

# ディオファントス方程式 $3x^2 = 2y^4 + z^4$ について

大塚美紀生

定理 1 正の整数  $x, y, z$  が

$$3x^2 = 2y^4 + z^4$$

を満たすならば,  $x = y^2 = z^2$  である。

定理 2 漸化式

$$f_1 = 1, f_2 = 11, f_{n+2} = 10f_{n+1} - f_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列  $\{f_n\}$  に現れる平方数は  $f_1 = 1$  のみである。

1953年 W.Ljunggren により, 方程式

$$3x^2 - 2y^4 = 1$$

の原始解<sup>注1</sup>が  $x^2 = y^2 = 1$  のみであることが示された。残念ながら, その論文は一般には入手困難のようである。[1]の手法を用いて, Ljunggren の定理を一般化した定理 1 を証明することが本稿の目的であるが, 結果的には Ljunggren の定理を紹介することにもなる。

[2]において, 方程式

$$3x^2 - 2y^2 = 1$$

の自然数解は, 漸化式の形で完全に求まっている。定理 1 の自然数解は, この漸化式に現れる平方数ととらえることができるので, 漸化式の立場から表現し直したものが定理 2 である。

定理 1 の証明

$$3x^2 = 2y^4 + z^4 \tag{1}$$

を満たす正の整数の組  $(x, y, z)$  が  $y \neq z$  であるとき, その中で  $x$  が最小となるものについて考えることにする。

$y$  と  $z$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,  $p^4 \mid 3x^2 \implies p^3 \mid x^2 \implies p^2 \mid x$  であり,

$$x = p^2x_1, \quad y = py_1, \quad z = pz_1$$

を満たす正の整数  $x_1, y_1, z_1$  が存在する。(1)に代入して両辺を  $p^4$  で割ると

$$3x_1^2 = 2y_1^4 + z_1^4$$

が成り立ち,  $0 < x_1 < p^2x_1 = x$  となって  $x$  の最小性に反する。よって,

$y$  と  $z$  は互いに素

である。 $z$  が偶数であるとすれば, (1)より

$$2 \mid z \implies 2 \mid 3x^2 \implies 2 \mid x \implies 2^2 \mid 2y^4 \implies 2 \mid y$$

となって  $y$  と  $z$  が互いに素であることに反するから、

$z$  は奇数

である。このとき

$x$  は奇数

であり、 $z^4 \equiv x^2 \equiv 1 \pmod{4}$  より  $3x^2 \equiv 3 \not\equiv z^4 \pmod{4}$  であるから、

$y$  は奇数

である。

3 で割った余りを考えると、

$y^2$	$z^2$	$2y^4 + z^4$
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	0

ですべての場合が尽くされるから、(1)を満たすには  $y^2 \equiv z^2 \pmod{3}$  であることが必要であり、

$$y^2 - z^2 = \pm 3a \quad (a \text{ は正の整数})$$

とおくことができる。 $y, z$  はともに奇数であり、2 と 3 は互いに素であるから、

$a$  は 8 の倍数

である。

Case I       $y^2 - z^2 = 3a$  (2)

(2)を(1)に代入して

$$3x^2 = 2(z^2 + 3a)^2 + z^4 = 18a^2 + 12az^2 + 3z^4$$

$$x^2 = 6a^2 + 4az^2 + z^4$$

$$= 2a^2 + (z^2 + 2a)^2$$

$$x^2 - (z^2 + 2a)^2 = 2a^2$$

$$(x + z^2 + 2a)(x - z^2 - 2a) = 2a^2$$

$x, z^2$  は奇数、 $a$  は偶数であることを考え、

$$\frac{x + z^2 + 2a}{2} \cdot \frac{x - z^2 - 2a}{2} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{3}$$

ここで、 $\frac{x + z^2 + 2a}{2}$  と  $\frac{x - z^2 - 2a}{2}$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば、 $p \mid z^2 + 2a$

かつ  $p^2 \mid 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$  より  $p \mid a, p \mid z$  であるから、(2)より  $p \mid y, p \mid z$  となって、 $y$  と  $z$  が

