

1 (極限)

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 10x + 3}{x^2 - x - 6}$ を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax + b}{x - 1} = 2a$ であるとき, a, b の値を求めよ。

2 (平均変化率, 微分係数)

(1) x が 1 から $1 + h$ まで変化するときの関数 $f(x) = x^3$ の平均変化率を求め, 微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x)$ が $g'(3) = 3$ を満たすとき, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3 + 4h) - g(3 - 2h)}{h}$ を求めよ。

3 (導関数)

- (1) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (n は自然数) を示せ。
- (2) 次の関数を微分せよ。
- (i) $y = 3x^2 - 5x + 7$
- (ii) $y = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
- (iii) $y = (x - 2)^4$
- (3) $f'(x)\{f'(x) - x\} = f(x) + 6x$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

4 (積の微分法)

- (1) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を示せ。
- (2) 次の関数を微分せよ。
- (i) $y = (x^2 - 2x + 3)(x^3 + x^2 + x + 1)$
- (ii) $y = (x - 1)^3(x + 2)$
- (3) $f(x)$ を $(x - a)^2$ で割った余りを $f(a)$, $f'(a)$ で表せ。
- (4) $f(x) = x^{10} + ax^5 + b$ が $(x - 1)^2$ で割り切れるとき, a , b の値を求めよ。

5 (接線, 平方因数)

- (1) 曲線 $C: y = x^3 + x^2$ 上の点 $(1, 2)$ のおける接線 l の方程式を求めよ。また, 接線 l と曲線 C が再び交わる点の座標を求めよ。
- (2) 曲線 $y = x^3 - 3x + 1$ の接線のうち,
- (i) 傾きが $-\frac{9}{4}$ である接線 (ii) 点 $(-1, 8)$ を通る接線
- をそれぞれ求めよ。
- (3) 2 曲線 $y = x^2, y = x^3$ のどちらにも接する直線の方程式を求めよ。

6 (関数の増減)

- (1) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ の極大値と極小値を求めよ。
- (2) 関数 $g(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ が極値をもたないための条件を求めよ。
- (3) 関数 $g(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ が $x = 1$ で極大となるための条件を求めよ。
- (4) 関数 $h(x) = x^4 - 4ax^3 + 2(a^2 + 5)x^2$ が極大値をもつための条件を求めよ。

7 (3 次関数のグラフ)

- (1) 関数 $y = 2x^3 + 2x^2 - 2x$ のグラフをかけ。
- (2) 3 次関数のグラフはある点に関して対称であることを示せ。
- (3) 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 6x$ のグラフをかけ。

8 (4 次関数のグラフ)

- (1) 関数 $y = x^3(x - 4)$ のグラフをかけ。
- (2) $y = x^3(x - 4)$ のグラフと 2 点で接する直線の方程式を求めよ。
- (3) 4 次関数 $y = f(x)$ のグラフが y 軸または y 軸に平行なある直線に関して対称であるための必要十分条件は、ある 2 次関数 $g(x), h(x)$ が存在して $f(x) = g(h(x))$ と表されることである。このことを証明せよ。
- (4) 関数 $y = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフをかけ。

9 (微分法と方程式)

- (1) x についての方程式 $x^3 - 12x - 2a = 0$ が異なる 2 個以上の実数解をもつような a の範囲を求めよ。
- (2) x の 3 次方程式 $2x^3 - 3ax^2 - 6(a+1)x + a + 4 = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつような a の範囲を求めよ。
- (3) 正の実数 a, b, c が
- $$a + b + c = 6, \quad ab + bc + ca = 9$$
- を満たすとき, abc のとり得る値の範囲を求めよ。また, $a \leq b \leq c$ とするとき, c のとり得る値の範囲を求めよ。
- (4) 点 $(2, 0)$ から曲線 $y = x^3 - 3x^2 + ax$ に 3 本の接線が引けるような a の範囲を求めよ。

10 (最大・最小)

- (1) 関数 $f(x) = x^3 - 3ax + 16$ の $0 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値を求めよ。
- (2) 半径 1 の円に内接する三角形の面積の最大値を求めよ。

11 (微分法と不等式)

- (1) すべての実数 x に対して, $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} > 0$ が成り立つことを示せ。
- (2) $x \geq 0$ でつねに不等式 $a(x-1) \leq x^3$ が成り立つような a の値の範囲を求めよ。
- (3) 任意の実数 x に対して $x^3 - 1 \geq k(x-1)$ が成り立つような実数 k の値を求めよ。

12 (積分の定義, 積分計算)

- (1) 次の不定積分を求めよ。

(i) $\int x^2 dx$ (ii) $\int (x-2)^3 dx$ (iii) $\int (7x^2 + 5x + 3) dx$

(iv) $\int (x+1)(x+2) dx$ (v) $\int (x+1)^2(x+2) dx$

- (2) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$, $f(1) = 1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

13 (定積分)

(1) $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ が成り立つことを示せ。

(2) $\int_{-a}^a x^n dx$ (n は自然数) を求めよ。

(3) 次の定積分を計算せよ。

(i) $\int_1^2 (9x^2 + 8x + 7) dx$ (ii) $\int_{-1}^1 (x + 2)(x + 3) dx$

(iii) $\int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx$ (iv) $\int_1^2 (x - 1)^2(x + 1) dx$

(v) $\int_{-1}^2 |x(x - 1)| dx$

14 (定積分で表された関数)

(1) 関数 $f(x)$ が $f(x) = x^2 + \int_0^2 f(t) dt$ を満たすとき, 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $F(x) = \int_{-1}^x (t - t^2) dt$ の極大値と極小値を求めよ。

(3) 関数 $G(t) = \int_0^1 |x^2 - t^2| dx$ の $0 \leq t \leq 2$ における最大値と最小値を求めよ。

15 (面積)

- (1) $f(x)$ を多項式関数は $a \leq x \leq b$ においてつねに $f(x) \geq 0$ を満たし, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数とする。このとき, 領域 $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ の面積は $F(b) - F(a)$ となることを示せ。
- (2) 曲線 $y = x^4 - 2x^2 + 2$, 直線 $x = 1$, $x = 3$ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) 関数 $y = |x|$ のグラフと放物線 $y = -x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

16 (2次関数と面積)

- (1) 点 $(1, 3)$ を通る直線と放物線 $y = 2x^2$ で囲まれる領域の面積の最大値を求めよ。
- (2) 点 $(1, -2)$ から放物線 $y = 2x^2$ にひいた 2 本の接線とこの放物線で囲まれる部分の面積 S_1 を求めよ。また, 2 つの接点を結ぶ線分と放物線で囲まれる部分の面積 S_2 を求めよ。
- (3) 2 つの放物線 $y = x^2 - x$, $y = x^2 - 3x + 3$ の両方に接する直線とこの 2 つの放物線で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

17 (3次・4次関数と面積)

- (1) 曲線 $C_1: y = x^3$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に 4 だけ平行移動した曲線を C_2 とする。 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (2) 曲線 $C: y = 3x^3 + 2x$ 上の点 $(\frac{1}{3}, \frac{7}{9})$ における接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) 2 曲線 $y = x(x-1)(x-2)$, $y = x(x-2)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (4) 曲線 $C: y = -x^4 + 4x^2 + 4x + 1$ と 2 点で接する直線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

18 (等積条件)

- (1) 放物線 $y = 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を直線 $y = ax$ が 2 等分するとき, 定数 a の値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = x^3 - ax^2 + bx$ が x 軸と異なる 3 点で交わり, x 軸とで囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるとき, 正の定数 a, b が満たす関係式を求めよ。

1 確認：微分積分を多項式に限定して取り組んでいくが，他方で数学Ⅱの「多項式」との融合という側面を忘れてはいけない。多項式に限定すると言っても，微分積分の基礎としての「極限」をはずすことはできない。

変数 x が定数 a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくととき，関数 $f(x)$ の値が一定値 A に限りなく近づくなれば， $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は A に収束するといい， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ と表す。収束しないとき，発散するという。

極限を表す式がそのままでは収束するか発散するか判定できないとき，その式の形を不定形という。多項式関数(または有理関数)の極限において，不定形は $\frac{0}{0}$ の型しか出てこないないので，約分して代入する方法だけで解決する。 $x \rightarrow a$ のとき 0 に収束する多項式は $x - a$ を因数にもつという多項式の性質(因数定理)にも注意する。

(1) $x \rightarrow 3$ のとき $\frac{0}{0}$ の不定形になることをまず確かめ，分母・分子を因数分解して共通因数で約すことによって不定形を解消する。因数分解する際， $x - 3$ を因数にもつこと(因数定理)を頭におくと変形が若干スムーズになるだろう。

(2) (分母) $\rightarrow 0$ なのに収束するということは，不定形になること

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax + b) = 0$$

が必要である。このとき，分母・分子が $x - 1$ を共通因数にもつことから約分できて，収束することが言えるから十分である。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 10x + 3}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x - 1)}{(x - 3)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \frac{3^2 + 3 \cdot 3 - 1}{3 + 2} = \frac{17}{5} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $x \rightarrow 1$ のとき分母は 0 に収束するから， $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax + b}{x - 1}$ が収束するためには

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax + b) = 1 + a + b = 0 \text{ が必要}$$

である。このとき，

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax + b}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax - a - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1 + a)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1 + a) = 3 + a = 2a \end{aligned}$$

$$\therefore a = 3, b = -4 \quad (\text{答})$$

2 確認：曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線を求めようと思えば、その点とは別の点 $(b, f(b))$ を曲線上にとり、2点を結ぶ直線の傾き $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ の極限を接線の傾きと考えるのが自然であろう。そこで、 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ を a から b までの $f(x)$ の平均変化率といい、 $b \rightarrow a$ のとき極限が収束するならば、その極限值 $f'(a)$ を $f(x)$ の $x = a$ における微分係数という。 $b - a = h$ とおいて、 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ をあらためて書き直すと、

