

2019年 センター試験 本試験 数学 I・A 解答

問題番号 (配点)	解答記号	正解	配点
第1問 (30)	$(アa - イ)^2$	$(3a - 1)^2$	2
	ウ $a + エ$	$4a + 1$	2
	オカ $a + キ$	$-2a + 3$	2
	ク	6	2
	$\frac{ケコ}{サ}$	$\frac{-7}{3}$	2
	シ	0	2
	ス	2	2
	セ	0	2
	ソ	2	2
	タ	3	2
	$\frac{b}{チ}$	$\frac{b}{2}$	2
	$-\frac{b^2}{ツ} + ab + テ$	$-\frac{b^2}{4} + ab + 1$	2
	ト, ナ	5, 1	2
	$\frac{ニ}{ヌ}$	$\frac{3}{2}$	2
	$\frac{ネノ}{ハ}$	$\frac{-1}{4}$	2

問題番号 (配点)	解答記号	正解	配点
第2問 (30)	$\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}, \text{エ}$	$\frac{-1}{4}, 2$	4
	$\frac{\sqrt{\text{オカ}}}{\text{キ}}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	3
	$\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\frac{1}{4}$	2
	コ	4	3
	$\frac{\text{サ}\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$	$\frac{7\sqrt{15}}{4}$	3
	ソ	3	3
	タ	4	3
	チ, ツ	4, 7 (解答の順序は問わない)	4 (各2)
	テ	0	1
	ト	0	1
	ナ	1	1
	ニ	2	2
第3問 (20)	$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{4}{9}$	2
	$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{1}{6}$	2
	$\frac{\text{オ}}{\text{カキ}}$	$\frac{7}{18}$	3
	$\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\frac{1}{6}$	2
	$\frac{\text{コサ}}{\text{シスセ}}$	$\frac{43}{108}$	2
	$\frac{\text{ソタチ}}{\text{ツテト}}$	$\frac{259}{648}$	3
	$\frac{\text{ナニ}}{\text{ヌネ}}$	$\frac{21}{43}$	3
	$\frac{\text{ノハ}}{\text{ヒフヘ}}$	$\frac{88}{259}$	3

問題番号 (配点)	解答記号	正解	配点
第4問 (20)	ア, イウ	8, 17	3
	エオ, カキ	23, 49	2
	ク, ケコ	8, 17	3
	サ, シス	7, 15	3
	セ	2	2
	ソ	6	2
	タ, チ, ツテ	3, 2, 23	2
	トナニ	343	3
第5問 (20)	$\frac{\sqrt{ア}}{イ}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	4
	ウ	1	3
	$\frac{エ\sqrt{オカ}}{キ}$	$\frac{2\sqrt{15}}{5}$	3
	$\frac{ク}{ケ}$	$\frac{3}{4}$	2
	コ	3	2
	$\frac{\sqrt{サ}}{シ}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	3
	$\frac{\sqrt{スセ}}{ソ}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	3

第1問

$$〔1〕 \quad 9a^2 - 6a + 1 = \left(\boxed{3} a - \boxed{1} \right)^2$$

(ア) (イ)

であるから,

$$A = \sqrt{9a^2 - 6a + 1} + |a + 2| = |3a - 1| + |a + 2|$$

$a \geq \frac{1}{3}$ のとき

$$A = (3a - 1) + (a + 2) = \boxed{4} a + \boxed{1}$$

(ウ) (エ)

$-2 \leq a \leq \frac{1}{3}$ のとき

$$A = -(3a - 1) + (a + 2) = \boxed{-2} a + \boxed{3}$$

(オカ) (キ)

$a \leq -2$ のとき

$$A = -(3a - 1) - (a - 2) = -4a - 1$$

$A = 2a + 13$ とすると, $a \geq \frac{1}{3}$ のとき

$$4a + 1 = 2a + 13 \quad \therefore a = \boxed{6} \geq \frac{1}{3}$$

(ク)

