

# 方程式 $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$ 再論

大塚美紀生

2019年[3]において, 自然数  $x, y, z$  が

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たすとき  $x = y$  であることを証明した。当時の方針では, 方程式

$$(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$$

の解決が不可欠であり, 解決に何年もかかる大がかりなものになった。ところが, [5]で行なわれた手法と同様にして,

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2 \text{ と } 9x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = z^2 \text{ を同時に考える}$$

ことにより, 方程式  $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$  を介さずに解くことができる。その結果, 方程式  $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$  の別解も得られることになる。

定理1 自然数  $x, y, z$  が

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たすならば,  $x = y$  が成り立つ。

定理2 自然数  $x, y, z$  が

$$9x^4 - 2x^2y^2 + 9y^4 = z^2$$

を満たすならば,  $x = y$  が成り立つ。

定理3 連立方程式

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = a^2 \\ 3y^2 - 2x^2 = b^2 \end{cases}$$

を満たす自然数  $x, y, a, b$  が存在するのは,  $x = y (= a = b)$  の場合に限られる。

偶奇が異なる場合だけを補題として証明

定理1と定理2のどちらも結果が  $x = y$  であることに注目すると, どちらも  $x$  と  $y$  の偶奇が異なる場合は矛盾が導きやすいと期待できる。証明が難しいと予想される偶奇が等しい場合は, 変数変換により  $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$  と  $9x^4 - 2x^2y^2 + 9y^4 = z^2$  を入れ替えることで偶奇が異なる場合に帰着される。

そこで, 定理の一部である  $x$  と  $y$  で偶奇が異なる場合を補題として取り上げれば, 定理の全体構造が見通し良くなり, 事実上2つの補題の証明だけで済むことになる。表向きは[5]のアイデアを借りた形ではあるが, 2つの不定方程式を相互に補うという方針は実際には新しい手法である。

補題 1 自然数  $x, y$  の偶奇が異なるとき,

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数  $z$  は存在しない。

(証明) (1)かつ  $x \not\equiv y \pmod{2}$  を満たす自然数の組  $(x, y, z)$  が存在するとすれば, その中で

$z$  が最小

となるものが存在するはずである。その場合を考えることにする。

$\delta = \gcd(x, y)$  とすると,  $x \not\equiv y \pmod{2}$  より  $\delta$  は奇数であり, (1)より  $\delta^4 | z^2$  であるから,

$$x = \delta x_1, \quad y = \delta y_1, \quad z = \delta^2 z_1, \quad x_1 \not\equiv y_1 \pmod{2}$$

を満たす自然数  $x_1, y_1, z_1$  が存在して

$$x_1^4 + 7x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つ。 $z$  の最小性より  $\delta = 1$  となるから,

$x$  と  $y$  は互いに素

である。対称性より

$x$  は奇数,  $y$  は偶数

であるとしてよい。

(1)を変形すると

$$(x^2 - y^2)^2 + 9x^2y^2 = z^2 \quad (2)$$

$x^2 - y^2$  と  $3xy$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,  $p | 3xy$  より

$$p = 3 \text{ または } p | x \text{ または } p | y$$

$p | x^2 - y^2$  であるから,  $p | x$  または  $p | y$  ならば,  $p | x$  かつ  $p | y$  となって互いに素であることに反するから,

$$p = 3 \text{ または } x^2 - y^2 \text{ と } 3xy \text{ は互いに素}$$

である。 $p = 3$  の場合は,  $3 | x^2 - y^2$  より,  $x$  も  $y$  も 3 で割れない。

1°  $3 | x^2 - y^2$  のとき

(2)より,  $z$  も 3 で割れて

$$\left(\frac{x^2 - y^2}{3}\right)^2 + (xy)^2 = \left(\frac{z}{3}\right)^2$$

$\frac{x^2 - y^2}{3}$  と  $xy$  は互いに素であるから, ピタゴラス方程式の定理<sup>注1</sup>を適用すると

$$\frac{|x^2 - y^2|}{3} = m^2 - n^2, \quad xy = 2mn, \quad \frac{z}{3} = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素で偶奇の異なる自然数  $m, n$  が存在する。必要ならば,  $m$  と  $n$  を入れ替えて

$$x^2 - y^2 = 3(m^2 - n^2)^{\text{注2}} \quad (3)$$

$$xy = 2mn \quad (4)$$

としてよい。 $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $y^2 \equiv 0 \pmod{4}$  であるから, (3)より

$$3(m^2 - n^2) \equiv 1 \pmod{4}$$

となる。このとき,  $m^2 \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$  に限られてしまうから,  
 $m$  は偶数,  $n$  は奇数

