

方程式 $8^x + 15^y = 17^z$ の自然数解

大塚美紀生

1956年, W. Sierpiński により

方程式 $3^x + 4^y = 5^z$ の自然数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ のみである
ことが証明された。同年, L. Jeśmanowicz により

$(a, b, c) = (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61)$ のとき,
方程式 $a^x + b^y = c^z$ の自然数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ のみである
ことが証明された。この結果をもとに,

Jeśmanowicz 予想

$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす自然数 a, b, c に対して, 方程式 $a^x + b^y = c^z$
の自然数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ のみであろう

が提示された。

本稿では, $(a, b, c) = (8, 15, 17)$ の場合を考察する。

定理 方程式

$$8^x + 15^y = 17^z \quad (1)$$

の自然数解は $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ のみである。

この定理自体は 1984 年に Grytczuk と Grelak によって得られた結果の一部であるが,
 $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ に注目して [2] と同様の手法を用いることにより, 高校数学の範囲
で証明できることを報告する。

定理の証明

(1)より

$$0 + (-1)^y \equiv 1^z \equiv 1 \pmod{4}$$

であるから, y は偶数であり,

$$y = 2m \quad (2)$$

を満たす自然数 m が存在する。

(1)において 7 を法として考えると

$$1 + 1 \equiv 3^z \pmod{7}$$

であり, $3^2 \equiv 2, 3^3 \equiv 6 \equiv -1, 3^4 \equiv -3, 3^5 \equiv -2, 3^6 \equiv -6 \equiv 1 \pmod{7}$ であるから

$$z \equiv 2 \pmod{6},$$

特に z は偶数であるから

$$z = 2n \quad (3)$$

を満たす自然数 n が存在する。

(1), (2), (3)より

$$2^{3x} = 17^{2n} - 15^{2m} = (17^n + 15^m)(17^n - 15^m)$$

素因数分解を考えると

$$\begin{cases} 17^n + 15^m = 2^{3x-a} \\ 17^n - 15^m = 2^a \end{cases} \quad (0 < a < 3x - a) \quad (4)$$

を満たす整数 a が存在することがわかる。2式の差をとると

$$2 \cdot 15^m = 2^{3x-a} - 2^a$$

$$\therefore 15^m = 2^{a-1}(2^{3x-2a} - 1) \quad (3x - 2a > 0)$$

15^m , $2^{3x-2a} - 1$ はともに奇数であるから,

$$2^{a-1} = 0 \quad \therefore a = 1$$

このとき (4)は

$$\begin{cases} 17^n + 15^m = 2^{3x-1} \\ 17^n - 15^m = 2 \end{cases}$$

辺々加えて

$$2 \cdot 17^n = 2^{3x-1} + 2$$

$$17^n - 1 = 2^{3x-2}$$

$$(17 - 1)(17^{n-1} + 17^{n-2} + \dots + 17 + 1) = 2^{3(x-2)+4}$$

$$17^{n-1} + 17^{n-2} + \dots + 17 + 1 = 2^{3(x-2)}$$

左辺は奇数 n 個の和であるから,

$$x \geq 3 \text{ ならば } n \text{ は偶数}$$

である。 $n = 2b$ とおくと, (5)は

$$(17^b + 1)(17^b - 1) = 2^{3x-2}$$

であり,

$$(17^b + 1) - (17^b - 1) = 2$$

よりともに偶数であるから, 素因数分解を考えて

$$\begin{cases} 17^b + 1 = 2^{3x-2-c} \\ 17^b - 1 = 2^c \end{cases} \quad (0 < c < 3x - 2 - c)$$

を満たす整数 c が存在し, 2式の差をとると

$$2^{3x-2-c} - 2^c = 2$$

$$\therefore 2^{c-1}(2^{3x-2-2c} - 1) = 1$$

整数の積の組を考えて

$$2^{c-1} = 1 \text{ かつ } 2^{3x-2-2c} - 1 = 1$$

$$c - 1 = 0 \text{ かつ } 3x - 2 - 2c = 1$$

$$\therefore c = 1, \quad 3x = 5$$

3と5は互いに素であるから, これを満たす整数 x は存在しない。したがって,

$$x \leq 2$$

1° $x = 1$ のとき, (5)は

$$17^n = 3$$

$17^n \geq 17 > 3$ より, この方程式は成り立たない。

2° $x = 2$ のとき, (5)は

$$17^n = 17 \quad \therefore n = 1$$

(3)より

$$z = 2$$

(1)より

$$15^y = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225 = 15^2 \quad \therefore y = 2$$

以上より, 方程式(1)を満たす自然数解は

$$(x, y, z) = (2, 2, 2)$$

のみである。

(証明おわり)

注 ピタゴラス数 $(8, 15, 17)$ を $(2^{3k}, 2^{6k-2} - 1, 2^{6k-2} + 1)$ (k は自然数) と一般化しても, 上の証明はそのまま通用する。

参考文献

- [1] 樋口勇気, Jeśmanowicz 予想について, 東北大学大学院修士論文(2007).
- [2] 大塚美紀生, ディオファントス方程式 $2^x + p^y = z^2$, 早稲田数学フォーラム(2009), <http://wasmath.la.coocan.jp/2xpyz2.pdf>