互いに素であることに反する。よって、

$$\frac{x + z^2 + 2a}{2} \text{ と } \frac{x - z^2 - 2a}{2} \text{ は互いに素}$$

であるから ,

$$\left( \frac{x+z^2+2a}{2}, \frac{x-z^2-2a}{2}, \frac{a}{2} \right) \\ = (b^2, 2c^2, bc), (2c^2, b^2, bc), (-b^2, -2c^2, bc), (-2c^2, -b^2, bc)$$

のいずれかとなる互いに素な正の整数  $b, c$  ( $b$  は奇数) が存在し ,

$$x = b^2 + 2c^2 > 0, \quad z^2 + 2a = \pm(b^2 - 2c^2), \quad a = 2bc \quad (4)$$

$8 \mid a, 2 \nmid z$  より  $z^2 + 2a \equiv 1 \pmod{8}$  であり ,  $4 \mid c, b^2 \equiv 1 \pmod{8}$  であるから

$$z^2 + 2a = b^2 - 2c^2, \quad a = 2bc \quad (5)$$

(2) に代入して

$$y^2 = (z^2 + 2a) + a \\ = b^2 - 2c^2 + 2bc \\ = (b+c)^2 - 3c^2 \\ (b+c)^2 - y^2 = 3c^2 \\ (b+c+y)(b+c-y) = 3c^2$$

$b, y$  は奇数 ,  $c$  は偶数であることを考え ,

$$\frac{b+c+y}{2} \cdot \frac{b+c-y}{2} = 3 \left( \frac{c}{2} \right)^2$$

(3) における考察と同様にして ,  $y$  と  $z$  が互いに素であることより

$$\frac{b+c+y}{2} \text{ と } \frac{b+c-y}{2} \text{ は互いに素}$$

となるから ,

$$\left( \frac{b+c+y}{2}, \frac{b+c-y}{2}, \frac{c}{2} \right) = (g^2, 3h^2, gh) \text{ または } (3h^2, g^2, gh)$$

を満たす互いに素な正の整数  $g, h$  が存在し ,

$$b+c = g^2 + 3h^2, \quad c = 2gh \quad (6)$$

(5) より

$$z^2 = b^2 - 2c^2 - 2a \\ = b^2 - 4bc - 2c^2 \\ = (b-2c)^2 - 6c^2 \\ (b-2c)^2 - z^2 = 6c^2 \\ \frac{b-2c+z}{2} \cdot \frac{b-2c-z}{2} = 6 \left( \frac{c}{2} \right)^2$$

であるから , (6) を代入すると

$$\frac{g^2 - 6gh + 3h^2 + z}{2} \cdot \frac{g^2 - 6gh + 3h^2 - z}{2} = 6g^2h^2 \quad (7)$$

ここで ,  $\frac{g^2 - 6gh + 3h^2 + z}{2}$  と  $\frac{g^2 - 6gh + 3h^2 - z}{2}$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれ

ば ,  $p \mid g^2 - 6gh + 3h^2$  かつ  $p \mid z$  かつ  $p \mid 6g^2h^2$  であり ,

$p = 3$  のときは  $3 \mid g$ ,  $3 \mid \pm(g^2 - 3h^2) = y$  となって,  $\gcd(y, z) = 1$  に反する。

$p \neq 3$  のときは  $p^2 \mid 6g^2h^2$  より  $p \mid g$  または  $p \mid h$  であり,

$p \mid g^2 - 6gh + 3h^2$  より  $p \mid g$  かつ  $p \mid h$  となって,  $\gcd(g, h) = 1$  に反する。

よって,

$$\frac{g^2 - 6gh + 3h^2 + z}{2} \text{ と } \frac{g^2 - 6gh + 3h^2 - z}{2} \text{ は互いに素}$$

であるから, (7)より

$$g^2 - 6gh + 3h^2 = \pm(k^2 + 6l^2) \text{ または } \pm(3k^2 + 2l^2), \quad gh = kl \quad (8)$$