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

となる。また、以上の考察より、微分係数は「接線の傾き」という図形的意味をもつ。

解答：

(1) x が 1 から $1+h$ まで変化するときの関数 $f(x) = x^3$ の平均変化率は

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} \\ &= \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = 3 + 3h + h^2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

微分係数 $f'(1)$ は

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+4h) - g(3-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(3+4h) - g(3)}{h} + \frac{g(3) - g(3-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ 4 \cdot \frac{g(3+4h) - g(3)}{4h} + 2 \cdot \frac{g(3) - g(3-2h)}{-2h} \right\} \\ &= 4g'(3) + 2g'(3) \\ &= 6g'(3) \\ &= 6 \times 3 = 18 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) あくまでも $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(3+t) - g(3)}{t}$ の収束 ($g(3)$ の部分は定数) が仮定されているだけなので、安易に

$$\frac{g(3+4h) - g(3-2h)}{h} = 6 \cdot \frac{g(3+4h) - g(3-2h)}{4h - (-2h)} \rightarrow 6g'(3)$$

と断定することはできない。

結果が合っているとしても、途中がデタラメなら、数学としては間違いである。

3 確認：2 によって接線(の傾き)を求める方法は手に入れたが，各点ごとに極限を計算しては非効率的で，実用に耐えられない。そこで，微分係数を値にとる関数の求め方を確立することにより，微分法の理論を整備する。

x に対してその微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を $f(x)$ の導関数といい，導関数を求めることを微分するという。導関数は記号で

$$f'(x), \frac{d}{dx}f(x), \frac{df}{dx}(x), \frac{dy}{dx}$$

などと表すが，微分する変数が明確な場合は y' と略してもよい。導関数の定義より

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

であるが，収束する極限の性質(高校の範囲では証明できないので認めて用いる)より

$$\{af(x) + bg(x)\}' = af'(x) + bg'(x) \quad (a, b \text{ は定数})$$

が成り立つから，各項ごとに微分すればよい。したがって，

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad (n \text{ は自然数})$$

さえわかれば，すべての多項式関数は微分できることになる。この公式を示すには

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

または二項定理を用いるのが一般的である。詳細は(1)の解答を参照のこと。

この公式の証明をたどれば

$$\frac{d}{dx}(x-a)^n = n(x-a)^{n-1} \quad (n \text{ は自然数})$$

も言えるが，平行移動しても接線の傾きは変わらないと考えれば，直感的に理解できる。多項式の問題として x の式を $x-a$ の式とみる場面では，非常に効果的である。

恒等式による関数決定の問題も確認しておきたい。「式と証明」で学んだ解法(まず次数を求めてから係数を文字でおくこと)に加えて， $f'(x)$ の次数が $f(x)$ の次数より 1 だけ小さいことに注意する。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{d}{dx}(x^n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \{(x+h)^{n-1} + x(x+h)^{n-2} + x^2(x+h)^{n-3} + \cdots + x^{n-1}\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{(x+h)^{n-1} + x(x+h)^{n-2} + x^2(x+h)^{n-3} + \cdots + x^{n-1}\} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned} \quad (\text{おわり})$$

$$(2) \text{ (i) } y' = 3(x^2)' - 5(x)' + (7)' = 6x - 5 \quad (\text{答})$$

$$\text{(ii) } y' = 4(x^3)' + 3(x^2)' + 2(x)' + (1)' = 12x^2 + 6x + 2 \quad (\text{答})$$

$$\text{(iii) } y' = \frac{d}{dx}(x-2)^4 = 4(x-2)^3 \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad f'(x)\{f'(x) - x\} = f(x) + 6x \quad \dots\dots ①$$

$f'(x) = 0$ または $f'(x) = x$ のとき, $f(x)$ は定数または 2 次式で,

$$f'(x)\{f'(x) - x\} = 0, \quad f(x) + 6x \text{ の 1 次項は } 6x$$

となるから, ①は成り立たない。また, $f(x) = -6x$ のときも①は成り立たない。

$f(x)$ は n 次式であるとし,

$$n \geq 2, \quad f'(x) \neq x$$

とすると, ①において両辺の次数を比べることにより

$$(n-1) + (n-1) = n \quad \therefore n = 2$$

あらためて, $n = 1$ の場合も含めて

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \dots\dots ②$$

とおくと, ①より

$$(2ax + b)(2ax + b - x) = (ax^2 + bx + c) + 6x$$

$$\therefore 2a(2a-1)x^2 + (4a-1)bx + b^2 = ax^2 + (b+6)x + c$$

係数を比べると

$$\begin{cases} 2a(2a-1) = a & \dots\dots ③ \\ (4a-1)b = b+6 & \dots\dots ④ \\ b^2 = c & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

③より

$$a(4a-3) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ または } a = \frac{3}{4}$$

$a = 0$ のとき, ④, ⑤より

$$b = -3, \quad c = 9$$

$a = \frac{3}{4}$ のとき, ④, ⑤より

$$b = 6, \quad c = 36$$

以上を②に代入して, 求める整式は

$$f(x) = -3x + 9 \text{ または } f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 6x + 36 \quad (\text{答})$$

(注) 次数決定の場面において, $n = 1$ のときは $f'(x)$ は定数となり, $f'(x) - x$ の次数は $n - 1$ でなく 1 である。そこで, $n \geq 2$ として次数を比べている。

4 確認：積の微分の公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

は数学Ⅲの公式と受け取られがちであるが、技巧として一番効果を発揮するのは、累乗因数(特に平方因数)をもつ多項式を扱うときである。典型的なケースとして、微分しても1次以上の共通因数が残るために因数分解が容易になることと、平方因数で割った余りの求め方を基本解法として確認する。ふつうの積で表された多項式の場合でも、微分すれば1次下がるので、微分してから展開する方が若干計算が楽になる。

公式の証明は、導関数の定義に戻って考える。これもまた、大事なことである。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad \{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{おわり}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (i) } y' &= (x^2 - 2x + 3)'(x^3 + x^2 + x + 1) + (x^2 - 2x + 3)(x^3 + x^2 + x + 1)' \\ &= (2x - 2)(x^3 + x^2 + x + 1) + (x^2 - 2x + 3)(3x^2 + 2x + 1) \\ &= (2x^4 - 2) + (3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3) \\ &= 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } y' &= \{(x-1)^3\}'(x+2) + (x-1)^3(x+2)' \\ &= 3(x-1)^2(x+2) + (x-1)^3 \cdot 1 \\ &= (x-1)^2\{3(x+2) + (x-1)\} \\ &= (x-1)^2(4x+5) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $f(x) = (x-a)^2Q(x) + bx + c$ ($Q(x)$ は x の整式, b, c は定数)
とおくことができ、 x で微分すると

$$f'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2Q'(x) + b$$

2式にそれぞれ $x = a$ を代入すると、

$$f(a) = ba + c, \quad f'(a) = b$$

$$\therefore b = f'(a), \quad c = f(a) - af'(a)$$

よって、求める余りは

$$bx + c = f'(a)(x-a) + f(a) \quad (\text{答})$$

(4) $f(x) = x^{10} + ax^5 + b$ を微分すると

$$f'(x) = 10x^9 + 5ax^4$$

$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは $f'(1)(x-1) + f(1)$ であるから、

$$\text{「} f(x) \text{ が } (x-1)^2 \text{ で割り切れる」} \iff \begin{cases} f(1) = 1 + a + b = 0 \\ f'(1) = 10 + 5a = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = -2, \quad b = 1 \quad (\text{答})$$

5 確認：2 で確認したように，微分係数は図形的には接線の傾きを意味するので，曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

と表される。ここで，「点 $(a, f(a))$ における」というのは，「点 $(a, f(a))$ を接点とする」という意味である。

4 (3) で確認したように，

$$f'(a)(x - a) + f(a) \text{ は多項式 } f(x) \text{ を } (x - a)^2 \text{ で割った余り}$$

でもあるから， $y = f(x)$ とその接線の式 $y = mx + n$ から y を消去して得られる方程式 $f(x) - (mx + n) = 0$ において，

接点の x 座標は重解

となる。逆に，(多項式関数の場合は)重解条件から接線を求めることもできる。

一方，微分して接線を求めるには接点の座標が必要なので，接点が不明の場合は

接点の座標を文字で置いて接線の式を立てる

ことがポイントである。これは理論体系の不備を解消するとともに，その式の形により「接するための条件」をおさえていることになる。

解答：

(1) $(x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x$ であるから，

$$x = 1 \text{ における微分係数は } 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$$

よって，点 $(1, 2)$ のにおける接線 l の方程式は

$$y = 5(x - 1) + 2 \quad \therefore y = 5x - 3 \quad (\text{答})$$

$x^3 + x^2 = 5(x - 1) + 2$ とおくと

$$x^3 - 1 + x^2 - 1 - 5(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1 + x + 1 - 5) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$(x - 1)^2(x + 3) = 0$$

$x = 1$ でない解は $x = -3$ であるから，求める交点の座標は

$$(-3, -18) \quad (\text{答})$$

(注) 重解条件を用いて接線の方程式を求めてもよい。 $x - 1$ で整理すると

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 &= (x - 1 + 1)^3 + (x - 1 + 1)^2 \\ &= (x - 1)^3 + 4(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 2 \end{aligned}$$

