

2018年 センター試験 本試験 数学 I・A 解答

| 問題番号 (配点) | 解答記号 | 正解 | 配点 |
|--------------|---------------------------|---------------------------|-----------|
| 第1問 (30) | ア | 5 | 2 |
| | イ, ウエ | 6, 14 | 4 |
| | オ | 2 | 2 |
| | カ | 8 | 2 |
| | キ | 2 | 3 |
| | ク | 0 | 3 |
| | ケ | 2 | 2 |
| | コ | 0 | 2 |
| | $サ + \frac{シ}{a}$ | $1 + \frac{3}{a}$ | 2 |
| | ス | 1 | 2 |
| | セ | 1 | 2 |
| | $\frac{ソ}{タ}$ | $\frac{4}{5}$ | 2 |
| | $\frac{チ + \sqrt{ツテ}}{ト}$ | $\frac{7 + \sqrt{13}}{4}$ | 2 |
| 第2問 (30) | $\frac{ア}{イ}$ | $\frac{7}{9}$ | 3 |
| | $\frac{ウ\sqrt{エ}}{オ}$ | $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ | 3 |
| | カ, キ | 0, 4 | 5 |
| | ク $\sqrt{ケコ}$ | $2\sqrt{33}$ | 4 |
| | サ, シ | 1, 6 (解答の順序は問わない) | 6 (各3) |
| | ス, セ | 4, 5 (解答の順序は問わない) | 6 (各3) |
| | ソ | 2 | 3 |

| 問題番号 (配点) | 解答記号 | 正解 | 配点 |
|--------------|-------------------------------|-----------------|----|
| 第3問 (20) | $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ | $\frac{1}{6}$ | 2 |
| | $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ | $\frac{1}{6}$ | 2 |
| | $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ | $\frac{1}{9}$ | 2 |
| | $\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ | $\frac{1}{4}$ | 2 |
| | $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ | $\frac{1}{6}$ | 2 |
| | サ | 1 | 2 |
| | シ | 2 | 2 |
| | $\frac{\text{ス}}{\text{セソタ}}$ | $\frac{1}{432}$ | 3 |
| | $\frac{\text{チ}}{\text{ツテ}}$ | $\frac{1}{81}$ | 3 |
| 第4問 (20) | ア, イ, ウ | 4, 3, 2 | 3 |
| | エオ | 15 | 3 |
| | カ | 2 | 2 |
| | キク | 41 | 2 |
| | ケ | 7 | 2 |
| | コサシ | 144 | 2 |
| | ス | 2 | 3 |
| | セソ | 23 | 3 |

| 問題番号 (配点) | 解答記号 | 正解 | 配点 |
|--------------|--|-----------------------|----|
| 第5問 (20) | $\frac{\text{ア}\sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ | 3 |
| | $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ | $\frac{20}{9}$ | 3 |
| | $\frac{\text{キク}}{\text{ケ}}$ | $\frac{10}{9}$ | 2 |
| | コ, サ | 0, 4 | 4 |
| | $\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$ | $\frac{5}{8}$ | 3 |
| | $\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$ | $\frac{5}{3}$ | 2 |
| | タ | 1 | 3 |

第1問

〔1〕整数 n に対して

$$(x+n)(n+5-x) = x(5-x) + n^2 + \boxed{5}n$$

(ア)

であり,

$$X = x(5-x)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} A &= x(5-x) \cdot (x+1)(6-x) \cdot (x+2)(7-x) \\ &= X(X+1^2+5 \times 1)(X+2^2+5 \times 2) \\ &= X(X+\boxed{6})(X+\boxed{14}) \end{aligned}$$

(イ) (ウエ)

$x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ のとき

$$X = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \cdot \frac{5 - \sqrt{17}}{2} = \frac{5^2 - 17}{2^2} = \boxed{2}$$

(オ)

$$A = 2 \times (2+6) \times (2+14) = 2^1 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{\boxed{8}} \text{ (カ)}$$

〔2〕(1)

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, 18, 19, 20\}$$

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$1, 5 \notin C$ より $A \not\subset C$, および $A \cap B = \emptyset$ であるから

(a) は誤, (b) は正 $\boxed{\textcircled{2}}$

(キ)

$A \cap B = \emptyset$ より

$$(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) = C \cap B = \{6, 12, 18\}$$

