスの数学者に向けて送った挑戦状として有名な問題である。今の我々には信じ難いことではあるが, 当時のイギリスの数学者には整数論の価値が認識されていなかったらしく, 整数論への関心を高めようと出題されたようである。のちに, Euler(オイラー)が誤って呼んで以来, 「Pell方程式」と呼ばれるようになったが, 実在した Pell 本人とは無関係である。

注2 2次体  $Q(\sqrt{d})$  における  $a + b\sqrt{d}$  ( $a, b$  は有理数) のノルムは  $a^2 - b^2d$  であるから,  $3x^2 - 2y^2$  に無理やり当てはめると

$$3x^2 - 2y^2 = \frac{9x^2 - 6y^2}{3} = \frac{(3x + y\sqrt{6})(3x - y\sqrt{6})}{3}$$

などとなって,  $a, b$  にあたる部分を整数にとることができない。また,

$$3x^2 - 2y^2 = (\sqrt{3}x + \sqrt{2}y)(\sqrt{3}x - \sqrt{2}y)$$

とみて, 有理数体  $Q$  に  $\sqrt{3}, \sqrt{2}$  を添加した代数体を考えるなら, ノルムは4次式になってしまう。

注3 例えば, Pell 方程式  $x^2 - 3y^2 = 1$  の正整数解  $(x_n, y_n)$  が

$$x_n + \sqrt{3}y_n = (2 + \sqrt{3})^n$$

により求められることをアレンジして, 漸化式(3)は

$$\sqrt{3} a_{n+1} + \sqrt{2} b_{n+1} = (5 + 2\sqrt{6})(\sqrt{3} a_n + \sqrt{2} b_n)$$

から導いたものである。

注4  $(X, Y) \mapsto (5X - 4Y, -6X + 5Y)$  により単調減少列が得られるというだけでは,  $y_N = 1$  を満たす自然数  $N$  が存在するとは言えない。ここでは,

$$Y > 1 \iff -6X + 5Y > 0$$

の同値関係があり， $Y > 1$ である限り作業が継続可能であることが，有限回の作業終了時には $Y = 1$ となることを意味する。

注5 証明者の立場としては，(6)に気づくことで(3)が導かれた(→注3)のだが，(3)を与えられた漸化式とする立場では，高校で習った手順に従って

$$a_{n+1} + sb_{n+1} = t(a_n + sb_n) \quad (s, t \text{ は定数})$$

とおくと，(3)より

$$t = 6s + 5, \quad st = 5s + 4$$

したがって

$$s = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad t = 5 \pm 2\sqrt{6} \quad (\text{複号同順})$$

が得られるから，(6)および(7)が導かれる。

#### 参考文献

- [1] 足立恒雄，フェルマーの大定理，筑摩書房 (2006).
- [2] J.R.Goldman (鈴木将史訳)，数学の女王 (歴史から見た数論入門)，  
共立出版 (2013)
- [3] 稲葉栄次，整数論，共立出版 (1956)
- [4] 大塚美紀生，方程式  $3x^2 + 3x + 1 = y^2$  の整数解について，  
早稲田数学フォーラム (2008)  
<http://wasmath.la.coocan.jp/3x2+3x+1=y2.pdf>