

ディオファントス方程式 $5x^4 - y^4 = 4z^2$ について

大塚美紀生

[3]において, 方程式 $x^6 + y^3 = z^2$, $x^3 + y^3 = 2z^3$ を解くために, 方程式

$$3x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = z^2$$

の自然数解が $x^2 = y^2 = z$ に限られることを証明した。2つの方程式 $x^{10} + y^5 = z^2$
 $x^5 + y^5 = 2z^5$ についても同様に解こうとすれば, 方程式

$$5x^4 - 5x^2y^2 + y^4 = z^4$$

を考えることになるが, その過程において方程式

$$5x^4 - y^4 = 4z^2$$

が現われる。この方程式の自然数解は $x^2 = y^2 = z$ に限られるようにも思われるが, 実際には次のような結果が得られる。

定理 方程式

$$5x^4 - y^4 = 4z^2$$

を満たす互いに素な自然数の組 (x, y, z) ^{注1} は無数にある。

本稿では, この定理を証明する。

定理の証明

$$5x^4 - y^4 = 4z^2, \quad \gcd(x, y) = 1 \tag{1}$$

を満たす自然数 x, y, z に対して,

$$\frac{t}{s} = \frac{2xy + 2z}{5x^2 + y^2}, \quad \gcd(s, t) = 1 \tag{2}$$

により自然数 s, t を定め,

$$X = s^2x^2 + t^2y^2 \tag{3}$$

$$Y = |s^2y^2 - 5t^2x^2| \tag{4}$$

とおくとき,

$$X > s^2x^2 \geq x^2 \geq x$$

となるから, $5X^4 - Y^4 = 4Z^2$ を満たす自然数 Z が存在する^{注2} ことと $\gcd(X, Y) = 1$ を示せば定理の証明は終わる。

(2)を用いると

$$\begin{aligned} s^2y^2 + 5t^2x^2 &= s^2 \left\{ y^2 + 5x^2 \left(\frac{2xy + 2z}{5x^2 + y^2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{s^2}{(5x^2 + y^2)^2} \{ y^2(5x^2 + y^2)^2 + 20x^2(xy + z)^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s^2x^2 + 4stxy - t^2y^2 \\
&= s^2 \left\{ x^2 + 4xy \cdot \frac{2xy + 2z}{5x^2 + y^2} - y^2 \left(\frac{2xy + 2z}{5x^2 + y^2} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{s^2}{(5x^2 + y^2)^2} \{ x^2(5x^2 + y^2)^2 + 8xy(xy + z)(5x^2 + y^2) - 4y^2(xy + z)^2 \}
\end{aligned}$$

(1)を用いて差を計算すると

$$\begin{aligned}
& x^2(5x^2 + y^2)^2 + 8xy(xy + z)(5x^2 + y^2) - 4y^2(xy + z)^2 \\
&\quad - \{ y^2(5x^2 + y^2)^2 + 20x^2(xy + z)^2 \} \\
&= (x^2 - y^2)(5x^2 + y^2)^2 + 8xy(xy + z)(5x^2 + y^2) - 4(5x^2 + y^2)(xy + z)^2 \\
&= (5x^2 + y^2) \{ (x^2 - y^2)(5x^2 + y^2) + 8xy(xy + z) - 4(x^2y^2 + 2xyz + z^2) \} \\
&= (5x^2 + y^2) \{ (x^2 - y^2)(5x^2 + y^2) + 4x^2y^2 - 4z^2 \} \\
&= (5x^2 + y^2) \{ (x^2 - y^2)(5x^2 + y^2) + 4x^2y^2 - (5x^4 - y^4) \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるから,

$$s^2y^2 + 5t^2x^2 = s^2x^2 + 4stxy - t^2y^2 \quad (5)$$

(4)と(5)より

$$\begin{aligned}
Y^2 &= (s^2y^2 - 5t^2x^2)^2 \\
&= (s^2y^2 + 5t^2x^2)^2 - 20s^2t^2x^2y^2 \\
&= (s^2x^2 + 4stxy - t^2y^2)^2 - 20s^2t^2x^2y^2
\end{aligned} \quad (6)$$