となるから， $x = 1$ における接線の方程式は

$$y = 5(x - 1) + 2 \quad \therefore y = 5x - 3 \quad (\text{答})$$

後半の問題も重解条件に注目すると， $x^3 + x^2 = 5x - 3$ は $x = 1$ を重解にもつ方程式であるから，定数項の比較により

$$(x^3 + x^2) - (5x - 3) = (x - 1)^2(x + 3)$$

と容易に因数分解できて，再び交わる点の座標は

$$(-3, -18) \quad (\text{答})$$

と求められる。

(2) $x = t$ における $y = x^3 - 3x + 1$ の接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 3)(x - t) + t^3 - 3t + 1$$

$$\therefore y = (3t^2 - 3)x - 2t^3 + 1 \quad \dots\dots (*)$$

(i) $3t^2 - 3 = -\frac{9}{4}$ のとき

$$t^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \therefore t = \pm \frac{1}{2}$$

(*)に代入して

$$y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}, \quad y = -\frac{9}{4}x + \frac{5}{4} \quad (\text{答})$$

(ii) 点 $(-1, 8)$ を通るとすれば,

$$8 = (3t^2 - 3) \cdot (-1) - 2t^3 + 1$$

$$2t^3 + 3t^2 + 4 = 0$$

$$(t + 2)(2t^2 - t + 2) = 0$$

ここで,

$$2t^2 - t + 2 = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0$$

であるから,

$$t = -2$$

(*)に代入して

$$y = 9x + 17 \quad (\text{答})$$

(3) $x = s$ における $y = x^2$ の接線の方程式は

$$y = 2s(x - s) + s^2 \quad \therefore y = 2sx - s^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = t$ における $y = x^3$ の接線の方程式は

$$y = 3t^2(x - t) + t^3 \quad \therefore y = 3t^2x - 2t^3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①と②が同一直線を表す条件を求めて

$$2s = 3t^2 \quad \text{かつ} \quad -s^2 = -2t^3$$

$$\therefore (s, t) = (0, 0), \left(\frac{32}{27}, \frac{8}{9}\right)$$

①または②に代入して, 求める接線の方程式は

$$y = 0, \quad y = \frac{64}{27}x - \frac{1024}{729} \quad (\text{答})$$

(注) ①と②を比較する代わりに, ②だけ導いて x の方程式

$$x^2 - (3t^2x - 2t^3) = 0$$

が重解をもつ条件

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = (3t^2)^2 - 4 \cdot 2t^3 = 0$$

を考えてもよい。

6 確認：関数の増減についての用語を確認すると，

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は単調増加}$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は単調減少}$$

という。停滞することなく増減する場合は

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は狭義の単調増加}$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \text{ のとき } f(x) \text{ は狭義の単調減少}$$

と表現する。混同のおそれがないときは，“狭義の”は省略する。

増加から減少への変わり目を極大，減少から増加への変わり目を極小という。極大値と極小値を総称して極値という。したがって，「極値を求めよ」という問題では，極大・極小の判別も要求されていることになる。また，増減や極大・極小の概念は，微分法とは独立であることにも注意する。

2, 3 で確認したように，導関数の各値(微分係数)はその点における接線の傾きを意味するから，導関数の符号変化から関数の増減がわかる。具体的には

$$f'(x) > 0 \text{ を満たす } x \text{ の範囲では，} f(x) \text{ は(狭義の)単調増加}$$

$$f'(x) < 0 \text{ を満たす } x \text{ の範囲では，} f(x) \text{ は(狭義の)単調減少}$$

となる。問題を解く際には，題意を「導関数の符号に関する条件」に置き換えて，

1° 定符号の因数は除外する

2° $y = f'(x)$ の $(x$ 軸との上下関係がわかる程度の)グラフをかく

といった不等式の解くための技巧を用いることがポイントとなる。

計算の際には，多項式の特性を活用することもポイントである。導関数が 2 次式ならば，2 次方程式の解の公式を逆利用して因数分解することができる。また，

$$f(x) = f'(x)Q(x) + R(x) \quad (Q(x) \text{ は商，} R(x) \text{ は余りの多項式})$$

の形の恒等式をあらかじめ導くことで，極値を求める代入計算を見通し良くできる。

解答：

(1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ を微分すると，

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 6 = 6(x^2 - x - 1)$$

$f'(x) = 0$ を満たす x を求めると，解の公式より $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であるから，

$$f'(x) = 6 \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

と因数分解される。 $f'(x)$ の符号変化から $f(x)$ の増減は

x	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$		$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ここで， $f' \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = f' \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 0$ に注目して， x の恒等式

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5 = (x^2 - x - 1)(2x - 1) - 5x + 4$$

に代入すると

$$\left. \begin{array}{l} \text{極大値 } f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -5 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 4 = \frac{3+5\sqrt{5}}{2} \\ \text{極小値 } f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = -5 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 4 = \frac{3-5\sqrt{5}}{2} \end{array} \right\} \text{(答)}$$

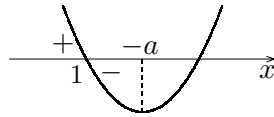
(2) $g(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ を微分すると

$$g'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b = 3\{(x+a)^2 - a^2 + b\}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \text{「}g(x)\text{ が極値をもたない」} &\iff \text{「}g'(x)\text{ が符号変化しない」} \\ &\iff \text{「任意の }x\text{ で } (x+a)^2 - a^2 + b \geq 0\text{」} \\ &\iff -a^2 + b \geq 0 \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 「 $g(x)$ が $x=1$ で極大」 \iff 「 $x=1$ で $g'(x)$ が $+\rightarrow-$ と変化する」
 $\iff g'(1) = 3(1+2a+b) = 0$ かつ $1 < -a$
 $\iff 2a+b+1=0$ かつ $a < -1$ (答)



(4) $h(x) = x^4 - 4ax^3 + 2(a^2 + 5)x^2$ を微分すると

$$h'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 4(a^2 + 5)x = 4x(x^2 - 3ax + a^2 + 5)$$

x が十分小さいときは $h'(x) < 0$, x が十分大きいときは $h'(x) > 0$ であるから,
 $h'(x)$ の符号変化は 1 回または 3 回である。 $h'(x)$ の符号変化が 1 回だけならば
 $-\rightarrow+$ と変わるだけで $h(x)$ は極大値をもたないから,

$h'(x)$ は符号が 3 回変わる

ことが条件である。

ここで,

$$\varphi(x) = x^2 - 3ax + a^2 + 5 = \left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 - \frac{5}{4}(a+2)(a-2)$$

とにおいて, $\varphi(0) = a^2 + 5 > 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \text{「}h(x)\text{ が極大値をもつ」} &\iff \text{「}h'(x)\text{ がある }x\text{ で }+\rightarrow-\text{ と変化する」} \\ &\iff \text{「}h'(x) = 4x\varphi(x)\text{ の符号が 3 回変わる」} \\ &\iff \text{「}\varphi(x)\text{ の符号が } (x=0\text{ 以外で) 2 回変わる」} \\ &\iff -\frac{5}{4}(a+2)(a-2) < 0 \\ &\iff a < -2 \text{ または } a > 2 \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(注) 次の 7 で扱う関数のグラフを思い浮かべながら考えるとわかりやすい。

7 確認：6 で確認したように，導関数の符号変化から関数の増減がわかるので，関数のグラフの概形をかくことができる。極値をもつ3次関数のグラフは，極大・極小の様子を描出すことにより，グラフの特徴を表現すればよい。

2次関数の平方完成と同様に，任意の3次関数は立方完成により

$$y = a(x - p)^3 + b(x - p) + q$$

と変形できる。これは，原点に関して対称な奇関数 $y = ax^3 + bx$ のグラフを x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す式であるから，一般に

3次関数のグラフはある点 (p, q) に関して対称

であることがわかる。(計算は(2)の解答参照)

$$\frac{dy}{dx} = 3a(x - p)^2 + b$$

であるから，接線の傾きが最大または最小となるときに接点対称の中心である。

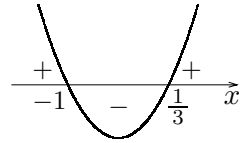
3次関数のグラフには，(2次関数と違って)極値のない単調なグラフが存在する。そのようなグラフは，点対称の中心における接線をひいてグラフの特徴を描出す。

解答：

(1) $y = 2x^3 + 2x^2 - 2x$ を微分すると

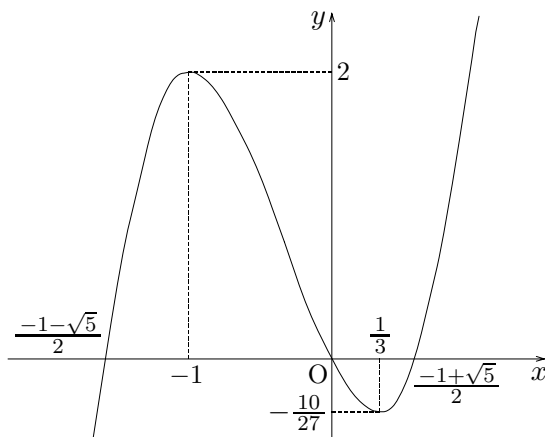
$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 + 4x - 2 = 2(3x^2 + 2x - 1) \\ &= 2(x + 1)(3x - 1) \end{aligned}$$

y' の符号から，関数 $y = 2x^3 + 2x^2 - 2x$ の増減は



x		-1		$\frac{1}{3}$	
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 2	↘	極小 $-\frac{10}{27}$	↗