$\bar{A} \cap B = B$ であるから

$$\bar{A} \cap (B \cup C) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) = B \cup (\bar{A} \cap C)$$

よって, (c) と (d) はともに正しい。 $\boxed{\textcircled{0}}$

(ク)

(2)

$$\begin{aligned} p: |x-2| > 2 &\iff x-2 < -2 \text{ または } x-2 > 2 \\ &\iff x < 0 \text{ または } x > 4 \end{aligned}$$

$$q: x < 0$$

$$r: x > 4$$

$$s: \sqrt{x^2} = |x| > 4 \iff x < -4 \text{ または } x > 4$$

より

$$q \text{ または } r \iff p, \{x|s\} \supsetneq \{x|r\}$$

であるから,

q または r であることは, p であるための必要十分条件である。 $\boxed{\textcircled{2}}$
(ケ)

s は r であるための必要条件であるが, 十分条件ではない。 $\boxed{\textcircled{0}}$
(コ)

$$\begin{aligned} [3] \quad f(x) &= ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21 \\ &= a\left(x^2 - 2 \cdot \frac{a+3}{a}x\right) - 3a + 21 \\ &= a\left(x - \frac{a+3}{a}\right)^2 - \frac{(a+3)^2}{a} - 3a + 21 \end{aligned}$$

2次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の x 座標 p は

$$p = \frac{a+3}{a} = \boxed{\frac{1}{a}} + \frac{\boxed{3}}{a} \quad (\シ)$$

$a > 0$ より $f(x)$ は下に凸であるから, $0 \leq x \leq 4$ において $f(x)$ が $x = 4$ で最小となるのは

$$p = 1 + \frac{3}{a} \geq 4 \quad (a > 0)$$

のときであり,

$$\frac{3}{a} \geq 3 \quad \therefore 0 < a \leq \boxed{1} \quad (\ス)$$

$0 \leq x \leq 4$ において $f(x)$ が $x = p$ で最小となるのは

$$0 \leq 1 + \frac{3}{a} \leq 4 \quad \text{すなわち} \quad a \geq \boxed{1} \quad (\セ)$$

のときである。

$0 \leq x \leq 4$ における $f(x)$ の最小値が 1 であるのは,

(i) $0 < a \leq 1$ のとき

$$f(4) = 5a - 3 = 1 \quad \therefore a = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}} \quad (\ソ)$$

(ii) $a \geq 1$ のとき

$$f(p) = -\frac{(a+3)^2}{a} - 3a + 21 = 1$$

$$(a+3)^2 + a(3a-20) = 0$$

$$4a^2 - 14a + 9 = 0 \quad \therefore a = \frac{\boxed{7} + \sqrt{\boxed{13}}}{\boxed{4}} \quad (\ト)$$

第2問

〔1〕△ABCにおいて余弦定理より

$$\cos \angle ABC = \frac{5^2 + 9^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 9} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{9}} \quad (\text{ア})$$

$\sin^2 \angle ABC + \cos^2 \angle ABC = 1$, $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ より

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{9}} \sqrt{\boxed{2}} \quad (\text{ウ}) \quad (\text{エ})$$

(オ)

$$AB \sin \angle ABC = 5 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{800}}{9} > \frac{\sqrt{729}}{9} = 3 \text{ より}$$

$$CD < AB \sin \angle ABC \quad \boxed{\text{④}} \quad (\text{カ})$$

AD//BC なら $CD \geq AB \sin \angle ABC$ でなければならないから、四角形 ABCD が台形であるとすれば

$$AB \parallel CD \quad \boxed{\text{④}} \quad (\text{キ})$$

に定まる。

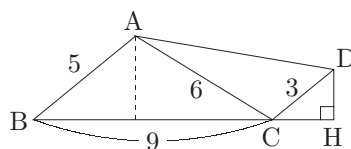
点 D から直線 BC におろした垂線の足を H とすると、

$$CH = 3 \times \frac{7}{9} = \frac{7}{3}$$

$$DH = 3 \times \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

直角三角形 BHD において三平方の定理より

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{BH^2 + DH^2} \\ &= \sqrt{\left(9 + \frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{17^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{297} \\ &= \boxed{2} \sqrt{\boxed{33}} \quad (\text{ク}) \quad (\text{ケコ}) \end{aligned}$$