ここで,

$$u = stxy, \quad v = s^2x^2 - stxy - t^2y^2 \quad (7)$$

とおくと, (3)と(6)より

$$\begin{aligned}
X^2 &= (s^2x^2 + t^2y^2)^2 \\
&= (s^2x^2 - t^2y^2)^2 + 4s^2t^2x^2y^2 \\
&= (u + v)^2 + 4u^2 \\
&= 5u^2 + 2uv + v^2
\end{aligned} \quad (8)$$

$$Y^2 = (5u + v)^2 - 20u^2 = 5u^2 + 10uv + v^2 \quad (9)$$

(8)と(9)をもとにして

$$\begin{aligned}
5X^4 - Y^4 &= 5(5u^2 + 2uv + v^2)^2 - (5u^2 + 10uv + v^2)^2 \\
&= 5 \{ (5u^2 + v^2)^2 + 4uv(5u^2 + v^2) + 4u^2v^2 \} \\
&\quad - \{ (5u^2 + v^2)^2 + 20uv(5u^2 + v^2) + 100u^2v^2 \} \\
&= 4(5u^2 + v^2)^2 - 80u^2v^2 \\
&= 4 \{ (5u^2 + v^2)^2 - 20u^2v^2 \} \\
&= 4(5u^2 - v^2)^2
\end{aligned}$$

$Z = |5u^2 - v^2|$ とおくと, Z は(0でなく)自然数であり,

$$5X^4 - Y^4 = 4Z^2$$

を満たす。

次に, $p \mid X$ かつ $p \mid Y$ を満たす素数 p があるとすれば矛盾することを導こう。
 x と y は互いに素であるから, x, y の少なくとも一方は奇数である。ここで,

$$x \text{ が偶数ならば } 5x^4 - y^4 \equiv -1 \pmod{8}$$

$$y \text{ が偶数ならば } 5x^4 - y^4 \equiv 5 \pmod{8}$$

であるから, $5x^4 - y^4$ が平方数 $(2z)^2$ と等しくなるには,

$$x, y \text{ はともに奇数}$$

でなければならない。このとき,

$$4 \mid 2(xy + z), \quad 5x^2 + y^2 \equiv 6 \pmod{8}$$

であるから, (2)より

$$t \text{ は偶数, } s \text{ は奇数}$$

であり, (3), (4)より

$$X, Y \text{ はともに奇数}$$

である。^{注3} したがって, $p \mid X$ かつ $p \mid Y$ を満たす素数 p があるとすれば奇素数である。

(8), (9)より

$$\begin{aligned} p \mid X \text{ かつ } p \mid Y &\implies p^2 \mid 5u^2 + 2uv + v^2 \text{ かつ } p^2 \mid 5u^2 + 10uv + v^2 \\ &\implies p^2 \mid 8uv \text{ かつ } p^2 \mid 5u^2 + 10uv + v^2 \\ &\implies p^2 \mid uv \text{ かつ } p^2 \mid 5u^2 + v^2 \\ &\implies "p \mid u \text{ または } p \mid v" \text{ かつ } p^2 \mid 5u^2 + v^2 \\ &\implies p \mid u \text{ かつ } p \mid v \end{aligned}$$

(7)を考えて,

$$p \mid u = stxy \text{ より } p \mid s \text{ または } p \mid t \text{ または } p \mid x \text{ または } p \mid y$$

であり, $\gcd(s, t) = 1$ および $\gcd(x, y) = 1$ にも注意すると

$$p \mid s \text{ かつ } p \mid v \implies p \mid t^2 y^2 \implies p \mid y$$

$$p \mid t \text{ かつ } p \mid v \implies p \mid s^2 x^2 \implies p \mid x$$

$$p \mid x \text{ かつ } p \mid v \implies p \mid t^2 y^2 \implies p \mid t$$

$$p \mid y \text{ かつ } p \mid v \implies p \mid s^2 x^2 \implies p \mid s$$

であるから

$$\text{「 } p \mid s \text{ かつ } p \mid y \text{ 」または「 } p \mid t \text{ かつ } p \mid x \text{ 」}$$

となる。ところが, いずれの場合も $p \mid Y$ および (4)より $p \mid \gcd(x, y)$ または $p \mid \gcd(s, t)$ となって, 初めの仮定に反する。ゆえに,

$$\gcd(X, Y) = 1$$

が成り立つ。

(証明おわり)