よって， $y = 2x^3 + 2x^2 - 2x$ のグラフの概形は次図のようになる。



(答)

(2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) とおいて, $f(x)$ を立方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2\right) + cx + d \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - 3a\left(\frac{b}{3a}\right)^2x - a\left(\frac{b}{3a}\right)^3 + cx + d \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{b^3}{27a^2} \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \end{aligned}$$

となる。 $y = f(x)$ のグラフは, 原点について対称な

$$y = ax^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x$$

のグラフを x 軸方向に $-\frac{b}{3a}$, y 軸方向に $\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$ だけ平行移動したものであるから,

$$\text{点}\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)\text{に関して対称}$$

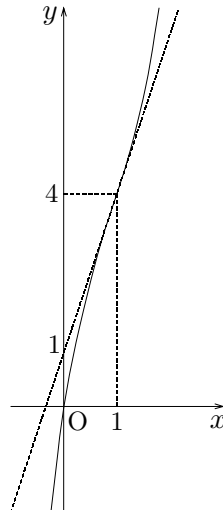
である。

(おわり)

(3) $y = x^3 - 3x^2 + 6x$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 + 3 > 0$$

となるから, 点 (1, 4) を中心に点対称である単調増加なグラフとなる。点 (1, 4) における接線 $y = 3x + 1$ を補助線として $y = x^3 - 3x^2 + 6$ のグラフの概形をかくと, 次図のようになる。



(答)

(注) 3次関数のグラフは, 点対称の中心において接線の傾きが最小または最大になるので, その点を境に凹凸が逆になる。凹凸の変わり目の点を一般に変曲点という。

8 確認：4次関数のグラフをかく原理は3次関数と同じであるが、4次関数のグラフを学ぶことには特別な意味がある。2次関数のグラフは線対称、3次関数のグラフは点対称(→7)であるが、4次関数のグラフには一般的な対称性は存在しない。また、3次以下の関数のグラフの接線には接点は1つしか存在しないが、4次関数ではグラフによっては2点で接する接線(複接線)が存在する。つまり、4次以上の関数に触れてはじめて特殊性が排除できて、微分の理論が実感できることになる。

(2)のように2点で接する直線を複接線という。複接線の方程式を求めるには、微分そのものを用いるのではなく、平方因数をもつという多項式特有の性質(→5)を用いる方が得策である。ただし、解法の原則は接線を求めるときと同様に接点の x 座標を文字でおくことにあり、 $x = \alpha$ および $x = \beta$ において接するとして x の恒等式

$$x^3(x-4) - (ax+b) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

を導くことがポイントである。このとき、 $y = ax + b$ が求める複接線である。

4次関数のグラフには一般的な対称性はないので、(3)のように線対称であるための条件を考えるのは意味のあることである。3次関数のグラフの点対称性を示すのに、奇関数のグラフが原点に関して対称であることと結びつけたように、今度は偶関数のグラフが y 軸に関して対称であることと結びつけるとわかりやすい。あらためて、偶関数と奇関数の定義を確認しておく、

$$f(x) \text{ が偶関数} \iff f(-x) = f(x)$$

$$f(x) \text{ が奇関数} \iff f(-x) = -f(x)$$

である。ここで、等式は関数として等しいこと(恒等式)を意味する。なお、偶関数、奇関数の定義自体は、多項式だけでなく一般の関数にも適用される。例えば、 $y = \cos x$ は偶関数、 $y = \sin x$ は奇関数である。

解答：

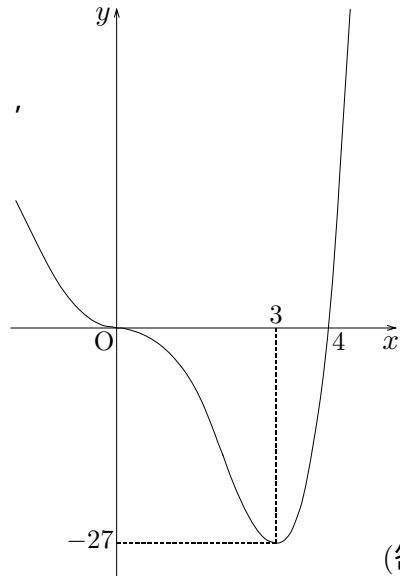
(1) $y = x^3(x-4) = x^4 - 4x^3$ を微分すると、

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$x \neq 0$ のとき、 y' は $x-3$ と同符号であるから、

x	0	3	
y'	-	0	- 0 +
y	↘	変曲点 0	↘ 極小 -27 ↗

$y = x^3(x-4)$ のグラフは右図のようになる。



(2) 直線 $y = ax + b$ が $x = \alpha, \beta$ において $y = x^3(x - 4)$ に接するとすれば, x の恒等式

$$x^3(x - 4) - (ax + b) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 - ax - b \\ = x^4 - (2\alpha + 2\beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 - (2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2)x + \alpha^2\beta^2 \end{aligned}$$

の係数を比べて

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 4 & \dots\dots \textcircled{1} \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = 0 & \dots\dots \textcircled{2} \\ a = 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 & \dots\dots \textcircled{3} \\ b = -\alpha^2\beta^2 & \dots\dots \textcircled{4} \end{cases}$$

①, ②より

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 = -2$$

であるから, ③, ④に代入して

$$a = 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = -8, \quad b = -(\alpha\beta)^2 = -4$$

求める直線の方程式は

$$y = -8x - 4 \quad (\text{答})$$

(注) 厳密には, α, β が実数であることを確かめなければならない。

(3) 十分性: $f(x) = g(h(x))$ となる 2 次関数 $g(x), h(x)$ が存在するものとする。

$h(x)$ は 2 次式であるから

$$h(x) = a(x - p)^2 + q$$

と表される。このとき, $y = h(x)$ のグラフは直線 $x = p$ に関して対称であるから, 任意の実数 t に対して

$$h(p - t) = h(p + t)$$

が成り立つ。したがって, 任意の実数 t に対して

$$f(p - t) = g(h(p - t)) = g(h(p + t)) = f(p + t)$$

が成り立つから, $y = f(x)$ のグラフは直線 $x = p$ に関して対称である。

必要性: $y = f(x)$ のグラフが直線 $x = p$ に関して対称であるとすれば, x 軸方向に $-p$ だけ平行移動した $y = f(x + p)$ のグラフは y 軸に関して対称である。 $f(x)$ は 4 次関数であるから $f(x + p)$ も 4 次関数であり, 偶関数の性質より

$$f(x + p) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a, b, c \text{ は定数})$$

と表される。これは x についての恒等式であるから

$$f(x) = a(x - p)^4 + b(x - p)^2 + c$$

が成り立つ。ここで,

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \quad h(x) = (x - p)^2$$

とおくと, $g(x), h(x)$ は 2 次関数であり,

$$f(x) = g(h(x))$$

となる。

(おわり)

(注) 証明途中で用いた偶関数の性質について補足しておく。 $P(x)$ が多項式の場合、

$$P(x) \text{ が偶関数} \iff P(x) \text{ は偶数次の項のみ}$$

であることが成り立つ。必要なら、係数が0である項も追加して

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (n \text{ は自然数})$$

と表すことにすると、

$$P(-x) = a_{2n}x^{2n} - a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_2x^2 - a_1x + a_0$$

となるから、

$$P(-x) = P(x) \iff a_{2k-1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

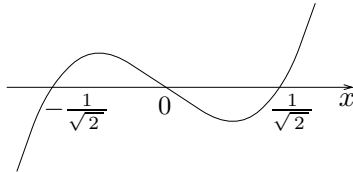
であることがわかる。同様にして、多項式 $P(x)$ に対して

$$P(x) \text{ が奇関数} \iff P(x) \text{ は奇数次の項のみ}$$

であることも確かめられる。

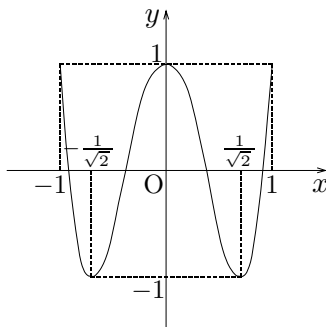
(4) $y = 8x^4 - 8x^2 + 1$ を微分すると

$$y' = 32x^3 - 16x = 32x \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
y'	-	0	+	0	+
y	1	↘ 極小 -1	↗ 極大 1	↘ 極小 -1	↗ 1

よって、 $y = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフの概形は



(答)

(注) $f(x) = 2x^2 - 1$ とおくと、

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = f(f(x))$$

となっているので、上のグラフは点 $(\cos \theta, \cos 4\theta)$ の軌跡である。また、(3)の考察より、 y 軸(に平行な)直線に関して対称なグラフになるのは当然である。

9 確認：数学 I で学んだように，方程式の実数解と関数のグラフは

方程式 $f(x) = 0$ の実数解 x

$\iff f(x) = 0$ を満たす実数 x

$\iff y = f(x)$ と $y = 0$ を同時に満たす実数 x

\iff 曲線 $y = f(x)$ と x 軸 ($y = 0$) の共有点の x 座標

という関係にあるから，実数解問題はグラフの問題に還元できる。2 次関数の場合は平方完成してグラフをとらえたが，3 次以上の関数の場合は微分法を用いる。

方程式 $f(x) = 0$ が $g(x) = a$ に変形できて， $g(x)$ に未知定数 a が含まれないならば， $y = g(x)$ と $y = a$ のグラフの位置関係を考える方がわかりやすい。このような処理は未知定数の分離と呼ばれ，重要な考え方の一つである。

