

等差数列をなす平方数について

大塚美紀生

3つの立方数が等差数列になるとき、その3数は同じ値になる。(→ [2]) 4乗数についても、同様のことが成り立つ。(→ [3]) ところが、平方数の場合は

$$1 (= 1^2), 25 (= 5^2), 49 (= 7^2)$$

あるいは

$$49 (= 7^2), 169 (= 13^2), 289 (= 17^2)$$

のように、相異なる3数が等差数列になる場合はいくらかでもある。どのような状況になっているかを調べるために、 a^2, b^2, c^2 がこの順で等差数列になるとすれば、

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \quad \therefore a^2 + c^2 = 2b^2$$

つまり、直接にはこの不定方程式の自然数解を求めればよいことになる。

定理1 不定方程式

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \tag{1}$$

の互いに素な自然数解は、 $m \geq n \geq 0$ なる互いに素な整数 m, n ^{注1}を用いて

$$x = m^2 + 2mn - n^2, \quad y = |m^2 - 2mn - n^2|, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = |m^2 - 2mn - n^2|, \quad y = m^2 + 2mn - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

と表される。 $x \geq y$ のときは

$$x = m^2 + 2mn - n^2, \quad y = |m^2 - 2mn - n^2|, \quad z = m^2 + n^2$$

と表される。

この定理により、相異なる3つの平方数が等差数列をなす場合は無数にあることがわかる。それでは、相異なる平方数がいくつあれば等差数列をなさないかを考えると、[4]のアイデアを応用することにより結果が得られる。

定理2 自然数 x, y, z が

$$(2x^2 - y^2)(2y^2 - x^2) = z^2 \tag{2}$$

を満たすならば、 $x = y$ である。

定理3 相異なる4つ以上の平方数が等差数列をなすことはない。すなわち、平方数

a^2, b^2, c^2, d^2 がこの順で等差数列をなすとすれば、 $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$ である。

定理 1 の証明

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \tag{1}$$

が成り立つとする。ここで、 x と y が共通の素因数 p をもつとすれば、 $p^2 | 2z^2 \implies p | z$ となって互いに素であることに反するから、

x と y が互いに素

であるとしてよい。(1)より x と y の偶奇は等しいから、互いに素であれば

x, y はともに奇数

である。さらに、 $x = y$ のときは $n = 0$ のときと解釈すればよく、 x と y の対称性より

$$x > y$$

のときに定理を証明するだけで十分である。

x と y の相加平均 $\frac{x+y}{2}$ は自然数であるから、これを a とおくと

$$x = a + b, \quad y = a - b \quad (a, b \text{ は整数}, a > b > 0) \tag{3}$$

と表され、(1)より

$$a^2 + b^2 = z^2$$

ここで、 a と b に共通の素因数 p があるとすれば、(3)より $p | x, p | y$ となって仮定に反するから、

a と b は互いに素

である。ピタゴラス数についての定理より、偶奇の異なる互いに素な自然数 m, n を用いて

$$(a, b, z) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) \text{ または } (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$$

と表される。^{注3} (3)より

$$x = m^2 + 2mn - n^2, \quad y = |m^2 - 2mn - n^2|, \quad z = m^2 + n^2 \quad \blacksquare$$

定理 2 の証明

$$(2x^2 - y^2)(2y^2 - x^2) = z^2 \tag{2}$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) の中で $x \neq y$ であるものがあれば、そのうち

$x + y$ が最小

のものが存在する。対称性より

$$x > y > 0$$

の場合だけ考えればよい。

$\gcd(x, y) = d$ とすると、 $d^4 | z^2$ であるから、

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2 z_1$$

となる自然数 x_1, y_1, z_1 が存在し、(2)の両辺を d^4 で割って、

$$(2x_1^2 - y_1^2)(2y_1^2 - x_1^2) = z_1^2$$

を満たすから、

x と y は互いに素

であるときに定理を証明すればよい。このとき

x, y はともに奇数

である。というのも、 $2|x$ であるとすれば、 $2|z, 2^2|2y^4 \implies 2|y$ ^{注4} となって、互いに素であることに反し、 $2|y$ とした場合も同様に矛盾するからである。

$\delta = \gcd(2x^2 - y^2, 2y^2 - x^2)$ とすると

$$2(2x^2 - y^2) + 2y^2 - x^2 = 3x^2$$

$$2x^2 - y^2 + 2(2y^2 - x^2) = 3y^2$$

より

$$\delta | 3x^2, \delta | 3y^2$$

であるが、 x と y は互いに素であるから $\delta | 3$ であり、 3 は素数であるから

$$\delta = 1 \text{ または } 3$$

ここで、 $\delta = 3$ であるとすれば、(2)より

$$2x^2 - y^2 = 3a^2, \quad 2y^2 - x^2 = 3b^2$$

または

$$2x^2 - y^2 = -3a^2, \quad 2y^2 - x^2 = -3b^2$$

を満たす互いに素な自然数 a, b が存在するはずだが、 x, y, a, b は奇数であるから

$$x^2 \equiv y^2 \equiv a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$2x^2 - y^2 \equiv 2y^2 - x^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$3a^2 \equiv 3b^2 \equiv 3 \pmod{8}$$