証明以前の考察

ディオファントス方程式

$$5x^4 - y^4 = 4z^2 \tag{11}$$

における通常の解法手順を記しておく。定理の証明は、その変形(の *Case I*)を逆に辿ったものである。

x と y が互いに素であるとき、(11)より x と y の偶奇は等しいから、

x, y はともに奇数

である。 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より $5x^4 - y^4 \equiv 4 \pmod{8}$ であるから、

z は奇数

である。

$y^2 - x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ より

$$x^2 = a + b, \quad y^2 = a + 5b \tag{12}$$

を満たす整数 a, b が存在する。(11)を実数の範囲で考えると

$$5x^4 - y^4 = (\sqrt{5}x^2 + y^2)(\sqrt{5}x^2 - y^2) = 4z^2 > 0$$

であるから、(12)より

$$a = \frac{5x^2 - y^2}{4} > \frac{\sqrt{5}x^2 - y^2}{4} > 0$$

(11), (12)より

$$\begin{aligned} 5(a + b)^2 - (a + 5b)^2 &= 4a^2 - 20b^2 = 4z^2 \\ a^2 - 5b^2 &= z^2 \end{aligned} \tag{13}$$

ここで、 b が奇数であるとすれば、 $5b^2 + z^2 \equiv 6 \pmod{8}$ となって

$$5b^2 + z^2 = a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$$

となることに反するから、

b は偶数、 a は正の奇数、特に $a \pm z$ は偶数

である。(13)を変形すると、

$$\begin{aligned} a^2 - z^2 &= 5b^2 \\ \frac{a + z}{2} \cdot \frac{a - z}{2} &= 5\left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{14}$$

$p \mid \frac{a + z}{2}$ かつ $p \mid \frac{a - z}{2}$ となる素数 p があるとすれば、(14), (12)より

$$\begin{aligned} p \mid \frac{a + z}{2} \text{ かつ } p \mid \frac{a - z}{2} &\implies p \mid a \text{ かつ } p \mid z \text{ かつ } p^2 \mid 5b^2 \\ &\implies p \mid a \text{ かつ } p \mid b \\ &\implies p \mid x \text{ かつ } p \mid y \end{aligned}$$

となって $\gcd(x, y) = 1$ に反するから

$$\gcd\left(\frac{a + z}{2}, \frac{a - z}{2}\right) = 1 \tag{15}$$

である。

Case I $b > 0$

(14), (15)より

$$\left(\frac{a+z}{2}, \frac{a-z}{2}, \frac{b}{2}\right) = (5c^2, d^2, cd) \text{ または } (d^2, 5c^2, cd)$$

を満たす互いに素な自然数 c, d が存在し,

$$a = 5c^2 + d^2, \quad \pm z = 5c^2 - d^2, \quad b = 2cd \quad (16)$$

(12)の x の式に代入して

$$x^2 = a + b = 5c^2 + 2cd + d^2 = (d+c)^2 + (2c)^2$$

$a = 5c^2 + d^2$ は奇数であるから, c と d の偶奇は異なり, $d+c$ は奇数である。よって,

$$\gcd(d+c, 2c) = \gcd(d+c, c) = \gcd(d, c) = 1$$

となるから, ピタゴラス数の性質より

$$d+c = g^2 - h^2, \quad 2c = 2gh, \quad x = g^2 + h^2 \quad (17)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h が存在^{注4}し,

$$c = gh, \quad d = g^2 - gh - h^2 \quad (18)$$

(16)を(12)の y の式に代入して, (18)を用いると

$$\begin{aligned} y^2 &= a + 5b \\ &= 5c^2 + 10cd + d^2 \\ &= 5g^2h^2 + 10gh(g^2 - gh - h^2) + (g^2 - gh - h^2)^2 \\ &= g^4 + 8g^3h - 6g^2h^2 - 8gh^3 + h^4 \\ &= 8gh(g^2 - h^2) + g^4 - 6g^2h^2 + h^4 \\ &= 8gh(g^2 - h^2) + (g^2 - h^2)^2 - 4g^2h^2 \\ &= (g^2 + 4gh - h^2)^2 - 20g^2h^2 \\ (g^2 + 4gh - h^2)^2 - y^2 &= 20g^2h^2 \end{aligned}$$