基本対称式にまつわる存在範囲の考察については， x の恒等式

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

により，対応する多項式関数の値域の問題に帰着させることが基本である。

図形量の実数解条件も方程式の実数解条件に置き換えられることが多い。特に，接線の本数に関する問題では，接点の x 座標を文字で置くことが基本 (\rightarrow [5]) だったので，その文字についての方程式の実数解問題に帰着される。この方程式はもとの曲線の式とは無縁であるため，何と何とが対応しているのかを見失わないように注意する。

解答：

(1) $x^3 - 12x - 2a = 0 \iff x^3 - 12x = 2a$

であることに注目して

$$f(x) = x^3 - 12x$$

とおくと，

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x + 2)(x - 2)$$

x		-2		2		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	極大 16	↘	極小 -16	↗

よって， $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる。

方程式 $f(x) = 2a$ が異なる 2 個以上の実数解をもつのは，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 2a$ が 2 つ以上の共有点をもつ場合であるから，求める範囲は

$$-16 \leq 2a \leq 16 \quad \therefore -8 \leq a \leq 8 \quad (\text{答})$$

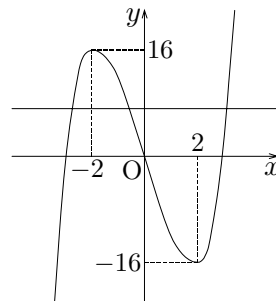
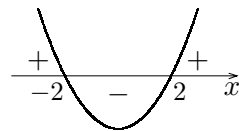
(2) $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 6(a + 1)x + a + 4$ とおくと，

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax - 6(a + 1) = 6(x + 1)(x - a - 1)$$

であるから，

「方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつ」

\iff 「 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わる」



$$\begin{aligned} &\iff \text{「} f(x) \text{ が極大を与える点と極小を与える点が } x \text{ 軸に関して反対側} \text{」} \\ &\iff a+1 \neq -1 \text{ かつ } f(a+1)f(-1) = -a(a+2)(a+4) \cdot 4(a+2) < 0 \\ &\iff a < -4 \text{ または } a > 0 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $abc = k$ とおくと, 正の実数 a, b, c を 3 解とする 3 次方程式は

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b)(x-c) &= 0 \\ x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc &= 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x - k &= 0 \quad \therefore x^3 - 6x^2 + 9x = k \end{aligned}$$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ とおくと,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

t		1		3	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	\nearrow	極大 4	\searrow	極小 0	\nearrow

$y = f(x)$ のグラフと $y = k (= abc)$ が重複も含めて 3 共有点をもつ範囲を求めて

$$0 \leq abc \leq 4 \quad (\text{答})$$

$f(x) - f(1) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4)$ であることに注意すると,

$a \leq b \leq c$ のとき c のとり得る範囲は

$$3 \leq c \leq 4 \quad (\text{答})$$

(4) $x = t$ における $y = x^3 - 3x^2 + ax$ の接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 6t + a)(x - t) + t^3 - 3t^2 + at$$

点 $(2, 0)$ を通るとすれば,

$$0 = (3t^2 - 6t + a)(2 - t) + t^3 - 3t^2 + at$$

$$\therefore 2t^3 - 9t^2 + 12t = 2a$$

ここで, $f(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ とおくと,

$$f'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2)$$

t		1		2	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	\nearrow	極大 5	\searrow	極小 4	\nearrow

よって,

「点 $(2, 0)$ から曲線 $y = x^3 - 3x^2 + ax$ に 3 本の接線が引ける」

\iff 「曲線 $y = f(t)$ と直線 $y = 2a$ が異なる 3 点で交わる」

$$\iff 4 < 2a < 5 \iff 2 < a < \frac{5}{2} \quad (\text{答})$$

(注) 厳密に言えば, 上で述べていることは「接点が 3 個ある」ための条件であるから, 接線 $y = f'(t)(x - t) + f(t)$ と接点 $(t, f(t))$ が 1 対 1 に対応することを示さなければならぬ。実際, 4 次以上の関数の場合は, 1 対 1 でないことがある。(→ 8(2))

10 確認：関数の最大値・最小値を求めるには，定義域内における関数の増減がわかれば解決するので，原則的には [6] ~ [8] の問題に帰着される。ところが，実際には定義域内の増減だけ調べるのは困難なことが多いので，視点を変えて

十分広い範囲で関数の増減を調べて，定義域の部分だけ抜き出すと考えるのがコツである。

関数の係数に未知数が入るときは，増減の変わり目と定義域との位置関係に注意し，必要があれば場合分けして考える。その際，[6] で注意したように，導関数のグラフから符号変化を読み取ることがポイントである。

図形量の最大最小問題では，(長さや角の大きさなど) 適当な量を文字で置いて関数設定し，図形の存在条件から定義域を導くことが基本である。本問(2)では，正三角形のときに最大になりそうな気がするが，一辺を固定して徐々に二等辺三角形を作っていくという作業は極限操作となるので，純粋に図形的考察だけではその収束は示せない。直感的に当たり前だと思った人がいるとすれば，その直感は間違っている。図を描いているうちに，存在が当たり前のように錯覚して，存在条件による制約(定義域)を見落としかねないところも，図形問題では注意しなければならない。

解答：

(1) $f(x) = x^3 - 3ax + 16$ を微分すると，

$$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$$

(i) $a \leq 0$ のとき

つねに $f'(x) \geq 0$ となるから $f(x)$ は単調増加であり， $0 \leq x \leq 2$ において

最大値は $f(2) = 24 - 6a$ ，最小値は $f(0) = 16$

(ii) $a > 0$ のとき

$$f'(x) = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

$x \geq 0$ では $f'(x)$ は $x - \sqrt{a}$ と同符号であるから，

x	0	\sqrt{a}	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		↘ 極小 ↗	

$x \geq 0$ における $y = f(x)$ のグラフの概形は右図のようになるから， $0 \leq x \leq 2$ における最大値は

$2 \leq \sqrt{3a}$ のとき $f(0) = 16$

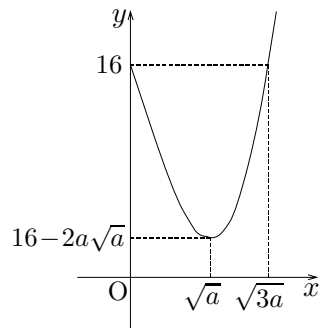
$\sqrt{3a} \leq 2$ のとき $f(2) = 24 - 6a$

$0 \leq x \leq 2$ における最小値は

$2 \leq \sqrt{a}$ のとき $f(2) = 24 - 6a$

$\sqrt{a} \leq 2$ のとき $f(\sqrt{a}) = 16 - 2a\sqrt{a}$

以上をまとめると，



$f(x)$ の $0 \leq x \leq 2$ における最大値は

$$\begin{cases} a \leq \frac{4}{3} \text{ のとき} & f(2) = 24 - 6a \\ a \geq \frac{4}{3} \text{ のとき} & f(0) = 16 \end{cases} \quad (\text{答})$$

$f(x)$ の $0 \leq x \leq 2$ における最小値は

$$\begin{cases} a \leq 0 \text{ のとき} & f(0) = 16 \\ 0 \leq a \leq 4 \text{ のとき} & f(\sqrt{a}) = 16 - 2a\sqrt{a} \\ a \geq 4 \text{ のとき} & f(2) = 24 - 6a \end{cases} \quad (\text{答})$$

- (2) 半径 1 の円に内接する三角形の頂点を P, Q, R とし, 辺 QR を固定すると
 「 $\triangle PQR$ の面積最大」 \iff 「頂点 P から辺 QR におろした垂線の長さ最大」
 $\iff PQ = PR$

であるから, 内接三角形の面積の最大値を求めるには, はじめから

$$PQ = PR$$

として一般性を失わない。

頂点 P から辺 QR におろした垂線の長さを $1+x$ とおくと

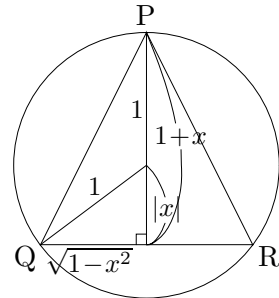
$$-1 < x < 1$$

であり, 図より $\triangle PQR$ は

底辺の長さ $2\sqrt{1-x^2}$, 高さ $1+x$

であるから, 面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1-x^2} \times (1+x) \\ &= \sqrt{(1-x^2)(1+x)^2} \\ &= \sqrt{(1-x)(1+x)^3} \end{aligned}$$



ここで,

$$f(x) = (1-x)(1+x)^3 = -(x-1)(x+1)^3$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(x+1)^3 - (x-1) \cdot 3(x+1)^2 \\ &= -(x+1)^2 \{(x+1) + 3(x-1)\} = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^2 \end{aligned}$$

$-1 < x < 1$ では $f'(x)$ は $-\left(x - \frac{1}{2}\right)$ と同符号であるから, $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極大かつ最大であり, 求める面積の最大値は

$$\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

- (注) 角の大きさを文字において面積 S を表すこともできるが, その場合は三角関数を微分することになって, 「多項式関数の微積分」のテーマからはずれてしまう。本問の考察により, 「円に内接する三角形で面積が最大のものは正三角形である」ことが証明された。

11 確認：関数の不等式の問題は，最大・最小の問題に帰着される。具体的には，
 区間 I でつねに $f(x) > 0 \iff I$ における $f(x)$ の最小値が正
 区間 I でつねに $f(x) < 0 \iff I$ における $f(x)$ の最大値が負
 と言い換えられる。式が両辺に分かれるときは，両辺の差をとった関数の増減を調べて 0 と比べることが基本である。(3) のように両辺が 0 となる x が存在するときは，微分係数を考えるという解法もある。