である。

$\gcd(x, n) = s$  とすると

$$x = st, \quad n = su \tag{5}$$

を満たす互いに素な正の奇数  $t, u$  が存在する。このとき, (4)より

$$ty = 2mu$$

であり,  $t$  と  $u$  は互いに素であるから

$$y = uv, \quad 2m = tv \tag{6}$$

を満たす正の偶数  $v$  が存在する。

(5), (6)を(3)に代入すると

$$\begin{aligned} s^2 t^2 - u^2 v^2 &= 3 \cdot \frac{t^2 v^2}{4} - 3s^2 u^2 \\ s^2(t^2 + 3u^2) &= \frac{3t^2 + 4u^2}{4} v^2 \\ \frac{s^2}{v^2} &= \frac{3t^2 + 4u^2}{4(t^2 + 3u^2)} = \frac{(t^2 + 3u^2)(3t^2 + 4u^2)}{4(t^2 + 3u^2)^2} \end{aligned}$$

と表されるから,

$$(t^2 + 3u^2)(3t^2 + 4u^2) = w^2 \tag{7}$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 + 3u^2, u^2) &= \gcd(t^2, u^2) = 1 \\ \gcd(t^2 + 3u^2, 3t^2 + 4u^2) &= \gcd(t^2 + 3u^2, 3(t^2 + 3u^2) - 5u^2) \\ &= \gcd(t^2 + 3u^2, 5u^2) \\ &= \gcd(t^2 + 3u^2, 5) \\ &= 1 \text{ または } 5 \end{aligned}$$

であるから, (7)より

$$(t^2 + 3u^2, 3t^2 + 4u^2) = (k^2, \ell^2) \text{ または } (5k^2, 5\ell^2)$$

を満たす互いに素な自然数  $k, \ell$  ( $\ell$  は奇数) が存在する。ところが,  $t, u, \ell$  は奇数であるから

$$3t^2 + 4u^2 \equiv 7 \pmod{8}, \quad \ell^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 5\ell^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

となって矛盾する。

2°  $3 \nmid x^2 - y^2$  のとき

$x^2 - y^2$  と  $3xy$  は互いに素であり, (2)にピタゴラス方程式の定理<sup>註1</sup>を適用すると

$$|x^2 - y^2| = m^2 - n^2, \quad 3xy = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

を満たす偶奇が異なる自然数  $m, n$  が存在する。1°の場合と同様に

$$x^2 - y^2 = m^2 - n^2 \tag{8}$$

$$3xy = 2mn \quad (9)$$

としてよい。(8)より

$m$  は奇数,  $n$  は偶数

である。

$\gcd(x, m) = s$  とすると

$$x = st, \quad m = su \quad (10)$$

を満たす互いに素な正の奇数  $t, u$  が存在する。(9)より

$$3ty = 2un$$

であり,  $t$  と  $u$  は互いに素であるから

$$3y = uv, \quad 2n = tv \quad (11)$$

を満たす正の偶数  $v$  が存在する。

(10), (11) を (8) に代入すると

$$\begin{aligned} s^2 t^2 - \frac{u^2 v^2}{9} &= s^2 u^2 - \frac{t^2 v^2}{4} \\ s^2 (t^2 - u^2) &= \frac{4u^2 - 9t^2}{36} v^2 \end{aligned}$$

$t^2 - u^2 = 0$  かつ  $4u^2 - 9t^2 = 0$  とすると  $t^2 = u^2 = 0$  となって矛盾するから,  
 $t^2 - u^2 \neq 0, \quad 4u^2 - 9t^2 \neq 0$