$g^2 + 4gh - h^2 = d + 5c$ は正の奇数であり, y も正の奇数であるから,

$$g^2 + 4gh - h^2 \pm y \text{ はともに正の偶数}$$

であり,

$$\frac{g^2 + 4gh - h^2 + y}{2} \cdot \frac{g^2 + 4gh - h^2 - y}{2} = 5g^2h^2 \quad (19)$$

$p \mid \frac{g^2 + 4gh - h^2 + y}{2}$ かつ $p \mid \frac{g^2 + 4gh - h^2 - y}{2}$ となる素数 p があるとすれば,

$$\begin{aligned} p &\mid \frac{g^2 + 4gh - h^2 + y}{2} \text{ かつ } p \mid \frac{g^2 + 4gh - h^2 - y}{2} \\ &\implies p \mid g^2 + 4gh - h^2 \text{ かつ } p \mid y \text{ かつ } p^2 \mid 5g^2h^2 \\ &\implies p \mid gh \text{ かつ } p \mid g^2 + 4gh - h^2 \\ &\implies \text{“} p \mid g \text{ または } p \mid h \text{” かつ } p \mid g^2 - h^2 \\ &\implies p \mid g \text{ かつ } p \mid h \end{aligned}$$

となって $\gcd(g, h) = 1$ に反するから,

$$\gcd\left(\frac{g^2 + 4gh - h^2 + y}{2}, \frac{g^2 + 4gh - h^2 - y}{2}\right) = 1$$

であり, (19)より

$$\left(\frac{g^2 + 4gh - h^2 + y}{2}, \frac{g^2 + 4gh - h^2 - y}{2}, gh \right) \\ = (k^2, 5l^2, kl) \text{ または } (5l^2, k^2, kl)$$

を満たす互いに素な自然数 k, l が存在し,

$$g^2 + 4gh - h^2 = k^2 + 5l^2 \quad (20)$$

$$\pm y = k^2 - 5l^2 \quad (21)$$

$\gcd(g, k) = s$ とおき,

$$g = su, \quad k = sv \quad (u \text{ と } v \text{ は互いに素な自然数}) \quad (22)$$

とすると, $gh = kl$ より

$$uh = vl$$

が得られる。 u と v は互いに素(な自然数)であるから

$$h = tv, \quad l = tu \quad (t \text{ は自然数}) \quad (23)$$

と表される。(22), (23)を(20)に代入して

$$s^2u^2 + 4stuv - t^2v^2 = s^2v^2 + 5t^2u^2$$

$$s^2(u^2 - v^2) + 4stuv = t^2(5u^2 + v^2)$$

$$\therefore (5u^2 + v^2) \frac{t^2}{s^2} - 4uv \frac{t}{s} - (u^2 - v^2) = 0$$

2次方程式の解の公式より

$$\frac{t}{s} = \frac{2uv \pm \sqrt{(2uv)^2 + (5u^2 + v^2)(u^2 - v^2)}}{5u^2 + v^2} \\ = \frac{2uv \pm \sqrt{5u^4 - v^4}}{5u^2 + v^2}$$

$\frac{t}{s}$ は有理数であるから,

$$5u^4 - v^4 = r^2 \quad (24)$$

を満たす自然数 r が存在する。 $(5u^4 = v^4 \text{ とはなり得ない。})$

(22), (23)を(17)に代入して

$$x = g^2 + h^2 = s^2u^2 + t^2v^2 > s^2u^2 \geq u^2 \geq u \quad (25)$$

(21), (22), (23)より

$$\pm y = k^2 - 5l^2 = s^2v^2 - 5t^2u^2 \quad (26)$$

$g = su$ と $h = tv$ は互いに素であるから, 特に u と v は互いに素であり,

$$u \text{ が偶数ならば } 5u^4 - v^4 \equiv -1 \pmod{8}$$

$$v \text{ が偶数ならば } 5u^4 - v^4 \equiv 5 \pmod{8}$$

となって(24)が成り立つ ($5u^4 - v^4$ が平方数になる)ことに反するから,

$$u, v \text{ はともに奇数, } r \text{ は偶数}$$

となる。そこで, $r = 2w$ とおくと, (24)より

$$5u^4 - v^4 = 4w^2, \quad \gcd(u, v) = 1 \quad (27)$$

Case II $b < 0$

(14), (15)より

$$\left(\frac{a+z}{2}, \frac{a-z}{2}, \frac{b}{2}\right) = (5c^2, d^2, -cd) \text{ または } (d^2, 5c^2, -cd)$$