[2]

(1)

- ① 図 2 より, 範囲が最も大きいのは男子短距離グループであり, 女子短距離グループではない。
- ② 図 2 より, 四分位範囲はすべてのグループで 12 未満である。
- ③ 男子長距離グループの身長中央値は, 図 2 より 176 cm であり, 図 1 の度数最大の階級 170 cm ~ 175 cm には含まれない。
- ④ 女子長距離グループの身長の第 1 四分位数は, 図 2 より 161 cm であり, 図 1 の度数最大の階級 165 cm ~ 170 cm には含まれない。
- ⑤ 図 4 より, 身長が最も高い選手は男子短距離グループにおいて, 男子長距離グループではない。
- ⑥ 図 4 より, 身長が最も低い選手は女子短距離グループにおいて, 女子長距離グループではない。
- ⑦ 図 2 より, 男子短距離グループの中央値と男子長距離グループの第 3 四分位数はともに 181 cm であり, 180 cm 以上 182 cm 未満である。

以上より, 正しいのは ① と ⑥ である。
(サ, シ) (シ, サ)

(2)

- ① 4 つのグループすべてにおいて, X と W は正の相関があり, 負の相関ではない。
- ② 傾き $Z = \frac{W}{X}$ の中央値が一番大きいのは, 図 3 より男子短距離グループと読み取れ, 男子長距離グループではない。
- ③ Z の範囲が最小なのは, 女子長距離グループであり, 男子長距離グループではない。
- ④ Z の四分位範囲について, 男子短距離グループは他のどれよりも大きいと読み取れるので, 最小ではない。
- ⑤ ② の吟味より, (d) は女子長距離グループであり, 図 4 より, すべての Z の値は 25 より小さい。
- ⑥ ① の吟味より, (a) は男子短距離グループである。②, ④ より, (d) は女子長距離グループである。残り 2 つについて傾き $Z = \frac{W}{X}$ の最大値, 最小値をそれぞれ比べると, 小さい方が (b) 女子短距離グループ, 大きい方が (c) 男子長距離グループである。

以上より, 正しいものは ④ と ⑤ である。
(セ, ソ) (ソ, セ)

(3) 偏差の積の和 ns_{xw} は

$$\begin{aligned} ns_{xw} &= \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(w_k - \bar{w}) \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k w_k - x_k \bar{w} - \bar{x} w_k + \bar{x} \bar{w}) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k w_k - \bar{w} \sum_{k=1}^n x_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n w_k + n \bar{x} \bar{w} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k w_k - \bar{w} \cdot n \bar{x} - \bar{x} \cdot n \bar{w} + n \bar{x} \bar{w} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k w_k - n \bar{x} \bar{w} \quad \boxed{\textcircled{2}} \\ &\quad (\sphericalindash)$$

第3問

(1) 1つのさいころを投げて4の目が出る確率を求めて、

$$P(A) = \frac{\boxed{1}^{(\text{ア})}}{\boxed{6}^{(\text{イ})}}$$

和が7となる2個のさいころの目の出方は

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

であるから、確率は

$$P(B) = \frac{6}{6^2} = \frac{\boxed{1}^{(\text{ウ})}}{\boxed{6}^{(\text{エ})}}$$

和が9となる2個のさいころの目の出方は

(6, 3), (5, 4), (4, 5), (3, 6)

であるから、確率は

$$P(C) = \frac{4}{6^2} = \frac{\boxed{1}^{(\text{オ})}}{\boxed{9}^{(\text{カ})}}$$

(2) $A \cap C$ は

大きいさいころが4の目、小さいさいころが5の目
を出す事象を表すから、 C が起こったとき A が起こる条件付き確率は

$$P_C(A) = \frac{n(A \cap C)}{n(C)} = \frac{\boxed{1}^{(\text{キ})}}{\boxed{4}^{(\text{ク})}}$$

A が起こったとき C が起こる条件付き確率は

$$P_A(C) = \frac{n(A \cap C)}{n(A)} = \frac{\boxed{1}^{(\text{ケ})}}{\boxed{6}^{(\text{コ})}}$$

(3) $P(A \cap B) = \frac{1}{6^2}$, $P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ であるから