であり,

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{4u^2 - 9t^2}{36(t^2 - u^2)} = \frac{(t^2 - u^2)(4u^2 - 9t^2)}{36(t^2 - u^2)^2}$$

と表されるから,

$$(t^2 - u^2)(4u^2 - 9t^2) = w^2 \quad (12)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\begin{aligned} \gcd(t^2 - u^2, t^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(t^2 - u^2, 4u^2 - 9t^2) &= \gcd(t^2 - u^2, 4(u^2 - t^2) - 5t^2) \\ &= \gcd(t^2 - u^2, 5t^2) \\ &= \gcd(t^2 - u^2, 5) \\ &= 1 \text{ または } 5 \end{aligned}$$

であるから, (12)より

$$(t^2 - u^2, 4u^2 - 9t^2) = (k^2, \ell^2), (-k^2, -\ell^2), (5k^2, 5\ell^2), (-5k^2, -5\ell^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数  $k, \ell$  ( $\ell$  は奇数) が存在する。

$t, u, \ell$  は奇数であるから

$$\begin{aligned} 4u^2 - 9t^2 &\equiv 4 - 9 \equiv 3 \pmod{8}, \\ \ell^2 &\equiv 1, \quad -\ell^2 \equiv 7, \quad 5\ell^2 \equiv 5, \quad -5\ell^2 \equiv -5 \equiv 3 \pmod{8} \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$t^2 - u^2 = -5k^2 \quad (13)$$

$$4u^2 - 9t^2 = -5\ell^2 \quad (14)$$

に定まる。(13) × 4 + (14) より

$$\begin{aligned} -5t^2 &= -4 \cdot 5k^2 - 5\ell^2 \\ (2k)^2 + \ell^2 &= t^2 \end{aligned}$$

$2k$  と奇数  $\ell$  は互いに素であるから、ピタゴラス方程式の定理<sup>注1</sup>を適用できて、

$$2k = 2gh, \quad \ell = g^2 - h^2, \quad t = g^2 + h^2$$

を満たす偶奇が異なる自然数  $g, h$  が存在する。(13)に代入すると

$$u^2 = (g^2 + h^2)^2 + 5(gh)^2 = g^4 + 7g^2h^2 + h^4 \quad (15)$$

(9), (2) より

$$u^2 \leq m^2 n^2 = \frac{9}{4} x^2 y^2 < 9x^2 y^2 < z^2$$

であるから、(15)の成立は  $z$  の最小性に反する。 ■

補題2 自然数  $x, y$  の偶奇が異なるとき、

$$9x^4 - 2x^2y^2 + 9y^4 = z^2 \quad (16)$$

を満たす自然数  $z$  は存在しない。

(証明) (16)かつ  $x \not\equiv y \pmod{2}$  を満たす自然数の組  $(x, y, z)$  が存在すると仮定して矛盾を導く。補題1と同様に、

$x$  と  $y$  は互いに素

であるとして証明すればよい。また、対称性より

$x$  が奇数、 $y$  が偶数

であるとしてよい。(16)を変形すると

$$9(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2 = z^2 \quad (17)$$

ここで  $3(x^2 - y^2)$  と  $4xy$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば、 $p \mid 3(x^2 - y^2)$  より  $p$  は奇素数であり、

$$p \mid 4xy \implies p \mid xy \implies p \mid x \text{ または } p \mid y$$

$p \mid x^2 - y^2$  ならば  $p \mid x$  かつ  $p \mid y$  となって矛盾するから、

$$p = 3 \text{ または } 3(x^2 - y^2) \text{ と } 4xy \text{ は互いに素}$$

である。 $p = 3$  の場合は、 $3 \mid xy$  であるから、 $x^2 - y^2$  は3で割れない。

1°  $3 \mid xy$  のとき

(17)より、 $3 \mid z$  であり、

$$(x^2 - y^2)^2 + \left(\frac{4xy}{3}\right)^2 = \left(\frac{z}{3}\right)^2$$

と表され、 $x^2 - y^2$  と  $\frac{4}{3}xy$  は互いに素であるから、ピタゴラス方程式の定理<sup>注1</sup>を適用すると

$$|x^2 - y^2| = m^2 - n^2, \quad \frac{4}{3}xy = 2mn, \quad \frac{z}{3} = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素で偶奇の異なる自然数  $m, n$  が存在する。必要ならば,  $m$  と  $n$  を入れ替えて