$-2 \leq a \leq \frac{1}{3}$ のとき

$$-2a + 3 = 2a + 13 \quad \therefore a = -\frac{5}{2} \left(-2 \leq a \leq \frac{1}{3} \text{ を満たさない} \right)$$

$a \leq -2$ のとき

$$-4a - 1 = 2a + 13 \quad \therefore a = \frac{\boxed{-7}}{\boxed{3}} \leq -2$$

(ケコ) (サ)

〔2〕

(1) $\bar{p} \iff m$ または n は偶数(少なくとも1つが偶数)

であるから, m が奇数ならば n は偶数 $\boxed{0}$ であり, m が偶数のとき n は

(シ)

偶数でも奇数でもよい。 $\boxed{2}$

(ス)

(2) 3は奇数であるから, m と n がともに奇数であることは, $3mn$ が奇数であるための必要十分条件である。 $\boxed{0}$

(セ)

(3) 5は奇数であるから,

$$\begin{aligned}
 \text{「} m + 5n \text{は偶数」} &\iff m \equiv 5n \pmod{2} \\
 &\iff m \equiv n \pmod{2} \\
 &\iff \text{「} m \text{と} n \text{はともに奇数」} \\
 &\quad \text{または「} m \text{と} n \text{はともに偶数」} \\
 &\iff \text{「} m \text{と} n \text{はともに奇数」}
 \end{aligned}$$

p は r であるための十分条件であるが, 必要条件ではない。 $\boxed{\text{②}}$
(ウ)

m が偶数で n が奇数であるとき, \bar{p} は満たすが, r は満たさない。

m, n がともに奇数であるとき, r は満たすが, \bar{p} は満たさない。

したがって, \bar{p} は r であるための必要条件でも十分条件でもない。 $\boxed{\text{③}}$
(タ)

[3]

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 + (2a - b)x + a^2 + 1 \\
 &= \left(x + a - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + 1 \\
 &= \left(x + a - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + ab + 1
 \end{aligned}$$

(1) グラフ G の頂点は

$$\left(\frac{\boxed{b}}{\boxed{2}} - a, -\frac{\boxed{b^2}}{\boxed{4}} + ab + \frac{\boxed{1}}{\boxed{\text{㉔}}} \right)$$

(2) グラフ G が点 $(-1, 6)$ を通るとき

$$\begin{aligned}
 6 &= (-1)^2 + (2a - b)(-1) + a^2 + 1 \\
 \therefore b &= -a^2 + 2a + 4 = -(a - 1)^2 + 5
 \end{aligned}$$

b は $a = \boxed{1}$ のとき最大値 $\boxed{5}$ をとる。
(ナ) (ト)

$a = 1, b = 5$ のとき

$$y = \left(x + 1 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 5 + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

のグラフは, $y = x^2$ のグラフを

$$x \text{ 軸方向に } \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}, y \text{ 軸方向に } \frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}}$$

だけ平行移動したものである。

第2問

〔1〕余弦定理より

$$\cos \angle BAC = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{\boxed{-1}^{(\text{アイ})}}{\boxed{4}^{(\text{ウ})}} < 0$$

であるから、 $\angle BAC$ は鈍角 $\boxed{②}^{(\text{エ})}$ である。また、

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{\boxed{15}^{(\text{オカ})}}}{\boxed{4}^{(\text{キ})}}$$

$\angle BAC$ は鈍角であるから、 B と D は A に関して反対側にあり、

$$\angle CAD + \angle BAC = 180^\circ$$

補角の公式より

$$\cos \angle CAD = -\cos \angle BAC = \frac{\boxed{1}^{(\text{ク})}}{\boxed{4}^{(\text{ケ})}}$$

$$AD \cos \angle CAD = \frac{1}{2} AC \text{ より}$$

$$AD \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times 2 \quad \therefore AD = \boxed{4}^{(\text{コ})}$$

