

# ディオファントス方程式 $3x^4 - 2y^4 = z^2$ について

大塚美紀生

[2]において、方程式  $3x^2 - 2y^4 = z^4$  の自然数解は  $x = y$  に限られることを示した。方程式  $3x^4 - 2y^4 = z^2$  はよく似てはいるが、 $x = y = z = 1$  以外にも、 $x = 33, y = 13, z = 1871$  のような自然数解も存在する。実際には、次の定理が成り立つ。

定理 方程式

$$3x^4 - 2y^4 = z^2$$

を満たす互いに素な自然数の組  $(x, y, z)$ <sup>注1</sup> は無数にある。

本稿では、この定理を証明する。証明の方針は、[1]と同様に新しい自然数解を導くアルゴリズムを与えるものであるが、その関係式を見い出せたのは、[3]において方程式  $3x^2 - 2y^2 = z^2$  の自然数解を具体的に表示できた成果が大きい。

定理の証明

$$3x^4 - 2y^4 = z^2, \quad \gcd(x, y) = 1 \tag{1}$$

を満たす自然数  $x, y, z$  に対して、

$$\frac{t}{s} = \frac{xy + z}{3x^2 + 2y^2}, \quad \gcd(s, t) = 1 \tag{2}$$

により自然数  $s, t$  を定め、

$$X = s^2x^2 + 2t^2y^2 \tag{3}$$

$$Y = |3t^2x^2 - s^2y^2| \tag{4}$$

とおくとき、

$$X > s^2x^2 \geq x^2 \geq x$$

となるから、 $3X^4 - 2Y^4 = Z^2$  を満たす自然数  $Z$  が存在する<sup>注2</sup> ことと  $\gcd(X, Y) = 1$  を示せば定理の証明は終わる。

(2)を用いると

$$\begin{aligned} & 3t^2x^2 - 2stxy + s^2y^2 \\ &= s^2 \left\{ 3x^2 \left( \frac{xy + z}{3x^2 + 2y^2} \right)^2 - 2xy \cdot \frac{xy + z}{3x^2 + 2y^2} + y^2 \right\} \\ &= \frac{s^2}{(3x^2 + 2y^2)^2} \{ 3x^2(xy + z)^2 - 2xy(xy + z)(3x^2 + 2y^2) + y^2(3x^2 + 2y^2)^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^2x^2 - 2t^2y^2 &= s^2 \left\{ x^2 - 2y^2 \left( \frac{xy+z}{3x^2+2y^2} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{s^2}{(3x^2+2y^2)^2} \{ x^2(3x^2+2y^2)^2 - 2y^2(xy+z)^2 \}
\end{aligned}$$

(1)を用いて差を計算すると

$$\begin{aligned}
&3x^2(xy+z)^2 - 2xy(xy+z)(3x^2+2y^2) + y^2(3x^2+2y^2)^2 \\
&\quad - \{ x^2(3x^2+2y^2)^2 - 2y^2(xy+z)^2 \} \\
&= (3x^2+2y^2)(xy+z)^2 - 2xy(xy+z)(3x^2+2y^2) + (y^2-x^2)(3x^2+2y^2)^2 \\
&= (3x^2+2y^2) \{ x^2y^2 + 2xyz + z^2 - 2xy(xy+z) + (y^2-x^2)(3x^2+2y^2) \} \\
&= (3x^2+2y^2)(z^2+2y^4-3x^4) = 0
\end{aligned}$$

であるから,

$$s^2x^2 - 2t^2y^2 = 3t^2x^2 - 2stxy + s^2y^2$$

(3), (4)より

$$\begin{aligned}
X^2 &= (s^2x^2 + 2t^2y^2)^2 = (s^2x^2 - 2t^2y^2)^2 + 8s^2t^2x^2y^2 \\
Y^2 &= (3t^2x^2 - s^2y^2)^2 \\
&= (3t^2x^2 + s^2y^2)^2 - 12s^2t^2x^2y^2 \\
&= (s^2x^2 - 2t^2y^2 + 2stxy)^2 - 12s^2t^2x^2y^2
\end{aligned}$$