$$x^2 - y^2 = m^2 - n^2 \quad \text{注}^2 \quad (18)$$

$$2xy = 3mn \quad (19)$$

としてよい。(18)より

$m$  は奇数,  $n$  は偶数

である。

$\gcd(x, m) = s$  とすると,

$$x = st, \quad m = su \quad (20)$$

を満たす互いに素な正の奇数  $t, u$  が存在する。(19)より

$$2ty = 3un$$

であり,  $t$  と  $u$  は互いに素であるから

$$2y = uv, \quad 3n = tv \quad (21)$$

を満たす正の偶数  $v$  が存在する。

(20), (21) を (18) に代入すると

$$s^2 t^2 - \frac{u^2 v^2}{4} = s^2 u^2 - \frac{t^2 v^2}{9}$$

$$s^2 (t^2 - u^2) = \frac{9u^2 - 4t^2}{36} v^2$$

$t^2 - u^2 = 0$  かつ  $9u^2 - 4t^2 = 0$  とすると  $t^2 = u^2 = 0$  となって矛盾するから,  
 $t^2 - u^2 \neq 0, \quad 9u^2 - 4t^2 \neq 0$

であり,

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{9u^2 - 4t^2}{36(t^2 - u^2)} = \frac{(t^2 - u^2)(9u^2 - 4t^2)}{36(t^2 - u^2)^2}$$

と表されるから,

$$(t^2 - u^2)(9u^2 - 4t^2) = w^2 \quad \text{注}^3 \quad (22)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。 $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\gcd(t^2 - u^2, u^2) = \gcd(t^2, u^2) = 1$$

$$\gcd(t^2 - u^2, 9u^2 - 4t^2) = \gcd(t^2 - u^2, 5u^2 + 4(u^2 - t^2))$$

$$= \gcd(t^2 - u^2, 5u^2)$$

$$= \gcd(t^2 - u^2, 5)$$

$$= 1 \text{ または } 5$$

であるから, (22)より

$$(t^2 - u^2, 9u^2 - 4t^2) = (k^2, \ell^2), \quad (-k^2, -\ell^2), \quad (5k^2, 5\ell^2), \quad (-5k^2, -5\ell^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数  $k, \ell$  ( $\ell$  は奇数) が存在する。

$t, u, \ell$  は奇数であるから

$$9u^2 - 4t^2 \equiv 9 - 4 \equiv 5 \pmod{8},$$

$$\ell^2 \equiv 1, \quad -\ell^2 \equiv 7, \quad 5\ell^2 \equiv 5, \quad -5\ell^2 \equiv -5 \equiv 3 \pmod{8}$$

が成り立ち,

$$t^2 - u^2 = 5k^2 \tag{23}$$

$$9u^2 - 4t^2 = 5\ell^2 \tag{24}$$

に定まる。(23) × 4 + (24) より

$$5u^2 = 4 \times 5k^2 + 5\ell^2$$

$$(2k)^2 + \ell^2 = u^2$$

$2k$  と奇数  $\ell$  は互いに素であるから, ピタゴラス方程式の定理<sup>注1</sup>を適用できて,

$$2k = 2gh, \quad \ell = g^2 - h^2, \quad u = g^2 + h^2$$

を満たす偶奇が異なる自然数  $g, h$  が存在する。(23)に代入すると

$$t^2 = (g^2 + h^2)^2 + 5(gh)^2 = g^4 + 7g^2h^2 + h^4 \tag{25}$$

$g$  と  $h$  は偶奇が異なるから, (25)の成立は補題1と矛盾する。

## 2° $3 \nmid xy$ のとき

$3(x^2 - y^2)$  と  $4xy$  は互いに素であり, ピタゴラス方程式の定理<sup>注1</sup>を(17)に適用すると

$$3|x^2 - y^2| = m^2 - n^2, \quad 4xy = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