$\triangle DBC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (AB + AD) \cdot AC \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} \times (3 + 4) \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{\boxed{7}^{(\text{サ})} \sqrt{\boxed{15}^{(\text{シス})}}}{\boxed{4}^{(\text{セ})}} \end{aligned}$$

〔2〕

(1) 2013年は、最大値が141であるから、ヒストグラムは $\boxed{③}^{(\text{ソ})}$ である。

2017年は、最大値が122であるから、ヒストグラムは $\boxed{④}^{(\text{タ})}$ である。

(注) 2013年と2017年は最大値だけで見分けられるが、中央値(2013年は80, 2017年は92)も判断材料になる。

(2) ① モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じであり，正しい。

① モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きく，正しい。

② モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きく，正しい。

モンシロチョウの初見日の四分位範囲は約 20，ツバメの初見日の四分位範囲は約 10 であるから，③は正しく，④は正しくなく，⑤は正しい。

⑥ 図 4 より，モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所が少なくとも 4 地点であり，正しい。

⑦ モンシロチョウとツバメの初見日が (69, 87), (105, 88) の場合があるので，初見日の差は 15 日以下だけではない。

以上より，正しくないものは， $\boxed{\text{④}}$ ， $\boxed{\text{⑦}}$ である。
(チ, ツ) (ツ, チ)

(3) X の偏差の平均 $E(X - \bar{x})$ は

$$E(X - \bar{x}) = E(X) - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0 \quad \boxed{\text{①}}$$

(テ)

X' の平均 $E(X')$ は

$$E(X') = E\left(\frac{X - \bar{x}}{s}\right) = \frac{1}{s}E(X - \bar{x}) = 0 \quad \boxed{\text{①}}$$

(ト)

X' の分散 $\sigma^2 = E(X'^2) - E(X')^2$ は

$$\sigma^2 = E(X'^2) = E\left(\frac{(X - \bar{x})^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}E((X - \bar{x})^2) = \frac{1}{s^2} \cdot s^2 = 1$$

であるから， X' の標準偏差 σ は

$$\sigma = 1 \quad \boxed{\text{①}}$$

(ナ)

モンシロチョウの初見日のデータ M とツバメの初見日のデータ T をそれぞれ M' , T' に変換しても散布図は相似であるから，

① または ②

に絞られ，平均 0，標準偏差 1 より

$$\boxed{\text{②}} \quad (\text{ニ})$$

が条件を満たす。

(注) 散布図から標準偏差は読み取れないが，区間 $[\bar{x}' - \sigma, \bar{x}' + \sigma]$ 内にすべてのデータが収まるとは考えにくいことから ②と予想できる。もはや，数学の問題ではない。

第3問

(1) 1回目の操作で、赤い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{9}} \quad (\text{ア})$$

白い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} \quad (\text{イ})$$

(2) 2回目の操作が白い袋で行われるのは、1回目の操作で白球が取り出される場合であるから、その確率は

$$1 - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{6} \right) = \frac{18 - (8 + 3)}{18} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{18}} \quad (\text{オ})$$

(3) 2回目の操作で白球が取り出される確率は

$$\begin{aligned} p \times \frac{1}{2} + (1-p) \times \frac{1}{3} &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} p + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{7}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7 + 36}{6 \times 18} = \frac{\boxed{43}}{\boxed{108}} \quad (\text{コサ}) \end{aligned}$$

3回目の操作で白球が取り出される確率は

$$\frac{43}{108} \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{43}{108} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{129 + 130}{108 \times 6} = \frac{\boxed{259}}{\boxed{648}} \quad (\text{ソタチ})$$

(4) 2回目の操作で白い袋から白球を取り出す確率は

$$\frac{7}{18} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{108}$$

であるから、2回目の操作で白球を取り出したとき、その球を白い袋から取り出した条件付き確率は

$$\frac{21}{\boxed{\text{コサ}}} = \frac{\boxed{21}}{\boxed{43}} \quad (\text{ナニ})$$