解答：

(1) $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ とおくと，

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 = (1+x)(1+x^2)$$

$f'(x)$ は $x+1 = x - (-1)$ と同符号であるから，

x	-1	
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

よって，

$$f(x) \geq f(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} > 0 \quad (\text{おわり})$$

(2) $f(x) = x^3 - a(x-1)$ において， $x \geq 0$ における最小値をまず求める。

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

(i) $a \leq 0$ のとき

つねに $f'(x) \geq 0$ であるから $f(x)$ は単調増加であり， $x \geq 0$ において

$$\text{最小値は } f(0) = a$$

(ii) $a > 0$ のとき

$$f'(x) = 3\left(x + \sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$$

$x \geq 0$ では $f'(x)$ は $x - \sqrt{\frac{a}{3}}$ と同符号であるから，

x	0	$\sqrt{\frac{a}{3}}$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

$$\text{最小値は } f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = a - \frac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}$$

題意の条件は， $x \geq 0$ における $f(x)$ の最小値が 0 以上であることと同値であり，

$$a \leq 0 \text{ のとき } f(0) = a \geq 0, \quad a > 0 \text{ のとき } a\left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}\right) \geq 0$$

$$a = 0 \text{ または } 0 < \sqrt{a} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{27}{4} \quad (\text{答})$$

(2)の別解： $x = t$ における $y = x^3$ の接線の方程式は

$$y = 3t^2(x - t) + t^3 \quad \therefore y = 3t^2x - 2t^3$$

この接線が点 $(1, 0)$ を通るとき

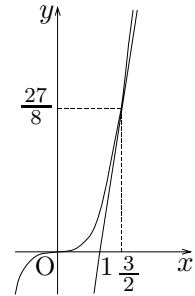
$$0 = 3t^2 - 2t^3 \quad \therefore t = 0 \text{ または } t = \frac{3}{2}$$

よって、点 $(1, 0)$ を通る $y = x^3$ の接線は

$$y = 0, \quad y = \frac{27}{4}(x - 1)$$

$y = x^3$ が $x \geq 0$ でつねに下に凸であることを注意すると、
 $x \geq 0$ でつねに $a(x - 1) \leq x^3$ が成り立つための条件は、
 図より

$$0 \leq a \leq \frac{27}{4} \quad (\text{答})$$



(3) $x = 1$ のとき両辺は0となって、 $x^3 - 1 \geq k(x - 1)$ は成り立つ。

$$x > 1 \text{ のとき } \frac{x^3 - 1}{x - 1} \geq k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x < 1 \text{ のとき } \frac{x^3 - 1}{x - 1} \leq k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ところで、 $f(x) = x^3$ とおくと、①より

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \geq k,$$

②より

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \leq k$$

であるから、 $f'(x) = 3x^2$ より

$$k = f'(1) = 3 \quad (\text{答})$$

12 確認：積分法は微分法とは独立に，しかも積分法は微分法より早く誕生したが，ここでは高校の授業と同じく，積分を微分の逆と定義されたものとして確認しよう。

関数 $f(x)$ に対して， $F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。 $f(x)$ に $F(x)$ とは別の原始関数 $G(x)$ があつたとすると，微分の線形性より

$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

が成り立つから， $G(x) - F(x)$ は定数であり，

$$G(x) = F(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

つまり，導関数と違って

原始関数は無数にあるが，それらは定数の差の違いでしかないということである。そこで，原始関数全体 $\{F(x) + C \mid C \text{ は定数}\}$ を一つのものとして扱うとき，それを $f(x)$ の不定積分と呼ぶことにして，記号では

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

と表す。このとき， C を積分定数という。また，不定積分 $\int f(x) dx$ に対して $f(x)$ を指すとき， $f(x)$ を被積分関数といい，不定積分を求めることを積分するという。

以上のように，積分を微分の逆と定義すると，微分法の公式がそのまま積分法の公式ということになり，自然数 n に対して

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad \int (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1} (x-a)^{n+1} + C$$

(C は積分定数)

が成り立つ。微分と同じように，積分も線形性

$$\int \{af(x) + bg(x)\} dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

が成り立つので，積分計算は各項ごとに行なえばよい。そこで，被積分関数が積の形をしているときは展開してから積分すればよいが，(ii)や(v)の場合はむやみに展開しない方がよい。ここでも，多項式の問題であることを忘れてはいけない。

解答：

$$(1) (i) \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C \quad (\text{答})$$

$$(ii) \int (x-2)^3 dx = \frac{1}{4} (x-2)^4 + C \quad (\text{答})$$

$$(iii) \int (7x^2 + 5x + 3) dx = \frac{7}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + 3x + C \quad (\text{答})$$

$$(iv) \int (x+1)(x+2) dx = \int (x^2 + 3x + 2) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 2x + C \quad (\text{答})$$

$$(v) \int (x+1)^2(x+2) dx = \int \{(x+1)^3 + (x+1)^2\} dx$$

$$= \frac{1}{4} (x+1)^4 + \frac{1}{3} (x+1)^3 + C \quad (\text{答})$$

(C はいずれも積分定数)

(注) 1° 積分定数は任意定数であることに注意する。たとえば, (ii)を展開してから積分すると

$$\begin{aligned}\int (x-2)^3 dx &= \int (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

となって, 一見定数項が上の解答と一致していないように見えるが, C が任意定数である以上, どちらも同じ式を表している。

2° (v)の被積分関数の変形は, $x+2$ を $x+1$ の式とみて

$$(x+1)^2(x+2) = (x+1)^2(x+1+1) = (x+1)^3 + (x+1)^2$$

としている。

(2) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ を積分して

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + c \quad (c \text{ は定数})$$

$f(1) = 1 - 2 + 5 + c = 1$ より $c = -3$ であるから, 求める関数 $f(x)$ は

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \quad (\text{答})$$

13 確認：積分法は，もともと面積や体積を求める理論（求積法）から発展したので，原始関数の差 $F(b) - F(a)$ を計算する（→ 15）ことに意味がある。12 で確認したように，原始関数はただ一つには定まらないが， $F(x)$ 以外の任意の原始関数 $G(x)$ は定数 C を用いて $G(x) = F(x) + C$ と表せる。

$$G(b) - G(a) = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a)$$

であるから，

原始関数の差 $F(b) - F(a)$ は原始関数のとり方によらないことがわかる。そこで， a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

により定義することができる。不定積分の場合と同様，このときの $f(x)$ を被積分関数という。定積分の値は原始関数のとり方によらないのだから，実際の計算では定数項が 0 である原始関数を選ぶのが一般的であり，たとえば

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

と計算する。

積分計算において多項式の性質の活用は既に述べたが，積分区間と被積分関数に特別な関係があるときには重要な公式が生まれる。(1)は結果が重要であるばかりではなく，公式を導く過程の変形も重要である。(2)の結果も重要公式であるが，偶関数・奇関数（→ 8）の性質と絡めて，図形的なイメージをしっかりとつかんでおこう。

(3)では定積分の定義と確認だけでなく，公式(1), (2)を使う練習も兼ねている。

$F'(x) = f(x)$ のとき一見 $|F(x)|' = |f(x)|$ と錯覚してしまいそうだが， $|f(x)|$ と $|F(x)|$ では絶対値の外れ方が同じ x の範囲に対応していないので，実は $|F(x)|$ は $|f(x)|$ の原始関数の一つではない。そこで，被積分関数に絶対値が入る場合は，定積分の性質

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

を利用して，絶対値の外れ方の境目で積分区間を分割して積分計算することになる。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \alpha + \alpha - \beta) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)(x - \alpha)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 + \frac{\alpha - \beta}{2}(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

(おわり)

$$(2) \int_{-a}^a x^n dx = \frac{a^{n+1} - (-a)^{n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{2}{n+1} a^{n+1} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(注) n が偶数のときは $\int_{-a}^a x^n dx = 2 \int_0^a x^n dx$

$$(3) (i) \int_1^2 (9x^2 + 8x + 7) dx = \left[3x^3 + 4x^2 + 7x \right]_1^2 \\ = 3(2^3 - 1^3) + 4(2^2 - 1^2) + 7(2 - 1) = 40 \quad (\text{答})$$

$$(ii) \int_{-1}^1 (x+2)(x+3) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 5x + 6) dx \\ = \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 5x dx + \int_{-1}^1 6 dx \\ = 2 \int_0^1 x^2 dx + 0 + 2 \int_0^1 6 dx \\ = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + 6x \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} + 6 \right) = \frac{38}{3} \quad (\text{答})$$

(注) 慣れれば $\int_{-1}^1 (x^2 + 5x + 6) dx = 2 \int_0^1 (x^2 + 6) dx$ とすればよい。

$$(iii) \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx \int_2^3 (x-2)(x-3) dx = -\frac{1}{6}(3-2)^3 = -\frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

$$(iv) \int_1^2 (x-1)^2(x+1) dx = \int_1^2 (x-1)^2(x-1+2) dx \\ = \int_1^2 \{(x-1)^3 + 2(x-1)^2\} dx \\ = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{2}{3}(x-1)^3 \right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12} \quad (\text{答})$$

(v) $|x(x-1)| = \begin{cases} x(x-1) = x^2 - x & (x \leq 0 \text{ または } x \geq 1) \\ -x(x-1) = -x^2 + x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ であるから,

$$\int_{-1}^2 |x(x-1)| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx - \int_0^1 x(x-1) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \frac{1}{6} + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\ = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} + \frac{2^3 - 1^3}{3} - \frac{2^2 - 1^2}{2} \\ = \frac{11}{6} \quad (\text{答})$$