となるような互いに素である正の整数  $k, l$  ( $k$  は奇数) が存在する。

$\gcd(g, k) = s$  とおくと

$$g = su, \quad k = sv \quad (u, v \text{ は互いに素な正の整数}) \quad (9)$$

$gh = kl$  より

$$uh = vl$$

$\gcd(u, v) = 1$  より

$$l = tu, \quad h = tv \quad (t \text{ は正の整数}) \quad (10)$$

**I-1**  $g^2 - 6gh + 3h^2 = k^2 + 6l^2$  のとき

(9), (10)を代入して

$$\begin{aligned} s^2u^2 - 6stuv + 3t^2v^2 &= s^2v^2 + 6t^2u^2 \\ 3(2u^2 - v^2)t^2 + 6stuv - s^2(u^2 - v^2) &= 0 \\ 3(2u^2 - v^2)\left(\frac{t}{s}\right)^2 + 6uv \cdot \frac{t}{s} - (u^2 - v^2) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

この2次方程式<sup>注2</sup>の判別式を  $D$  とすると, 有理数解  $\frac{t}{s}$  が存在することより,

$$\frac{D}{4} = 9u^2v^2 + 3(2u^2 - v^2)(u^2 - v^2) = 3(2u^4 + v^4)$$

は平方数であるから,

$$3(2u^4 + v^4) = (3w)^2$$

を満たす正の整数  $w$  が存在し,

$$2u^4 + v^4 = 3w^2 \quad (12)$$

(9), (10), (6)より

$$3w^2 \leq 2g^4 + h^4 \leq 3g^4h^4 = 3\left(\frac{c}{2}\right)^4$$

$$w \leq \left(\frac{c}{2}\right)^2 < c^2$$

(4)より

$$w < c^2 < b^2 + 3c^2 = x$$

となるから, (12)を満たす正の整数  $u, v, w$  の存在は  $x$  の最小性に反する。

I-2  $g^2 - 6gh + 3h^2 = -k^2 - 6l^2$  のとき

(11)にあたる方程式は

$$3(2u^2 + v^2)t^2 - 6stuv + s^2(u^2 + v^2) = 0$$

となり,  $\frac{D}{4}$  にあたる式は

$$9u^2v^2 - 3(2u^2 + v^2)(u^2 + v^2) = -3(2u^4 + v^4) < 0$$

となって, 正の整数  $s, t$  は存在しない。

I-3  $g^2 - 6gh + 3h^2 = 3k^2 + 2l^2$  のとき

(9), (10)を代入して

$$\begin{aligned} s^2u^2 - 6stuv + 3t^2v^2 &= 3s^2v^2 + 2t^2u^2 \\ (s^2 - 2t^2)u^2 - 6stuv - 3(s^2 - t^2)v^2 &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$(s^2 - 2t^2)\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 6st \cdot \frac{u}{v} - 3(s^2 - t^2) = 0$$

この2次方程式<sup>注3</sup>の判別式を  $D$  とすると, 有理数解  $\frac{u}{v}$  が存在することより,

$$\frac{D}{4} = 9s^2t^2 + (s^2 - 2t^2) \cdot 3(s^2 - t^2) = 3(s^4 + 2t^4)$$

は平方数であるから,

$$3(s^4 + 2t^4) = (3w)^2$$

を満たす正の整数  $w$  が存在し,

$$s^4 + 2t^4 = 3w^2 \tag{14}$$

(9), (10), (6)より

$$3w^2 \leq g^4 + 2h^4 \leq 3g^4h^4 = 3\left(\frac{c}{2}\right)^4$$

$$w \leq \left(\frac{c}{2}\right)^2 < c^2$$

(4)より

$$w < c^2 < b^2 + 2c^2 = x$$

となるから, (14)を満たす正の整数  $s, t, w$  の存在は  $x$  の最小性に反する。

I-4  $g^2 - 6gh + 3h^2 = -3k^2 - 2l^2$  のとき

(13)にあたる方程式は

$$(s^2 + 2t^2)u^2 - 6stuv + 3(s^2 + t^2)v^2 = 0$$

となり,  $\frac{D}{4}$  にあたる式は

$$9s^2t^2 - 3(s^2 + 2t^2)(s^2 + t^2) = -3(s^4 + 2t^4) < 0$$

となって, 正の整数  $u, v$  は存在しない。

Case II  $y^2 - z^2 = -3a$  (15)