1回目と2回目に赤球、3回目に白球を取り出す確率は

$$\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{6} \right) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{18} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{88}{648}$$

であるから、3回目の操作で白球を取り出したとき、3回目にはじめて白球を取り出した条件付き確率は

$$\frac{88}{\boxed{\text{ソタチ}}} = \frac{\boxed{88}}{\boxed{259}} \quad (\text{ノハ})$$

第4問

$$(1) \quad 49x - 23y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

49を23で割って

$$49 = 23 \times 2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$23 = 3 \times 8 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②を③に代入して

$$23 = (49 - 23 \times 2) \times 8 - 1$$

$$\therefore 49 \times 8 - 23 \times 17 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

① - ④より

$$49(x - 8) - 23(y - 17) = 0$$

$$\therefore 49(x - 8) = 23(y - 17) \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

④より49と23は互いに素であるから, ⑤より

$$x - 8 = 23k, \quad y - 17 = 49k$$

を満たす整数 k が存在して, ①のすべての整数解は

$$x = \boxed{23}k + 8, \quad y = \boxed{49}k + 17 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

(エオ) (カキ)

で表される。

$$k \geq 0 \text{ のとき } x > 0 \text{ かつ } y > 0$$

であるから, ①の解となる自然数 x, y の中で x が最小のものは

$$x = \boxed{8}, \quad y = \boxed{17}$$

(ア) (イウ)

(2) ⑥は, $k \geq 0$ のとき $49x - 23y = 1$ の自然数解であり, $k < 0$ のとき

$$23Y - 49X = 1 \text{ の自然数解 } (X, Y) = (-23k - 8, -49k - 17)$$

を与えるから, $|A - B| = 1$ となる自然数の組 (A, B) は

$$A = 49|23k + 8|, \quad B = 23|49k + 17| \quad (k \text{ は整数})$$

で尽くされる。 A が最小になるのは $k = 0$ のときであり,

$$(A, B) = (49 \times \boxed{8}, 23 \times \boxed{17})$$

(ク) (ケコ)

$$49x - 23y = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

についても同様に考えて, ② - ④ $\times 2$ より

$$49(x - 16) - 23(y - 34) = 0$$

(1)と同様にして

$$x - 16 = 23n, \quad y - 34 = 49n$$

を満たす整数 n が存在して, ⑦のすべての整数解は

$$x = 23n + 16, \quad y = 49n + 34 \quad (n \text{ は整数})$$

で表され,

$$n \geq 0 \text{ のとき } x > 0 \text{ かつ } y > 0,$$

$$n < 0 \text{ のとき } x < 0 \text{ かつ } y < 0$$

であるから， $|A - B| = 2$ となる自然数の組 (A, B) は

$$A = 49|23n + 16|, \quad B = 23|49n + 34| \quad (n \text{ は整数})$$

で尽くされる。 A が最小になるのは $n = -1$ のときであり，

$$(A, B) = (49 \times \boxed{7}, 23 \times \boxed{15})$$

(サ) (シス)

- (3) a と $a + 2$ の最大公約数は， $(a + 2) - a = 2$ の約数であり，1 または $\boxed{2}$ (セ) である。

隣り合う自然数の一方は偶数であるから，特に

$$a(a + 1)(a + 2) \text{ は } 2 \text{ で割り切れる。}$$

連続する 3 つの自然数の 1 つは 3 で割り切れるから，

$$a(a + 1)(a + 2) \text{ は } 3 \text{ で割り切れる。}$$

2 と 3 は互いに素であるから，

$$a(a + 1)(a + 2) \text{ は } 6 \text{ で割り切れる。}$$

$a + 1$ が 4 で割れない偶数であるとき， $a(a + 1)(a + 2)$ は 2 で 2 回以上割れない。また， $a, a + 1, a + 2$ のうちにあるただ 1 つの 3 の倍数が 9 で割れないなら， $a(a + 1)(a + 2)$ は 3 で 2 回以上割れない。5 以上の素数については， $a, a + 1, a + 2$ のどれも割り切れない場合があるので，すべての自然数 a に対して $a(a + 1)(a + 2)$ を割るような最大の自然数は $\boxed{6}$ (ソ) である。