ここで,

$$u = s^2x^2 - 2t^2y^2 (\neq 0), \quad v = stxy (> 0) \tag{5}$$

とおくと

$$X^2 = u^2 + 8v^2 \tag{6}$$

$$Y^2 = (u + 2v)^2 - 12v^2 = u^2 + 4uv - 8v^2 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
3X^4 - 2Y^4 &= 3(u^2 + 8v^2)^2 - 2(u^2 + 4uv - 8v^2)^2 \\
&= 3\{ (u^2 - 8v^2)^2 + 32u^2v^2 \} \\
&\quad - 2\{ (u^2 - 8v^2)^2 + 8uv(u^2 - 8v^2) + 16u^2v^2 \} \\
&= (u^2 - 8v^2)^2 - 16uv(u^2 - 8v^2) + 64u^2v^2 \\
&= (u^2 - 8uv - 8v^2)^2
\end{aligned}$$

$$Z = |u^2 - 8uv - 8v^2| = |(u - 4v)^2 - 24v^2| \text{とおくと, } Z \text{ は自然数であり,} \tag{8}$$

$$3X^4 - 2Y^4 = Z^2$$

を満たす。

次に,  $p|X$  かつ  $p|Y$  を満たす素数  $p$  があるとして矛盾を導こう。

$2|x$  とすると, (1)より  $2|z$ ,  $2^2|2y^2 \implies 2|y$  となって,  $x$  と  $y$  が互いに素であることに反するから,

$x$  は奇数

である。このとき,  $z$  は奇数であり,

$$2y^4 = 3x^4 - z^2 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

より  $y$  も奇数であり,

$x, y, z$  はすべて奇数

である。よって、 $xy + z$  は偶数、 $3x^2 + 2y^2$  は奇数であるから、

$s$  は奇数、 $t$  は偶数

である。(3), (4)より

$X, Y$  は奇数<sup>注3</sup>

である。

$3|y$  とすると、(1)より  $3|z$ 、 $3^2|3x^4 \implies 3|x$  となって、 $x$  と  $y$  が互いに素であることに反するから、

$3 \nmid y$

である。 $3x^2 + 2y^2$  も 3 で割れないから、(2)より

$3 \nmid s$

したがって、(4)より

$3 \nmid Y$ <sup>注3</sup>

であるから、

$Y$  は 2 でも 3 でも割れない。

(7), (8)より

$$\begin{aligned} p|X, p|Y &\implies p|X, p|Y, p|Z \\ &\implies p|u^2 + 4uv - 8v^2 \text{ かつ } p|u^2 - 8uv - 8v^2 \\ &\implies p|12uv \text{ かつ } p|u^2 - 8v^2 \\ &\implies p \nmid 12 \text{ かつ } p|uv \text{ かつ } p|u^2 - 8v^2 \\ &\implies \text{「} p|u \text{ または } p|v \text{」かつ } p|u^2 - 8v^2 \\ &\implies p|u \text{ かつ } p|v \end{aligned}$$

(5)を考えて、

$$p|v = stxy \text{ より } p|s \text{ または } p|t \text{ または } p|x \text{ または } p|y$$

であり、 $\gcd(x, t) = 1$  および  $\gcd(x, y) = 1$  にも注意すると

$$p|s \text{ かつ } p|u \implies p|s \text{ かつ } p|2t^2y^2 \implies p|s \text{ かつ } p|y$$

$$p|t \text{ かつ } p|u \implies p|t \text{ かつ } p|s^2x^2 \implies p|t \text{ かつ } p|x$$

$$p|x \text{ かつ } p|u \implies p|x \text{ かつ } p|2t^2y^2 \implies p|x \text{ かつ } p|t$$

$$p|y \text{ かつ } p|u \implies p|y \text{ かつ } p|s^2x^2 \implies p|y \text{ かつ } p|s$$

