

方程式 $3x^2 - 2y^2 = z^2$ の自然数解について

大塚美紀生

[2]において、方程式 $3x^2 - 2y^2 = 1$ の自然数解を一般的に表現してすべて求めた。だからといって、方程式の $3x^2 - 2y^2 = z^2$ の自然数解がすべて把握できたわけではない。(x, y, z) = (3, 1, 5) のように、x, y が z の整数倍でないものも多数存在するからである。本稿では、方程式 $3x^2 - 2y^2 = z^2$ の自然数解の一般表示を求めたい。

定理 不定方程式

$$3x^2 - 2y^2 = z^2 \tag{1}$$

の互いに素な自然数解^{注1}は、互いに素な整数 m, n ^{注2}を用いて

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = |m^2 - 2mn - 2n^2|, \quad z = |m^2 + 4mn - 2n^2| \tag{注3}$$

と表されるものですべて尽くされる。ここで、 m は奇数である。

定理の証明

$y = z$ のとき、(1)より $x = y = z$ であり、 $m = 1, n = 0$ のときとみなせるから、以下

$$y \neq z$$

のときだけ考えればよい。 $\gcd(x, y) = d$ とすると、 $d^2 | z^2$ より $d | z$ となるから、はじめから

$$\gcd(x, y) = 1$$

であるとしてよい。^{注1}

$2 | x$ とすると、(1)より $2 | z, 2^2 | 2y^2$ であるから $2 | y$ となって $\gcd(x, y) = 1$ に反するから、

x は奇数、 z も奇数

である。 $2y^2 = 3x^2 - z^2 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$ より

y は奇数

である。特に

$$3x + 2y + z, \quad 3x - 2y - z, \quad y - z \text{ は偶数}$$

である。また、

$$(2y + z)(2y - z) = 4y^2 - z^2 = 4y^2 - (3x^2 - 2y^2) = 3(2y^2 - x^2)$$

より

$$3 | 2y + z \quad \text{または} \quad 3 | 2y - z$$

1° $2y + z$ が 3 で割り切れるとき

(1)を変形して

$$(2y + z)^2 + 2(y - z)^2 = 3(2y^2 + z^2) = 3 \cdot 3x^2$$

$$(3x)^2 - (2y + z)^2 = 2(y - z)^2$$

2と3は互いに素であるから, $6 \mid 3x \pm (2y + z)$, $6^2 \mid (y - z)^2$ であることを考え,

$$\frac{3x + 2y + z}{6} \cdot \frac{3x - 2y - z}{6} = 2 \left(\frac{y - z}{6} \right)^2 \quad (2)$$

ここで, $\frac{3x + 2y + z}{6}$, $\frac{3x - 2y - z}{6}$ がともに素数 p で割り切れるとすれば,

$$\begin{aligned} p \mid x, \quad p \mid \frac{2y + z}{3}, \quad p^2 \mid 2 \left(\frac{y - z}{6} \right)^2 \\ \implies p \mid x, \quad p \mid \frac{2y + z}{3}, \quad p \mid \frac{y - z}{6} \\ \implies p \mid x, \quad p \mid y = \frac{2y + z}{3} + \frac{y - z}{3} \end{aligned}$$

となって $\gcd(x, y) = 1$ に反するから,

$$\frac{3x + 2y + z}{6} \text{ と } \frac{3x - 2y - z}{6} \text{ は互いに素}$$

である。(2)より

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x + 2y + z}{6}, \frac{3x - 2y - z}{6}, \frac{y - z}{6} \right) \\ = (m^2, 2n^2, mn) \text{ または } (2n^2, m^2, mn) \end{aligned}$$

を満たす互いに素な(0でない)整数 m, n が存在する。^{注4} 連立方程式を解いて,

$$x = m^2 + 2n^2, \quad 2y + z = \pm 3(m^2 - 2n^2), \quad y - z = 6mn$$

ゆえに,

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = m^2 + 2mn - 2n^2, \quad z = m^2 - 4mn - 2n^2 \quad (3)$$

または

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = -m^2 + 2mn + 2n^2, \quad z = -m^2 - 4mn + 2n^2 \quad (4)$$

(4)において m を $-m$ に置き換えるか, または n を $-n$ と置き換えることにより,

(3)と(4)は一つにまとめることができ,

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = |m^2 + 2mn - 2n^2|, \quad z = |m^2 - 4mn - 2n^2| \quad (5)$$

と表される。

2° $2y - z$ が3で割り切れるとき

(1)を

$$(2y - z)^2 + 2(y + z)^2 = 3(2y^2 + z^2) = 3 \cdot 3x^2$$

と変形することにより, 1° において z を $-z$ に変えて, 全く同じ議論をすることになるから,

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = m^2 + 2mn - 2n^2, \quad z = -m^2 + 4mn + 2n^2 \quad (6)$$

または

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = -m^2 - 2mn + 2n^2, \quad z = m^2 + 4mn - 2n^2 \quad (7)$$

を満たす互いに素な(0でない)整数 m, n が存在する。絶対値を用いることにより, (6)は(3)と同じ, (7)は(4)と同じであるから, やはり(5)にまとめられる。 ■

注 1 本稿では用語を用いてはいないが，互いに素な非自明な整数解を原始解という。
 $3x^2 - 2y^2 = z^2$ を満たす前提では， x, y, z が互いに素ならば x と y は互いに素であることを証明の初めに確認しているが，一般には 6, 10, 15 のように，互いに素な 3 数のうちの 2 数が互いに素であるとは限らない。

注 2 m と n が互いに素であっても， x と y が互いに素でないこともある。例えば， $m = 1, n = 2$ のとき $x = 9, y = 3$ である。

注 3 証明は発見考察的に書かれているが， $3x^2 - 2y^2 = z^2$ を
$$(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i)(m + n\sqrt{2}i)^2 = (z + y\sqrt{2}i)(z - y\sqrt{2}i)$$
とみて，2 次体 $Q(\sqrt{2}i)$ (の整数環 $Z[\sqrt{2}i]$) における素因数分解から類推できる。

注 4 ここで， x と y が互いに素であれば， m^2 と $2n^2$ は互いに素であるから， m は奇数に限られることがわかる。

参考文献

- [1] 稲葉栄次，整数論，共立出版 (1956)
- [2] 大塚美紀生，方程式 $3x^2 - 2y^2 = 1$ の正整数解について，
早稲田数学フォーラム (2014), <http://wasmath.la.coocan.jp/3x2-2y2=1.pdf>
- [3] 大塚美紀生，ディオファントス方程式 $3x^2 = 2y^4 + z^4$ について，
早稲田数学フォーラム (2018), <http://wasmath.la.coocan.jp/3x2=2y4+z4.pdf>

2019.2.21
修正 2019.3.19