であることより、上の等式は成り立たない。したがって、

$$2x^2 - y^2 \text{ と } 2y^2 - x^2 \text{ は互いに素}$$

となる。奇数の平方を 8 で割ると 1 余ることも考えて、(2)より

$$2x^2 - y^2 = a^2 \tag{4}$$

$$2y^2 - x^2 = b^2 \tag{5}$$

を満たす互いに素な自然数 a, b が存在する。

$x > y > 0$ であるから、(4)より

$$y^2 < x^2 = \frac{a^2 + y^2}{2} < a^2$$

であり、ここに定理 1 を適用すると

$$x = m^2 + n^2, \quad y = |m^2 - 2mn - n^2| \tag{6}$$

を満たす互いに素な自然数 m, n ($m > n$) が存在する。^{注5}

(5)より

$$x^2 > y^2 = \frac{b^2 + x^2}{2} > b^2$$

であり、ここに定理 1 を適用すると

$$x = k^2 + 2kl - \ell^2, \quad y = k^2 + \ell^2 \tag{7}$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ ($k > \ell$) が存在する。^{注5}

(6), (7)より

$$\begin{aligned}x &= m^2 + n^2 = k^2 + 2k\ell - \ell^2 \\y &= |m^2 - 2mn - n^2| = k^2 + \ell^2\end{aligned}\tag{8}$$

以下, y の絶対値の外れ方について場合を分けて考える。

$$\underline{\text{Case I}} \quad y = m^2 - 2mn - n^2 = k^2 + \ell^2\tag{9}$$

(8), (9) の辺々を加えると

$$\begin{aligned}2m^2 - 2mn &= 2k^2 + 2k\ell \\m(m - n) &= k(k + \ell)\end{aligned}$$

$\gcd(m, k) = s$ とおくと

$$m = st, \quad k = su\tag{10}$$

を満たす互いに素な自然数 t, u が存在し,

$$t(m - n) = u(k + \ell)$$

t と u は互いに素であるから

$$m - n = uv, \quad k + \ell = tv\tag{11}$$

を満たす 0 でない整数 v が存在する。(8)に(10), (11)を代入して

$$\begin{aligned}s^2t^2 + (st - uv)^2 &= s^2u^2 + 2su(tv - su) - (tv - su)^2 \\(2t^2 + 2u^2)s^2 - 6stuv + (t^2 + u^2)v^2 &= 0\end{aligned}$$

$$(2t^2 + 2u^2)\left(\frac{s}{v}\right)^2 - 6tu \cdot \frac{s}{v} + (t^2 + u^2) = 0$$

2次方程式が有理数 $\frac{s}{v}$ を解に持つから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\text{判別式}) &= (3tu)^2 - (2t^2 + 2u^2)(t^2 + u^2) \\&= -2t^4 + 5t^2u^2 - 2u^4 \\&= (2t^2 - u^2)(2u^2 - t^2)\end{aligned}$$

は有理数の平方かつ整数であり,

$$(2t^2 - u^2)(2u^2 - t^2) = w^2\tag{12}$$

を満たす自然数 w が存在する。 $n > 0$ であるから, (8)より

$$m^2 < m^2 + n^2 = x$$

$\ell > 0$ であるから, (9)より

$$k^2 < k^2 + \ell^2 = y$$

(10)とあわせて

$$t + u \leq m + k \leq m^2 + k^2 < x + y$$

(12)が成り立つから, $x + y$ の最小性より

$$t = u$$

(10), (11)より

$$m = k, \quad -n = \ell$$

(8), (9)より

$$x = y$$

となって, $x \neq y$ と仮定したことに反する。^{注6}

$$\underline{\text{Case II}} \quad y = -m^2 + 2mn + n^2 = k^2 + \ell^2 \quad (13)$$

(8), (13) の辺々を加えると

$$2mn + 2n^2 = 2k^2 + 2k\ell$$

$$n(m + n) = k(k + \ell)$$

$\gcd(n, k) = s$ とおくと

$$n = st, \quad k = su \quad (14)$$

を満たす互いに素な自然数 t, u が存在し,

$$t(m + n) = u(k + \ell)$$

t と u は互いに素であるから

$$m + n = uv, \quad k + \ell = tv \quad (15)$$

を満たす自然数 v が存在する。(8)に(14), (15)を代入して

$$(uv - st)^2 + s^2t^2 = s^2u^2 + 2su(tv - su) - (tv - su)^2$$

$$(2t^2 + u^2)s^2 - 6stuv + (t^2 + u^2)v^2 = 0$$

$$(2t^2 + 2u^2)\left(\frac{s}{v}\right)^2 - 6tu \cdot \frac{s}{v} + (t^2 + u^2) = 0$$

2次方程式が有理数 $\frac{s}{v}$ を解に持つから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\text{判別式}) &= (3tu)^2 - (2t^2 + 2u^2)(t^2 + u^2) \\ &= -2t^4 + 5t^2u^2 - 2u^4 \\ &= (2t^2 - u^2)(2u^2 - t^2) \end{aligned}$$