であるから、

$$\text{「} p|s \text{ かつ } p|y \text{」または「} p|t \text{ かつ } p|x \text{」}$$

となる。ところが、いずれの場合も  $p|Y$  および (4)より  $p|\gcd(x, y)$  または  $p|\gcd(s, t)$  となって、初めの仮定に反する。ゆえに、

$$\gcd(X, Y) = 1$$

が成り立つ。

(証明おわり)

証明の元となった式変形

定理の証明自体は完結しているが，方程式

$$3x^4 - 2y^4 = z^2 \tag{9}$$

をどのように変形して (2), (3), (4) にたどり着いたかを，最後に述べておこう。

$x$  と  $y$  が互いに素な自然数であるとき，[3] の定理より

$$x^2 = m^2 + 2n^2 \tag{10}$$

$$y^2 = |m^2 + 2mn - 2n^2| \tag{11}$$

を満たす互いに素な整数  $m, n$  が存在し，

$m$  は奇数

である。(10)は

$$(x+m)(x-m) = 2n^2$$

と変形され， $x, m$  はともに奇数であるから  $2^2 | 2n^2$  より  $n$  は偶数であり，さらに

$$\frac{x+m}{2} \cdot \frac{x-m}{2} = 2 \left( \frac{n}{2} \right)^2$$

ここで， $\frac{x+m}{2}$  と  $\frac{x-m}{2}$  に共通の素因数  $p$  があるとすれば，

$$p \left| \frac{x+m}{2}, p \left| \frac{x-m}{2} \implies p | x, p | m, p^2 \left| 2 \left( \frac{n}{2} \right)^2 \right.$$

$$\implies p | x, p | m, p \left| \frac{n}{2} \right.$$

$$\implies p | m, p | n$$

となって， $m$  と  $n$  が互いに素であることに反するから，

$$\frac{x+m}{2}, \frac{x-m}{2} \text{ は互いに素}$$

$x^2 > m^2$ ， $x > 0$  より  $x+m > 0$ ， $x-m > 0$  であることも考えて，

$$\left( \frac{x+m}{2}, \frac{x-m}{2}, \frac{n}{2} \right) = (a^2, 2b^2, ab) \text{ または } (2b^2, a^2, ab)$$

を満たす互いに素な (0 でない) 整数  $a, b$  が存在して，

$$x = a^2 + 2b^2, \quad m = |a^2 - 2b^2|, \quad n = 2ab \tag{12}$$

$m$  は奇数， $n$  は偶数， $y$  は奇数であるから

$$m^2 + 2mn - 2n^2 \equiv m^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad y^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

であり，(11) の絶対値のはずれ方は

$$y^2 = m^2 + 2mn - 2n^2$$

に定まる。これを変形すると

$$2y^2 = 2m^2 + 4mn - 4n^2 = 3m^2 - (m-2n)^2$$

$$3m^2 - 2y^2 = (m-2n)^2 \tag{13}$$

[3] の定理より

$$m = c^2 + 2d^2, \quad |m-2n| = |c^2 - 4cd - 2d^2| \tag{14}$$

を満たす整数  $c, d$  が存在する。<sup>注5</sup>

ここで,  $m - 2n = -c^2 + 4cd + 2d^2$  であるとすれば,

$$\begin{aligned} 2n &= c^2 + 2d^2 - (-c^2 + 4cd + 2d^2) \\ &= 2c^2 - 4cd \\ n &= c^2 - 2cd = c(c - 2d) \end{aligned}$$