- (4) 6762 を素因数分解すると (チ)

$$6762 = 2 \times \boxed{3} \times 7 \times \boxed{2} \times \boxed{23}$$

(タ) (ツテ)

(3) より，既に $b(b + 1)(b + 2)$ は 2×3 で割り切れる。

$n(n + 1)(n + 2)$ が $7^2 = 49$ でも 23 でも割り切れるような自然数 n を考えると， $n, n + 1, n + 2$ の 1 つが A (49 の倍数) かつ B (23 の倍数) の場合は

$$n = 49 \times 23 \text{ のとき最小}$$

(2) の結果を用いると，

$$|A - B| = 1 \text{ の場合は } n + 1 = 49 \times 8, \quad n = 23 \times 17 \text{ のとき最小}$$

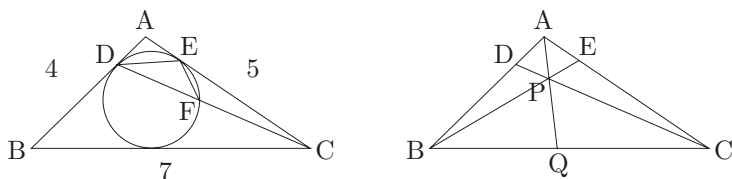
$$|A - B| = 2 \text{ の場合は } n + 2 = 23 \times 17, \quad n = 49 \times 7 \text{ のとき最小}$$

となるから， $b(b + 1)(b + 2)$ が 6762 の倍数となる最小の自然数 b は

$$b = \min\{49 \times 23, 23 \times 17, 49 \times 7\} = 49 \times 7 = \boxed{343}$$

(トナニ)

第5問



$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおき, $\triangle ABC$ の面積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(ア)

$$\therefore r = \frac{8\sqrt{6}}{4+7+5} = \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{2}}$$

(イ)

円外の点から円に引いた接線の(接点までの)長さは等しいから

$$AD = AE, \quad AD + AE = AB + AC - BC = 4 + 5 - 7 = 2$$

$$\therefore AD = \boxed{1} \quad (\text{ウ})$$

$\triangle ADE$ において余弦定理より

$$DE^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{12}{5} = \frac{60}{25}$$

$$\therefore DE = \frac{\boxed{2} \sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{5}}$$

(エ) (オカ) (キ)

$AD = AE = 1$ より

$$BD = 4 - 1 = 3, \quad CE = 5 - 1 = 4$$

チェバの定理より

$$\frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\therefore \frac{BQ}{CQ} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \quad (\text{ク}) \quad (\text{ケ})$$

$BQ + CQ = 7$ より

$$BQ = \boxed{3} \quad (\text{ク})$$

$BD = BQ$ より Q は内接円と辺 BC の接点であるから

$$IQ = r = \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{2}}$$

(サ) (シ)

接弦定理より

$$\angle DFE = \angle ADE$$

であるから， $\triangle ADE$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle DFE = \cos \angle ADE &= \frac{1 + \frac{12}{5} - 1}{2 \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{15}}{5}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{15}}{5} \\ &= \frac{\overset{\text{(スセ)}}{\sqrt{\boxed{15}}}}{\underset{\text{(ソ)}}{\boxed{5}}}\end{aligned}$$

(注) 本問の $\triangle ADE$ はたまたま二等辺三角形なので，

$$\cos \angle ADE = \frac{\frac{1}{2}DE}{AD} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

としてもよかったが，上の解答では一般的な状況を想定して導いている。