を満たす互いに素で偶奇の異なる自然数  $m, n$  が存在する。必要ならば,  $m$  と  $n$  を入れ替えて

$$3(x^2 - y^2) = m^2 - n^2 \quad \text{注2} \tag{26}$$

$$2xy = mn \tag{27}$$

としてよい。(26)より

$$m \text{ は偶数, } n \text{ は奇数}$$

である。

$$\gcd(x, n) = s \text{ とすると,}$$

$$x = st, \quad n = su \tag{28}$$

を満たす互いに素な正の奇数  $t, u$  が存在する。(27)より

$$2ty = mu$$

であり,  $t$  と  $u$  は互いに素であるから

$$2y = uv, \quad m = tv \tag{29}$$

を満たす正の偶数  $v$  が存在する。

(28), (29)を(26)に代入すると

$$3s^2t^2 - \frac{3}{4}u^2v^2 = t^2v^2 - s^2u^2$$

$$s^2(3t^2 + u^2) = \frac{3u^2 + 4t^2}{4}v^2$$

$$\frac{s^2}{v^2} = \frac{3u^2 + 4t^2}{4(3t^2 + u^2)} = \frac{(3t^2 + u^2)(3u^2 + 4t^2)}{4(3t^2 + u^2)}$$

と表されるから,

$$(3t^2 + u^2)(3u^2 + 4t^2) = w^2 \quad \text{注}^3 (30)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。  $\gcd(t, u) = 1$  より

$$\begin{aligned} \gcd(3t^2 + u^2, t^2) &= \gcd(u^2, t^2) = 1 \\ \gcd(3t^2 + u^2, 3u^2 + 4t^2) &= \gcd(3t^2 + u^2, 3(3t^2 + u^2) - 5t^2) \\ &= \gcd(3t^2 + u^2, 5t^2) \\ &= \gcd(3t^2 + u^2, 5) \\ &= 1 \text{ または } 5 \end{aligned}$$

であるから, (30) より

$$(3t^2 + u^2, 3u^2 + 4t^2) = (k^2, \ell^2) \text{ または } (5k^2, 5\ell^2)$$

のいずれかを満たす互いに素な自然数  $k, \ell$  ( $\ell$  は奇数) が存在する。ところが,  $t, u, \ell$  は奇数であるから

$$3u^2 + 4t^2 \equiv 7 \pmod{8}, \quad \ell^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 5\ell^2 \equiv 5 \pmod{8}$$

となって矛盾する。 ■

#### 定理 1 の証明

自然数  $x, y, z$  が

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (31)$$

を満たすとする。

$\delta = \gcd(x, y)$  とすると, (31) より  $\delta^4 \mid z^2$  であり,

$$x = \delta x_1, \quad y = \delta y_1, \quad z = \delta z_1$$

を満たす自然数  $x_1, y_1, z_1$  が存在して

$$x_1^4 + 7x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立つから,

$x$  と  $y$  が互いに素

であるときに定理を証明すれば十分である。このとき, 補題 1 より

$x, y$  はともに奇数

である。

$x \neq y$  であるとすれば, 対称性より

$$x > y$$

であるとしてよく,  $x + y, x - y$  はともに偶数であるから

$$x + y = 2m, \quad x - y = 2n$$

を満たす自然数  $m, n$  が存在して,

$$x = m + n, \quad y = m - n \quad (32)$$

(31) に代入すると

$$(m + n)^4 + 7(m^2 - n^2)^2 + (m - n)^4 = z^2$$



$$9m^4 - 2m^2n^2 + 9n^4 = z^2 \quad (33)$$

と書き換えられる。ところが、 $x$  と  $y$  はともに奇数であるから、(32)より  $m$  と  $n$  は偶奇が異なり、(33)の成立は補題2と矛盾する。

よって、 $x = y$  が成り立つ。 ■

## 定理2の証明

自然数  $x, y, z$  が

$$9x^4 - 2x^2y^2 + 9y^4 = z^2 \quad (34)$$

を満たすとする。定理1と同様に考えて、

$x$  と  $y$  は互いに素

であるときに証明すれば十分であり、このとき、補題2より

$x, y$  はともに奇数

である。

$x \neq y$  であるとすれば、対称性より

$$x > y$$

であるとしてよく、 $x + y$  と  $x - y$  はともに偶数であるから

$$x + y = 2a, \quad x - y = 2b$$

を満たす自然数  $a, b$  が存在して、

$$x = a + b, \quad y = a - b \quad (35)$$

(34)に代入すると

$$\begin{aligned} 9(a+b)^4 - 2(a^2 - b^2)^2 + 9(a-b)^4 &= z^2 \\ 16a^4 + 112a^2b^2 + 16b^4 &= z^2 \end{aligned} \quad (36)$$