14 確認：関数の表示に定積分が含まれる場合は，何らかの形でその定積分を計算することになるが，本問で取り上げる3つの考え方は基本として重要である。

- (1) $\int_0^2 f(t) dt$ のように積分の上端も下端も定数である定積分は，定積分の定義を考えれば，単なる定数になることがわかる。そこで，適当に

$$\int_0^2 f(t) dt = k$$

とでもおいて関数 $f(x)$ の式を見易くし，積分計算を実行して k についての条件を求める。この積分計算の意味するところは，見易くする意図とは別のところで

$$\int_0^2 (t^2 + k) dx = k$$

と勝手に2ヶ所に同じ文字 k をおいたことになるので，矛盾が起きないための条件を求める必要が生じたということである。ただし，その条件から k の値がただ一つに定まるとは限らず，

$$f(x) = 3x^2 - 2x + \int_0^1 f(t) dt$$

のように任意となることもある。(確かめてみよ。)

- (2) 定積分の定義を考えると，特殊な場合ではあるが

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

が成り立つ。実際， $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると，

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = F'(x) - 0 = f(x)$$

と確かめられる。この途中経過をよく見ると，積分して微分すると元に戻るといった単純なものではなく，

- 1° 被積分関数には積分変数以外の変数が入らないこと
- 2° 積分の上端は $x + (\text{定数})$ の形に限ること
- 3° 積分の下端は定数であること

という制約があることに気づく。

しかし，本問の前提条件さえそろえば効果を発揮する公式なので，適用範囲が狭い割には使える公式である。その使い方も含めてよく覚えておきたい。

- (3) 被積分関数に絶対値が入る場合は，絶対値をはずす場合分けと，その境目と定積分の積分区間の位置関係についての場合分けとの二重構造になる。その複雑さを回避するために，まず被積分関数のグラフをかくことにより，あたかも位置関係の場合分けだけ考えれば済むかのように処理するのがコツである。

解答：

$$(1) \quad \int_0^2 f(t) dt = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

とおくと、関数 $f(x)$ は

$$f(x) = x^2 + k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①に②を代入して

$$k = \int_0^2 (t^2 + k) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + kt \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2k \quad \therefore k = -\frac{8}{3}$$

②に代入して、求める関数は

$$f(x) = x^2 - \frac{8}{3} \quad (\text{答})$$

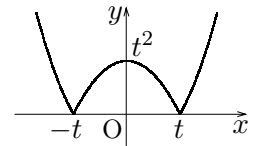
(2) $F'(x) = x - x^2 = -x(x - 1)$ の符号から、 $F(x)$ の増減は

x	0	1	
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↘	極小	↗

$$F(0) = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^0, \quad F(1) = 2 \left[-\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \text{ を計算して}$$

$$\text{極大値 } F(1) = -\frac{2}{3}, \quad \text{極小値は } F(0) = -\frac{5}{6} \quad (\text{答})$$

(3) xy 平面上に $y = |x^2 - t^2| = |(x+t)(x-t)|$ のグラフの概形をかくと右図のようになるから、 $0 \leq t \leq 1$ の場合と $1 \leq t \leq 2$ の場合に分けて定積分を計算する。



$0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t (t^2 - x^2) dx + \int_t^1 (x^2 - t^2) dx \\ &= \left[t^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - t^2x \right]_t^1 = \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$G'(t) = 4t^2 - 2t = 4t \left(t - \frac{1}{2} \right) \quad (t > 0 \text{ では } t - \frac{1}{2} \text{ と同符号})$$

$1 \leq t \leq 2$ のとき

$$G(t) = \int_0^1 (t^2 - x^2) dx = \left[t^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = t^2 - \frac{1}{3} \quad (t \geq 1 \text{ で増加})$$

以上より、 $0 \leq t \leq 2$ における $G(t)$ の増減をまとめると

t	0	$\frac{1}{2}$	2
$G'(t)$	0	-	+
$G(t)$	$\frac{1}{3}$	↘	↗

$$\therefore \begin{cases} \text{最大値 } G(2) = \frac{11}{3} \\ \text{最小値 } G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{答})$$

15 確認：積分を微分の逆と定義すると、確かに計算するには都合が良いが、面積量との結びつきの実感が乏しくなるという欠点もある。そうした不備を補って実感をつかまえるには、微分の逆がなぜ面積になるのかを証明しておく必要がある。

われわれは既に何年も数学を学んでいるが、面積については事実上「タテ × ヨコが長方形の面積」ということしか知らない。そこで、微小区間における最大値、最小値をそれぞれ高さとする長方形で評価してハサミウチを行なうことで、境界を表す関数と面積関数との関係を導くことになる。証明の詳細は(1)の解答を参照してもらうことにするが、証明の中で「 $f(x)$ が多項式」という仮定は

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t+h) = f(t)$$

が成り立つことに用いているだけである。したがって、(1)の結果は多項式関数だけでなく、一般に連続関数についても成り立つので、絶対値で表される関数や(今回は扱わない)三角関数、指数関数などにも適用できる。

(1)の結果だけでは実用的ではないので、一般公式も確かめておこう。つまり、(1)の結果(下の解答の証明)を認めて、連続関数 $f(x)$, $g(x)$ (さしあたり多項式関数と思ってよい)に対して、領域 $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq g(x)$ の面積 S が

$$S = \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx$$

となることも証明しておこうというのである。適当な正の定数 k をとれば、

$$a \leq x \leq b \text{ でつねに } 0 \leq f(x) + k \leq g(x) + k$$

とすることができる。(1)の結果より

$$a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) + k \text{ の面積は } \int_a^b \{f(x) + k\} dx$$

$$a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x) + k \text{ の面積は } \int_a^b \{g(x) + k\} dx$$

領域 $a \leq x \leq b$, $f(x) + k \leq y \leq g(x) + k$ に平行移動しても面積は変わらないから、

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{g(x) + k\} dx - \int_a^b \{f(x) + k\} dx \\ &= \int_a^b \{g(x) + k - f(x) - k\} dx \quad (\text{定積分の線形性}) \\ &= \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx \end{aligned}$$

この公式の意味するところは衝撃的であり、面積は領域と x 軸との位置関係や境界線の式には依存せず、差の関数 $y = g(x) - f(x)$ のグラフと x 軸とではさまれる領域の面積に等しいことを物語っている。

今回は、ファイルボリュームの関係から「体積」について詳細は省略するが、理論的には面積と全く同様なので各自で確かめてほしい。せめて、円錐の体積公式になぜ $\frac{1}{3}$ がつくのかぐらいは、きちんと説明できるようにしたい。「入試には証明が出ない」とか訳の分からないことを言っていると、いつまでも基礎が身につかない破目になる。

解答：

- (1) 適当な定数 $c (\leq a)$ をとり、領域 $c \leq x \leq t$, $0 \leq y \leq f(x)$ の面積を $S(t)$ とおく。
 $|h|$ を十分小さくとり、 $t - |h| < x < t$ および $t < x < t + |h|$ には $f(x)$ の極値が存在しないようにすることができる。すると、 $t \leq x \leq t + h$ または $t + h \leq x \leq t$ において $f(t)$, $f(t + h)$ の一方が最大値、他方が最小値となる。

よって、微小面積 $S(t + h) - S(t)$ を長方形の面積で評価すると、

$$hf(t) \leq S(t + h) - S(t) \leq hf(t + h)$$

$$\therefore f(t) \leq \frac{S(t + h) - S(t)}{h} \leq f(t + h)$$

$f(t)$ は多項式関数で(連続で)あるから、ハサミウチの原理より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t + h) - S(t)}{h} = f(t)$$

これは $S'(x) = f(x)$ であることを意味するから、 $S(x)$ は $f(x)$ の原始関数の一つであり、領域 $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ の面積 S は

$$S = S(b) - S(a) = F(b) - F(a) \quad (\text{おわり})$$

- (2) $x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1 > 0$ であることに注意すると、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x^4 - 2x^2 + 2) dx &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_1^3 \\ &= \frac{243 - 1}{5} - \frac{2}{3}(27 - 1) + 2(3 - 1) \\ &= \frac{726 - 260 + 60}{15} = \frac{526}{15} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (3) $|x| = -x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$ とおくと、

$$x \leq 0 \text{ のとき } x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{10}{3} = (x + 1)\left(x - \frac{10}{3}\right) = 0 \quad \therefore x = -1$$

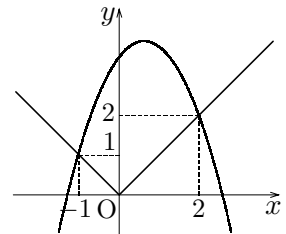
$$x \geq 0 \text{ のとき } x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} = (x - 2)\left(x + \frac{5}{3}\right) = 0 \quad \therefore x = 2$$

よって、題意の図形は $-1 \leq x \leq 2$ の範囲にあり、その範囲において

$$|x| \leq -x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

であるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \left(-x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} - |x| \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x \right]_{-1}^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \\ &= \frac{-2^3 + (-1)^3}{3} + \frac{2}{3} \{2^2 - (-1)^2\} + \frac{10}{3} \{2 - (-1)\} - \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{13}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



16 確認：面積の求め方としては 15 と同じであるが，被積分関数が 2 次式の場合は判別式の利用や 13(1) の公式など，微積分以外のところで注目すべきことが多い。