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\boxed{①}^{(\text{サ})}$$

$P(A \cap C) = \frac{1}{6^2}$, $P(A)P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{9}$ であるから

$$P(A \cap C) > P(A)P(C)$$

$$\boxed{②}^{(\text{シ})}$$

(4) 1回目に $A \cap B$ が起こり, 2回目に $\bar{A} \cap C$ が起こる確率は

$$P(A \cap B) \cdot P(\bar{A} \cap C) = \frac{1}{6^2} \times \frac{4-1}{6^2} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{432}} \text{ (ス)}$$

1回目に $\bar{A} \cap B$ が起こり, 2回目に $A \cap C$ が起こる確率は

$$\frac{6-1}{6^2} \times \frac{1}{6^2} = \frac{5}{6^4}$$

$B \cap C = \emptyset$ より, 2回の試行で A, B, C が1回ずつ起こるのは,

- $A \cap B$ と $\bar{A} \cap C$ が1回ずつ起こる
- $\bar{A} \cap B$ と $A \cap C$ が1回ずつ起こる

のいずれかの場合であるから, その確率は

$$\frac{3}{6^4} \times 2 + \frac{5}{6^4} \times 2 = \frac{3+5}{6^3 \times 3} = \frac{1}{3^4} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{81}} \text{ (チ)}$$

(注) 題意を類推することはできるが, 「2回の試行で A, B, C が1回ずつ」という表現は適切なのだろうか。

第4問

(1) 144 を素因数分解すると

$$144 = 2^{\text{(ア)}} \boxed{4} \times \boxed{3}^{\text{(イ)}} \times \boxed{2}^{\text{(ウ)}}$$

であるから，144 の正の約数は

$$(4 + 1) \times (2 + 1) = \boxed{15}^{\text{(エオ)}} \text{ 個}$$

ある。

(2)

$$144x - 7y = 1 \quad \dots\dots \text{①}$$

互除法の原理を用いれば，絶対値最小のものが見つかりと期待して，

$$144 = 7 \times 20 + 4$$

$$7 = 4 \times 2 - 1$$

より

$$4 \times 2 - 7 \times 1 = 1$$

$$(144 - 7 \times 20) \times 2 - 7 \times 1 = 1$$

$$\therefore 144 \times 2 - 7 \times 41 = 1 \quad \dots\dots \text{②}$$

$x = 0, 1, -1$ のとき ① を満たす整数 y は存在しないから， $|x|$ が最小になる

① の整数解は，② より

$$x = \boxed{2}^{\text{(カ)}}, \quad y = \boxed{41}^{\text{(キク)}}$$

① - ② より

$$144(x - 2) - 7(y - 41) = 0$$

$$\therefore 144(x - 2) = 7(y - 41)$$

② (または $144 = 2^4 \times 3^2$) より，144 と 7 は互いに素であるから

$$x - 2 = 7k, \quad y - 41 = 144k$$

を満たす整数 k が存在し，

$$x = \boxed{7}^{\text{(ケ)}} k + 2, \quad y = \boxed{144}^{\text{(コサシ)}} k + 41$$

(3) 144 の倍数で，7 で割ったら余りが 1 となる自然数 n は，(2) より

$$n = 144(7k + 2) \quad (k \text{ は非負整数}) \quad \dots\dots \text{③}$$

と表される。

(1) を考えると， n の正の約数が 18 個あるとすれば，18 は 15 で割り切れな
いから，

$$n = 2^5 \times 3^2 = 144 \times \boxed{2}^{\text{(ス)}}$$

のときに限られる。

③より

$$n = 2^a \times 3^b \times c \quad (a \geq 4, b \geq 2, c \text{ は } 3 \text{ で割れない正の奇数})$$

と表され,

$$\begin{aligned} 30 &= (4+1) \times (5+1) = (5+1) \times (4+1) = (9+1) \times (2+1) \\ &= (4+1) \times (2+1) \times (1+1) \end{aligned}$$

であることを考えると, 正の約数が 30 個ある n は

$$2^4 \times 3^5, 2^5 \times 3^4, 2^9 \times 3^2, 2^4 \times 3^2 \times p \quad (p \text{ は } 5 \text{ 以上の素数})$$