このとき  $z^2$  は16で割り切れ、

$$z = 4c \quad (c \text{ は自然数})$$

と表されるから、(36)は

$$a^4 + 7a^2b^2 + b^4 = z^2 \quad (37)$$

と書き換えられる。ところが、 $x$  と  $y$  はともに奇数であるから、(35)より  $a$  と  $b$  は偶奇が異なり、(37)の成立は補題2に反する。

よって、 $x = y$  が成り立つ。 ■

定理 3 の証明

$$3x^2 - 2y^2 = a^2, \quad 3y^2 - 2x^2 = b^2 \quad (38)$$

を満たす自然数  $x, y, a, b$  が存在するものとする。

$$u = ax, \quad v = by$$

とおくと, (38) より

$$u^2 = a^2x^2 = (3x^2 - 2y^2)x^2 \quad (39)$$

$$v^2 = b^2y^2 = (3y^2 - 2x^2)y^2 \quad (40)$$

(39) - (40) より

$$u^2 - v^2 = 3(x^4 - y^4) \quad (41)$$

(39), (40), (41) を代入すると

$$\begin{aligned} u^4 + 7u^2v^2 + v^4 &= (u^2 - v^2)^2 + 9u^2v^2 \\ &= 9(x^4 - y^4)^2 + 9x^2y^2(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) \\ &= 9\{(x^4 - y^4)^2 + x^2y^2(-6x^4 + 13x^2y^2 - 6y^4)\} \\ &= 9\{(x^4 + y^4)^2 - 4x^4y^4 - 6x^2y^2(x^4 + y^4) + 13x^4y^4\} \\ &= 9\{(x^4 + y^4)^2 - 6x^2y^2(x^4 + y^4) + 9x^4y^4\} \\ &= 9(x^4 - 3x^2y^2 + y^4)^2 \end{aligned}$$

となるから, 定理 1 より

$$u = v$$

が成り立ち, <sup>注4</sup> (41) より  $x = y$  が得られる。 ■

注1 互いに素な自然数  $x, y, z$  がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき,

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数  $m, n$  が存在する。

証明は読者に委ねるが, 必要ならば [1] pp.20-22 などを参照されるとよい。

注2  $x, y, m, n$  は自然数(正の整数)であるが,  $x^2 - y^2$  は正であるとは限らない。

しかし, 等式の関係さえあれば, このあとの議論に支障はないので, 絶対値にこだわる必要はない。

注3 (22)は(12)において  $t$  と  $u$  を入れ替えただけの式ではあるが, 補題1の中で既に矛盾が示されたとは言えない。(22)以降の議論は,  $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$  が ( $x$  と  $y$  の偶奇が異なるときに) 不成立であることが示されたあとの議論であり, (12)のときのような  $z$  の最小性との矛盾を導くものではない。

(30)の方は(7)と同様と述べるだけで証明は済ませられたのだが, (22)に比べて述べることも少ないので, そのまま書くことにした。

注4  $u, v$  は自然数であるから  $u^4 + 7u^2v^2 + v^4 > 0$  であり, 必然的に  $x^4 - 3x^2y^2 + y^4$  は0でないから,  $9(x^4 - 3x^2y^2 + y^4)^2$  は自然数の平方とみることができる。

## 参考文献

- [ 1 ] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [ 2 ] 大塚美紀生, 方程式  $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2019),  
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-2y2\)\(3y2-2x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-2y2)(3y2-2x2)=z2.pdf)
- [ 3 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2019),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+7x2y2+y4=z2.pdf>
- [ 4 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 30x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2021),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+30x2y2+y4=z2.pdf>
- [ 5 ] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 15x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2021),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+15x2y2+y4=z2.pdf>