(15)を(1)に代入して

$$3x^2 = 2(z^2 - 3a)^2 + z^4 = 18a^2 - 12az^2 + 3z^4$$

$$x^2 = 6a^2 - 4az^2 + z^4$$

$$= 2a^2 + (z^2 - 2a)^2$$

$$x^2 - (z^2 - 2a)^2 = 2a^2$$

$$(x + z^2 - 2a)(x - z^2 + 2a) = 2a^2$$

$x, z^2$ は奇数,  $a$ は偶数であることを考え,

$$\frac{x + z^2 - 2a}{2} \cdot \frac{x - z^2 + 2a}{2} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (16)$$

ここで,  $\frac{x + z^2 - 2a}{2}$ と $\frac{x - z^2 + 2a}{2}$ が共通の素因数  $p$ をもつとすれば,  $p \mid z^2 - 2a$

かつ  $p^2 \mid 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$ より  $p \mid a, p \mid z$ であるから, (15)より  $p \mid y, p \mid z$ となって,  $y$ と $z$ が

互いに素であることに反する。よって,

$$\frac{x + z^2 - 2a}{2} \text{ と } \frac{x - z^2 + 2a}{2} \text{ は互いに素}$$

であるから,

$$\left( \frac{x + z^2 - 2a}{2}, \frac{x - z^2 + 2a}{2}, \frac{a}{2} \right)$$

$$= (b^2, 2c^2, bc), (2c^2, b^2, bc), (-b^2, -2c^2, bc), (-2c^2, -b^2, bc)$$

のいずれかとなる互いに素な正の整数  $b, c$  ( $b$ は奇数)が存在し,

$$x = b^2 + 2c^2 > 0, \quad z^2 - 2a = \pm(b^2 - 2c^2), \quad a = 2bc \quad (17)$$

$8 \mid a, 2 \nmid z$ より  $z^2 - 2a \equiv 1 \pmod{8}$ であり,  $4 \mid c, b^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから

$$z^2 - 2a = b^2 - 2c^2, \quad a = 2bc \quad (18)$$

(15)に代入して

$$y^2 = (z^2 - 2a) - a$$

$$= b^2 - 2c^2 - 2bc$$

$$= (b - c)^2 - 3c^2$$

$$(b - c)^2 - y^2 = 3c^2$$

$$(b - c + y)(b - c - y) = 3c^2$$

$b, y$ は奇数,  $c$ は偶数であることを考え,

$$\frac{b - c + y}{2} \cdot \frac{b - c - y}{2} = 3\left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad (19)$$

(16)における考察と同様にして,  $y$ と $z$ が互いに素であることより

$$\frac{b - c + y}{2} \text{ と } \frac{b - c - y}{2} \text{ は互いに素}$$

である。

II-1  $y^2 = z^2 - 3a$ ,  $b > c$  のとき

$b - c + y > 0$  であるから, (19)より

$$\left( \frac{b-c+y}{2}, \frac{b-c-y}{2}, \frac{c}{2} \right) = (g^2, 3h^2, gh) \text{ または } (3h^2, g^2, gh)$$

を満たす互いに素な正の整数  $g, h$  が存在し,

$$b - c = g^2 + 3h^2, \quad c = 2gh \quad (20)$$

(18)より

$$\begin{aligned} z^2 &= b^2 - 2c^2 + 2a = b^2 + 4bc - 2c^2 \\ &= (b + 2c)^2 - 6c^2 \\ (b + 2c)^2 - z^2 &= 6c^2 \\ \frac{b + 2c + z}{2} \cdot \frac{b + 2c - z}{2} &= 6 \left( \frac{c}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