を満たす互いに素な自然数 c, d が存在し,

$$a = 5c^2 + d^2, \quad \pm z = 5c^2 - d^2, \quad b = -2cd \quad (28)$$

(12)の x の式に代入して

$$x^2 = a + b = 5c^2 - 2cd + d^2 = (d - c)^2 + (2c)^2$$

$a = 5c^2 + d^2$ は奇数であるから, c と d の偶奇は異なり, $d - c$ は奇数である。よって,

$$\gcd(d - c, 2c) = \gcd(d - c, c) = \gcd(d, c) = 1$$

となるから, ピタゴラス数の性質より

$$d - c = g^2 - h^2, \quad 2c = 2gh, \quad x = g^2 + h^2 \quad (29)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h が存在^{注4}し,

$$c = gh, \quad d = g^2 + gh - h^2 \quad (30)$$

(28)を(12)の y の式に代入して, (30)を用いると

$$\begin{aligned} y^2 &= a + 5b \\ &= 5c^2 - 10cd + d^2 \\ &= 5g^2h^2 - 10gh(g^2 + gh - h^2) + (g^2 + gh - h^2)^2 \\ &= g^4 - 8g^3h - 6g^2h^2 + 8gh^3 + h^4 \\ &= -8gh(g^2 - h^2) + g^4 - 6g^2h^2 + h^4 \\ &= -8gh(g^2 - h^2) + (g^2 - h^2)^2 - 4g^2h^2 \\ &= (g^2 - 4gh - h^2)^2 - 20g^2h^2 \\ (g^2 - 4gh - h^2)^2 - y^2 &= 20g^2h^2 \end{aligned}$$

$g^2 - 4gh - h^2 = d - 5c$ は奇数, y は正の奇数であるから,

1° $g^2 - 4gh - h^2 < 0$ のときは, g と h を入れ替えて Case I に帰着される。

2° $g^2 - 4gh - h^2 > 0$ のときは,

$$g^2 - 4gh - h^2 \pm y \text{ はともに正の偶数}$$

であり,

$$\frac{g^2 - 4gh - h^2 + y}{2} \cdot \frac{g^2 - 4gh - h^2 - y}{2} = 5g^2h^2 \quad (31)$$

$p \mid \frac{g^2 - 4gh - h^2 + y}{2}$ かつ $p \mid \frac{g^2 - 4gh - h^2 - y}{2}$ となる素数 p があるとすれば,

$$p \mid \frac{g^2 - 4gh - h^2 + y}{2} \text{ かつ } p \mid \frac{g^2 - 4gh - h^2 - y}{2}$$

$$\Rightarrow p \mid g^2 - 4gh - h^2 \text{ かつ } p \mid y \text{ かつ } p^2 \mid 5g^2h^2$$

$$\Rightarrow p \mid gh \text{ かつ } p \mid g^2 - 4gh - h^2$$

$$\Rightarrow “p \mid g \text{ または } p \mid h” \text{ かつ } p \mid g^2 - h^2$$

$$\Rightarrow p \mid g \text{ かつ } p \mid h$$

となつて $\gcd(g, h) = 1$ に反するから ,

$$\gcd\left(\frac{g^2 - 4gh - h^2 + y}{2}, \frac{g^2 - 4gh - h^2 - y}{2}\right) = 1$$

であり , (31)より

$$\begin{aligned} & \left(\frac{g^2 - 4gh - h^2 + y}{2}, \frac{g^2 - 4gh - h^2 - y}{2}, gh\right) \\ & = (k^2, 5l^2, kl) \text{ または } (5l^2, k^2, kl) \end{aligned}$$