となるが,  $c$  は奇数であるから  $n$  は奇数となって,  $n = 2ab$  であることに反する。

よって, (14) における  $|m - 2n| = |c^2 - 4cd - 2d^2|$  は

$$m - 2n = c^2 - 4cd - 2d^2$$

に定まる。(14)より

$$\begin{aligned} 2n &= c^2 + 2d^2 - (c^2 - 4cd - 2d^2) = 4d^2 + 4cd \\ n &= 2d^2 + 2cd = 2d(c + d) \end{aligned}$$

(12)より  $n = 2ab = 2d(c + d)$  であるから

$$ab = d(c + d)$$

ここで,  $\gcd(a, d) = s$  とおくと

$$a = su, \quad d = sv, \quad \gcd(u, v) = 1 \tag{15}$$

となる整数  $u, v$  が存在する。  $ab = d(c + d)$  より

$$ub = v(c + d)$$

$u$  と  $v$  は互いに素であるから,

$$b = vt, \quad c + d = ut \tag{16}$$

を満たす整数  $t$  が存在する。

(12), (14)より  $m = |a^2 - 2b^2| = c^2 + 2d^2$  であるが,

$$a^2 - 2b^2 = c^2 + 2d^2$$

のときを考えて, (15), (16)を代入すると

$$\begin{aligned} su^2 - 2v^2t^2 &= (ut - sv)^2 + 2s^2v^2 \\ (3s^2 + 2t^2)\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 2st \cdot \frac{v}{u} + (t^2 - s^2) &= 0 \end{aligned}$$

$3s^2 + 2t^2 > 0$  より, 整数係数 2 次方程式が有理数  $\frac{v}{u}$  を解に持つから,

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = s^2t^2 - (3s^2 + 2t^2)(t^2 - s^2) = 3s^4 - 2t^4$$

は有理数の平方かつ整数であり,

$$3s^4 - 2t^4 = w^2$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。このとき

$$\frac{v}{u} = \frac{st \pm w}{3s^2 + 2t^2}$$

である。

以上を逆に辿って, 定理の証明における式が得られる。

注1 方程式  $3x^4 - 2y^4 = z^2$  が成り立つという前提では,  $x, y, z$  のどの2つも互いに素であることになってしまうが, 本来は,  $x, y, z$  すべてには共通する素因数がないという意味である。

注2 (1)の自然数解が (3), (4)で尽くされるわけではない。(3), (4)で与えられる自然数解に限定しても無数にあることを示せればよいことになる。

注3 この時点ではまだ  $\gcd(X, Y) = 1$  は示されていないので,  $3X^4 - 2Y^4 = Z^2$  を導いたからといって,  $x, y$  が奇数であることと同様に, というわけにはいかない。

注4 [3]では, 方程式  $3x^2 - 2y^2 = z^2$  の自然数解を

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = |m^2 - 2mn - 2n^2|, \quad z = |m^2 + 4mn - 2n^2|$$

と表示したが,  $m$  を  $-m$  に置き換えて

$$x = m^2 + 2n^2, \quad y = |m^2 + 2mn - 2n^2|, \quad z = |m^2 - 4mn - 2n^2|$$

と表示されると解釈してもよい。

注5  $m$  と  $n$  は互いに素であり,  $m$  は奇数であるから,  $m$  と  $m - 2n$  は互いに素である。したがって, (12)において  $m$  と  $y$  は互いに素であるから, 整数  $c, d$  は互いに素であるとしてよい。ただ, そのあとの議論に  $c$  と  $d$  が互いに素であることは不要である。

## 参考文献

- [1] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $5x^4 - y^4 = 4z^2$  について, 早稲田数学フォーラム (2012), <http://wasmath.la.coocan.jp/5x4-y4=4z2.pdf>
- [2] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $3x^2 = 2y^4 + z^4$  について, 早稲田数学フォーラム (2018), <http://wasmath.la.coocan.jp/3x2=2y4+z4.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式  $3x^2 - 2y^2 = z^2$  の自然数解について, 早稲田数学フォーラム (2019), <http://wasmath.la.coocan.jp/3x2-2y2=z2.pdf>