- (1) 公式 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ を用いる。
- (2) 5 で確認したように，接線と差をとった多項式は平方因数をもつので，それを活かして積分計算する。2 接点を結ぶ線分についても，2 接点の座標が 2 次方程式の解になることに注意して，被積分関数だけ求めるとよい。
- (3) 共通接線の求め方は既に 5(3) で確認した。(2)と同様，平方因数に注意する。

解答：

- (1) 点 (1, 3) を通る直線の方程式は

$$y = m(x - 1) + 3$$

と書ける。 $2x^2 = m(x - 1) + 3$ とおくと

$$2x^2 - mx + (m - 3) = 0$$

解の公式より

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m + 24}}{4}$$

$m^2 - 8m + 24 = (m - 4)^2 + 8 > 0$ よりこの 2 解はともに実数であり，

$$\alpha = \frac{m - \sqrt{m^2 - 8m + 24}}{4}, \quad \beta = \frac{m + \sqrt{m^2 - 8m + 24}}{4}$$

とおくと，題意の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{m(x - 1) + 3 - 2x^2\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{-2}{-6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{m^2 - 8m + 24}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{24} (m^2 - 8m + 24)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{24} \{(m - 4)^2 + 8\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

よって，面積 S は

$$m = 4 \text{ のとき 最大値 } \frac{8^{\frac{3}{2}}}{24} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答})$$

(2) $x = t$ における $y = 2x^2$ の接線の方程式は

$$y = 4t(x - t) + 2t^2 \quad \therefore y = 4tx - 2t^2$$

点 $(1, -2)$ を通るとすれば,

$$-2 = 4t \cdot 1 - 2t^2$$

$$2t^2 - 4t - 2 = 2(t^2 - 2t - 1) = 0 \quad \therefore t = 1 \pm \sqrt{2}$$

ここで, $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^1 \{2x^2 - (4ax - 2a^2)\} dx + \int_1^b \{2x^2 - (4bx - 2b^2)\} dx \\ &= 2 \int_a^1 (x - a)^2 dx + 2 \int_1^b (x - b)^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_a^1 + 2 \left[\frac{1}{3}(x - b)^3 \right]_1^b \\ &= \frac{2}{3}(1 - a)^3 - \frac{2}{3}(1 - b)^3 = \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 - \frac{2}{3}(-\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

2点 $(a, 2a^2)$, $(b, 2b^2)$ を通る直線の方程式を $y = px + q$ とおくと, 面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^b (px + q - 2x^2) dx \\ &= -2 \int_a^b (x - a)(x - b) dx \\ &= \frac{-2}{-6}(b - a)^3 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $x = t$ における $y = x^2 - x$ の接線の方程式は

$$y = (2t - 1)(x - t) + t^2 - t \quad \therefore y = (2t - 1)x - t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = u$ における $y = x^2 - 3x + 3$ の接線の方程式は

$$y = (2u - 3)(x - u) + u^2 - 3u + 3$$

$$\therefore y = (2u - 3)x - u^2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①と②が同一直線になるための条件を考えて

$$\begin{cases} 2t - 1 = 2u - 3 \\ -t^2 = -u^2 + 3 \end{cases} \quad \therefore t = 1, u = 2$$

よって, 共通接線の方程式は

$$y = x - 1$$

2つの放物線は $x = \frac{3}{2}$ で交わることを考えて, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{3}{2}} \{(x^2 - x) - (x - 1)\} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \{(x^2 - 3x + 3) - (x - 1)\} dx \\ &= \int_1^{\frac{3}{2}} (x - 1)^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (x - 2)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - 1)^3 \right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x - 2)^3 \right]_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1}{12} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

17 確認：3次，4次と次数が上がっても，面積の求め方に変わりはないが，計算量が増えてくるのは確かである。15(2)のような場合は仕方がないにしても，多項式の性質を活かす工夫を忘れてはいけない。

5で確認した接線と平方因数の関係，7(2)で確認した点対称性，8(2)で確認した複接線と恒等式，13(3)(iv)で行なった積分計算の工夫，といったさまざまな基本事項がここに集約されることになる。

解答：

(1) C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (x-1)^3 + 4 & \therefore y &= x^3 - 3x^2 + 3x + 3 \\ x^3 - 3x^2 + 3x + 3 &= x^3 \text{とおくと,} \\ -3(x^2 - x - 1) &= 0 & \therefore x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

したがって，

$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

とおくと $(x-1)^3 + 4 - x^3 = -3(x-a)(x-b)$ と変形されるから，求める面積は

$$\begin{aligned} \int_a^b \{(x-1)^3 + 4 - x^3\} dx &= -3 \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{-3}{-6} (b-a)^3 = \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $x = \frac{1}{3}$ における C の接線の方程式は

$$y = \left\{ 9\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \right\} \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{9} \quad \therefore y = 3x - \frac{2}{9}$$

$$f(x) = 3x^3 + 2x - \left(3x - \frac{2}{9}\right) \text{とおくと}$$

$$f(x) = 3x^3 - x + \frac{2}{9} = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \left(x + \frac{2}{3}\right)$$

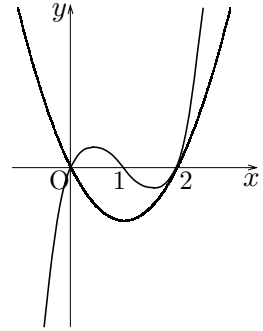
よって，求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx &= \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \left\{ 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right)^4 + \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 \right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{3}{4}(-1)^4 - (-1)^3 \\ &= \frac{1}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $g(x) = x(x-1)(x-2) - x(x-2) = x(x-2)^2$ とおく。

図より 2 曲線の上下関係に注意すると、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx &= \int_0^2 \{(x-2)^3 + 2(x-2)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-2)^4 + \frac{2}{3}(x-2)^3 \right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 \\ &= \frac{4}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(3)の別法：曲線 $y = x(x-1)(x-2)$ が点 $(1, 0)$ に関して対称であることに注意すると、求める面積は放物線 $y = x(x-2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積と等しく、

$$\int_0^2 \{-x(x-2)\} dx = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$

(4) 直線 $y = ax + b$ が曲線 C と $x = \alpha$ および $x = \beta$ で接するとすれば、 x の恒等式

$$(ax + b) - (-x^4 + 4x^2 + 4x + 1) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

が成り立つ。展開して係数を比べると

$$\begin{cases} 0 = -2\alpha - 2\beta & \dots\dots \text{①} \\ -4 = \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 & \dots\dots \text{②} \\ a - 4 = -2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 & \dots\dots \text{③} \\ b - 1 = \alpha^2\beta^2 & \dots\dots \text{④} \end{cases}$$

①より $\alpha + \beta = 0$ 、②より

$$\alpha\beta = \frac{-4 - (\alpha + \beta)^2}{2} = -2$$

であるから、 α, β を 2 解とする 2 次方程式は $x^2 - 2 = 0$ であり、

$$\alpha, \beta = \pm\sqrt{2}$$

③、④より直線 $y = ax + b$ は確定するから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \{(ax + b) - (-x^4 + 4x^2 + 4x + 1)\} dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x + \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \{(x + \sqrt{2})^4 - 4\sqrt{2}(x + \sqrt{2})^3 + 8(x + \sqrt{2})^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{5}(x + \sqrt{2})^5 - \sqrt{2}(x + \sqrt{2})^4 + \frac{8}{3}(x + \sqrt{2})^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= (2\sqrt{2})^3 \left(\frac{8}{5} - 4 + \frac{8}{3} \right) = 16\sqrt{2} \cdot \frac{24 - 60 + 40}{15} = \frac{64\sqrt{2}}{15} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

18 確認：等積条件の問題も面積の求め方さえわかれば解けるのだが，つぎの2つの解法はおさえておきたい。

(1) $S_1 = S_2$ を $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ とみる。

(2) 2つの領域が共通の2曲線ではさまれている場合，

$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_b^c \{g(x) - f(x)\} dx \iff \int_a^c \{f(x) - g(x)\} dx = 0$$

であることに注目して見通し良く計算する。

解答：

(1) $y = 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{1}{6}(2 - 0)^3 = \frac{4}{3}$$

$y = 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた部分を $y = ax$ が2つの部分に分けるには $0 < a < 2$

が必要であり，このもとで $y = 2x - x^2$ と $y = ax$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^{2-a} (2x - x^2 - ax) dx = \frac{1}{6}(2 - a)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$(2 - a)^3 = 4 \quad \therefore a = 2 - \sqrt[3]{4} \quad (\text{答})$$

(2) x 軸と異なる3点で交わるという条件より，2次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad (a > 0, b > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

は0でない異なる2実数解をもつから，

$$a^2 - 4b > 0 \quad (\text{かつ } b \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

その2実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると，

$$\alpha + \beta = a > 0, \quad \alpha\beta = b > 0$$

よりともに正の値であり，

$$x^3 - ax^2 + bx = x(x - \alpha)(x - \beta), \quad 0 < \alpha < \beta$$

と表される。このとき，題意の条件は

$$\int_0^\beta (x^3 - ax^2 + bx) dx = \frac{1}{4}\beta^4 - \frac{a}{3}\beta^3 + \frac{b}{2}\beta^2 = 0$$

$\beta \neq 0$ を考えて，両辺 β^2 で割って12をかけると

$$3\beta^2 - 4a\beta + 6b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

β は方程式①の解であるから，

$$\beta^2 - a\beta + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③かつ④を β と β^2 についての連立方程式とみて解くと

$$\beta = \frac{3b}{a}, \quad \beta^2 = 2b$$

β を消去して，②を考えあわせると

$$b = \frac{2}{9}a^2 \quad (a > 0, b > 0) \quad (\text{答})$$