を満たす互いに素な自然数 k, l が存在し ,

$$g^2 - 4gh - h^2 = k^2 + 5l^2 \quad (32)$$

$$\pm y = k^2 - 5l^2 \quad (33)$$

$\gcd(g, k) = s$ とおき ,

$$g = su, \quad k = sv \quad (u \text{ と } v \text{ は互いに素な自然数}) \quad (34)$$

とすると , $gh = kl$ より

$$uh = vl$$

が得られる。 u と v は互いに素(な自然数)であるから

$$h = tv, \quad l = tu \quad (t \text{ は自然数}) \quad (35)$$

と表される。(34), (35)を(32)に代入して

$$s^2u^2 - 4stuv - t^2v^2 = s^2v^2 + 5t^2u^2$$

$$s^2(u^2 - v^2) - 4stuv = t^2(5u^2 + v^2)$$

$$\therefore (5u^2 + v^2)\frac{t^2}{s^2} + 4uv\frac{t}{s} - (u^2 - v^2) = 0$$

2 次方程式の解の公式より

$$\begin{aligned} \frac{t}{s} &= \frac{-2uv \pm \sqrt{(2uv)^2 + (5u^2 + v^2)(u^2 - v^2)}}{5u^2 + v^2} \\ &= \frac{-2uv \pm \sqrt{5u^4 - v^4}}{5u^2 + v^2} \end{aligned}$$

$\frac{t}{s}$ は有理数であるから ,

$$5u^4 - v^4 = r^2$$

を満たす自然数 r が存在する。($5u^4 = v^4$ とはなり得ない。)

以下 , Case I と同様に

$$x = g^2 + h^2 = s^2u^2 + t^2v^2 > s^2u^2 \geq u^2 \geq u \quad (25)$$

$$\pm y = k^2 - 5l^2 = s^2v^2 - 5t^2u^2 \quad (26)$$

$$5u^4 - v^4 = 4w^2, \quad \gcd(u, v) = 1 \quad (27)$$

を得る。

注1 言葉の響きから， x, y, z のどの2つも互いに素であるとの誤解を与えかねないが， x, y, z が互いに素であるとは $\gcd(x, y, z) = 1$ の意味である。定理の証明では， $\gcd(x, y, z) = 1$ の特別な場合として $\gcd(x, y) = 1$ において（無数に自然数解があることを）示せば十分であるとしている。

なお，次のように考えれば，本定理は一般の場合を $\gcd(x, y) = 1$ の場合に帰着させることができる。 $\gcd(x, y) = 2^n d$ (n は非負整数， d は奇数) とするとき，

$$x = 2^n dx_1, \quad y = 2^n dy_1 \quad (x_1, y_1 \text{ は自然数})$$

とにおいて

$$5x^4 - y^4 = 4z^2 \tag{1}$$

の両辺を $(2^n d)^4$ で割ると

$$5x_1^4 - y_1^4 = \left(\frac{z}{2^{2n-1}d^2} \right)^2$$

ここで，

$$x_1 \text{ が偶数であるとすれば } 5x_1^4 - y_1^4 \equiv -y_1^4 \equiv -1 \pmod{8}$$

$$y_1 \text{ が偶数であるとすれば } 5x_1^4 - y_1^4 \equiv 5x_1^4 \equiv 5 \pmod{8}$$

となって，いずれの場合も $5x_1^4 - y_1^4$ は平方数にはならないから， x_1, y_1 はともに奇数であることがわかる。このとき $\frac{z}{2^{2n-1}d^2}$ は偶数であり， $2z_1$ (z_1 は自然数) とおくことができ

$$5x_1^4 - y_1^4 = 4z_1^2$$

となる。

注2 (1)の自然数解が(3), (4)で尽くされるわけではない。(3), (4)で与えられる自然数解に限定しても既に無数にあることを示そうというのである。

注3 「 x, y と同様に考えて X, Y はともに奇数」と言いたいところであるが，この時点ではまだ $\gcd(X, Y) = 1$ は示されていない。

注4 $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす自然数の組 (x, y, z) をピタゴラス数(Pythagorean triple) という。日本語では「数」と訳されるが，個別の数を指すのではなく，3つの数の組を指す言葉である。 x, y, z が互いに素であるときは，偶奇の異なる互いに素な自然数 m, n を用いて

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

と表される。高校1年生にも十分証明可能な有名公式なので，証明の詳細は省略するが，必要ならば [1] (p.19 ~ p.22) などを参考にされるとよいだろう。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] T.Nagell, *Introduction to number theory*, Chelsea (1981)
- [3] 大塚美紀生, ディオファントス方程式 $x^3 + y^3 = 2z^3$ について,
早稲田数学フォーラム (2009), <http://wasmath.la.coocan.jp/x3+y3=2z3.pdf>