に限られる。

$$n = 2^4 \times 3^5 \text{ のとき } 7k+2 = 3^3 \quad \therefore k = \frac{25}{7} \text{ (不適)}$$

$$n = 2^5 \times 3^4 \text{ のとき } 7k+2 = 2 \times 3^2 \quad \therefore k = \frac{16}{7} \text{ (不適)}$$

$$n = 2^9 \times 3^2 \text{ のとき } 7k+2 = 2^5 \quad \therefore k = \frac{30}{7} \text{ (不適)}$$

であるから,

$$2^4 \times 3^2 \times p \quad (p \text{ は } 5 \text{ 以上の素数})$$

の場合だけに限定して, $7k+2$ を順に調べると,

$$7 \times 0 + 2 = 2$$

$$7 \times 1 + 2 = 9$$

$$7 \times 2 + 2 = 16$$

$$7 \times 3 + 2 = 23$$

より, 正の約数の個数が 30 である最小の n は

$$n = 144 \times \boxed{23} \\ \text{(セソ)}$$

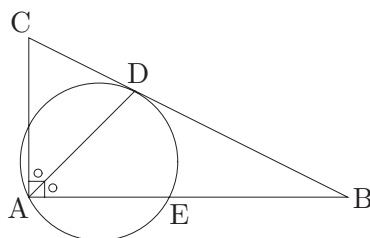
第5問

ADは∠Aの二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 2 : 1$$

三平方の定理より

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$



であるから,

$$BD = \frac{2}{2+1}BC = \frac{\overset{(ア)}{\boxed{2}}}{\underset{(ウ)}{\boxed{3}}} \sqrt{\overset{(イ)}{\boxed{5}}}$$

点Bに関する方べきに注目すると

$$AB \cdot BE = BD^2 = \frac{\overset{(エオ)}{\boxed{20}}}{\underset{(カ)}{\boxed{9}}}$$

であるから,

$$BE = \frac{BD^2}{AB} = \frac{20}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{\overset{(キク)}{\boxed{10}}}{\underset{(ケ)}{\boxed{9}}}$$

以上の値を用いると

$$\frac{BE}{BD} = \frac{10}{9} \times \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

であるから,

$$\frac{BE}{BD} - \frac{AB}{BC} = \frac{5-6}{3\sqrt{5}} < 0$$

より

$$\frac{BE}{BD} < \frac{AB}{BC} \quad \boxed{\text{①}} \quad (\text{コ})$$

よって,

$$\frac{BE}{BA} < \frac{BD}{BC}$$

であるから, 直線 AC と直線 DE の交点 F は辺 AC の点 C の側の延長上にある。

$$\boxed{\text{④}} \quad (\text{サ})$$

$$AE = AB - BE = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

△ABC と直線 EF にメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{CF}{AF} \cdot \frac{AE}{BE} \cdot \frac{BD}{CD} = 1$$

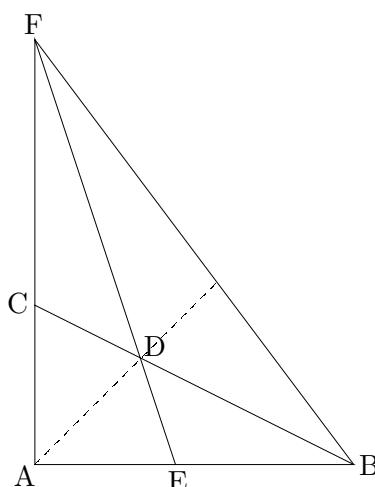
$$\frac{CF}{AF} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{\boxed{5}}{\boxed{8}} \quad \begin{array}{l} (\text{シ}) \\ (\text{ス}) \end{array}$$

$$\frac{CF}{AF} = \frac{CF}{CF+1} \text{ であるから}$$

$$8CF = 5(CF+1)$$

$$\therefore CF = \frac{\boxed{5}}{\boxed{3}} \quad \begin{array}{l} (\text{セ}) \\ (\text{ソ}) \end{array}$$



△ABF において、三平方の定理より

$$BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \frac{CF}{AC} = \frac{BF}{AB} = \frac{5}{3}$$

よって、BC は ∠ABF の二等分線である。もともと AD は ∠A の二等分線であるから、

$$\text{点 D は } \triangle ABF \text{ の内心 } \boxed{\text{①}} \text{ (タ)}$$

である。△ABF は正三角形ではないから、点 D は外心および重心ではない。