であるから, (20)を代入して

$$\frac{g^2 + 6gh + 3h^2 + z}{2} \cdot \frac{g^2 + 6gh + 3h^2 - z}{2} = 6g^2h^2$$

Case Iと同様にして,

$$g^2 + 6gh + 3h^2 = \pm(k^2 + 6l^2) \text{ または } \pm(3k^2 + 2l^2), \quad gh = kl$$

となるような互いに素である正の整数  $k, l$  ( $k$  は奇数) が存在するから, (11)や(13)において  $6stuv$  と  $-6stuv$  が入れ替わるだけであり, Case Iと全く同じ議論になる。

II-2  $y^2 = z^2 - 3a$ ,  $b < c$  のとき

$b - c - y < 0$  であるから, (19)より

$$\left( \frac{b-c+y}{2}, \frac{b-c-y}{2}, \frac{c}{2} \right) = (-g^2, -3h^2, gh) \text{ または } (-3h^2, -g^2, gh)$$

を満たす互いに素な正の整数  $g, h$  が存在し,

$$b - c = -g^2 - 3h^2, \quad c = 2gh \quad (22)$$

II-1と同様に(21)が成り立ち,

$$\frac{b + 2c + z}{2} \cdot \frac{b + 2c - z}{2} = 6 \left( \frac{c}{2} \right)^2$$

であるから, (22)を代入すると

$$\frac{-g^2 + 6gh - 3h^2 + z}{2} \cdot \frac{-g^2 + 6gh - 3h^2 - z}{2} = 6g^2h^2$$

Case Iと同様にして,

$$-g^2 + 6gh - 3h^2 = \pm(k^2 + 6l^2) \text{ または } \pm(3k^2 + 2l^2), \quad gh = kl$$

となるような互いに素である正の整数  $k, l$  ( $k$  は奇数) が存在し, これは(8)と同じであるから, 以下は Case Iで既に論じた通りである。

(定理1の証明おわり)

## 定理 2 の証明

定理 1 より

$$3x^2 - 2y^4 = 1$$

を満たす正の整数の組  $(x, y) = (a_n, b_n)$  は,

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad b_1 = 1, \\ \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 6a_n + 5b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

によりすべて得られる。 $\{a_n\}$  を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+2} - 5b_{n+1}}{6} &= 5 \cdot \frac{b_{n+1} - 5b_n}{6} + 4b_n \\ b_{n+2} &= 10b_{n+1} - b_n \end{aligned}$$

$b_2 = 6a_1 + 5b_1 = 11$  であるから,  $b_n = f_n$  とすることにより, 定理 2 が得られる。

(おわり)

注 1 ディオファントス方程式の原始解とは, すべての未知数が互いに素であるような整数解のことである。本稿では高校数学風に  $x^2 = y^2 = 1$  と書いたが,  $x^2, y^2$  だけから成る方程式の場合, 「原始解が  $x = y = 1$ 」と書くだけで符号の違いを同一視しているものと解釈することもある。

注 2 2 は平方数でないから, 素因数分解を考えると

$$2u^2 \neq v^2$$

であり,  $\frac{t}{s}$  についての方程式として, 2 次の係数は 0 でない。

注 3 注 2 と同様に  $s^2 - 2t^2 \neq 0$  であるから,  $\frac{u}{v}$  についての方程式として, 2 次の係数は 0 でない。



## 参考文献

- [ 1 ] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $5x^4 - y^4 = 4z^2$  について,  
早稲田数学フォーラム (2012), <http://wasmath.la.coocan.jp/5x4-y4=4z2.pdf>
- [ 2 ] 大塚美紀生, 方程式  $3x^2 - 2y^2 = 1$  の正整数解について,  
早稲田数学フォーラム (2014), <http://wasmath.la.coocan.jp/3x2-2y2=1.pdf>
- [ 3 ] 内山三郎, 不定方程式  $m^2 = \frac{1}{3}(n^3 + 2n)$  の解について,  
京大数理解析研究所講究録 371 (1979), 78–82