は有理数の平方かつ整数であり,

$$(2t^2 - u^2)(2u^2 - t^2) = w^2 \quad (16)$$

を満たす自然数 w が存在する。 $m > 0$ であるから, (8)より

$$n^2 < m^2 + n^2 = x$$

$\ell > 0$ であるから, (13)より

$$k^2 < k^2 + \ell^2 = y$$

(14)とあわせて

$$t + u \leq n + k \leq n^2 + k^2 < x + y$$

(16)が成り立つから, $x + y$ の最小性より

$$t = u$$

(14), (15)より

$$n = k, \quad m = \ell$$

(8), (13)より

$$x = y$$

となって, $x \neq y$ と仮定したことに反する。

$x \neq y$ と仮定すると矛盾するから, $x = y$ が成り立つ。 ■

定理3の証明

a, b, c, d が $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$ なる整数であるとして、定理を証明すればよい。

a^2, b^2, c^2, d^2 は等差数列をなすから、

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 = d^2 - c^2 \quad (17)$$

$$2b^2 - c^2 = a^2 \quad \text{かつ} \quad 2c^2 - b^2 = d^2$$

$$(2b^2 - c^2)(2c^2 - b^2) = (ad)^2$$

$a > 0$ (したがって a, b, c, d がすべて自然数)ならば、定理2より

$$b = c$$

が成り立つから、(17)とあわせて

$$a = b = c = d$$

となる。

$a = 0$ の場合は $2b^2 = c^2$ となって、 $b = c = 0$ でない限り素因数分解の性質と矛盾するから、 $a = b = c = d = 0$ が成り立つ。 ■

注1 m と n が互いに素であっても、 x と y が互いに素でないこともある。例えば、 $m = n = 1$ のとき、 $x = y = z = 2$ である。

注2 $b \geq 0$ としなければいけないように思われるかもしれないが、 $b = 0$ のときは $x = y$ となって、ここでの仮定に反する。 $a > b$ は $y = a - b > 0$ からである。

注3 互いに素な正の整数 a, b, c が

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (21)$$

を満たすとき、

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2 \quad (22)$$

または

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \quad (23)$$

を満たす偶奇が異なる互いに素な正の整数 m, n が存在する。

これはピタゴラス数の有名な性質であり、文献[1]などに証明は紹介されているが、ここでも一応証明を与えておくことにする。

a と b は互いに素であるから、少なくとも一方は奇数であるが、対称性より

b は奇数

であると仮定して、(22)を導けば十分である。

ここで、 a, b がともに奇数であるとすれば、

$$a = 2\alpha + 1, \quad b = 2\beta + 1 \quad (\alpha, \beta \text{ は整数})$$

と表されて

$$a^2 + b^2 = 4(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta) + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となるから、平方数 c^2 と等しくならない。よって、

a は偶数、 b と c は奇数

である。

(21) を変形すると

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 = (c+b)(c-b) \\ \therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

b, c は奇数であるから

$$\frac{c+b}{2}, \frac{c-b}{2} \text{ はともに整数}$$

であり、 $b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より

$$a^2 = c^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

であるから、 $\frac{a}{2}$ は偶数である。

$$b = \frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{2}, \quad c = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{2}$$

は互いに素である(共通の素因数をもたない)から、

$$\frac{c+b}{2} \text{ と } \frac{c-b}{2} \text{ は互いに素}$$

であり、(24) より

$$\frac{a}{2} = mn, \quad \frac{c+b}{2} = m^2, \quad \frac{c-b}{2} = n^2$$

となる互いに素な正の整数 m, n が存在する。

$$\frac{a}{2} = mn \text{ は偶数}$$

であるから、 m と n の一方は偶数で、他方は奇数である。 (おわり)

注4 (2) を展開して

$$-2x^4 + 5x^2y^2 - 2y^4 = z^2$$

と表示すればわかりやすいが、もともと $-2x^4, -2y^4$ は2で割り切れるから、 $2|x$ であるとすれば、まず $2|z$ が成り立ち、 $2^5|-2x^4, 2^2|5x^2y^2$ より $2^2|-2y^4$ が導かれるから、 $2|y$ となってしまう。

注5 $n=0$ とすれば $x=y$ となって、ここでの仮定 $x \neq y$ に反するから、 n も自然数としてよい。同様に、 $\ell=0$ としても矛盾するから、 ℓ も自然数としてよい。

注6 Case I においては、 n と ℓ がともに自然数であるから $-n = \ell$ は矛盾するとしてもよい。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006)
- [2] 大塚美紀生, ディオファントス方程式 $x^3 + y^3 = 2z^3$ について,
早稲田数学フォーラム (2009)
<http://wasmath.la.coocan.jp/x3+y3=2z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生, ディオファントス方程式 $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解と
その応用, 早稲田数学フォーラム (2014, 2017)
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+6x2y2+y4=z2.pdf>
- [4] 大塚美紀生, 方程式 $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2019)
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-2y2\)\(3y2-2x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-2y2)(3y2-2x2)=z2.pdf)