

I

G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$$

$$|\overrightarrow{OG}| = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad (\mathcal{A})$$

H は $\triangle ACD$ の重心であるから

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{3}(-1, 1, 1), \quad |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OH} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \{1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 1\} = \frac{1}{9}$$

$$\cos \angle GOH = \frac{\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OH}}{|\overrightarrow{OG}| |\overrightarrow{OH}|} = \boxed{\frac{1}{3}} \quad (\mathcal{I})$$

正八面体 ABCDEF の各面の重心

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \\ & \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

を頂点とする正多面体は 正六面体 である。

(ウ)

 $\triangle ABC$ の外接円の半径 R は, 正弦定理より

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

条件(1), (2)より

$$A' \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 0 \right)$$

条件(3)を考えると, xy 平面上で A', B', C' は時計まわりの順に並び, 条件(1)より

$$\overrightarrow{OB'} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\cos(-120^\circ), \sin(-120^\circ), 0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{OC'} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\cos 120^\circ, \sin 120^\circ, 0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

 $B'C'D'E'$ は正方形であるから

$$D' \left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}, z \right), \quad E' \left(x, -\frac{1}{\sqrt{2}}, z \right)$$

と表され, $A'D' = C'D' = \sqrt{2}$ より

$$\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 + \frac{1}{2} + z^2 = 2$$

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 0 + z^2 = 2$$

辺々引くと

$$\left(\frac{2}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)x + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sqrt{6}x - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

第2式に代入して

$$z^2 = 2 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{3} \quad \therefore z = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

点 D' , E' の座標は

$$D' \left(\boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}}, \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}} \right), \quad E' \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

(工) (オ) (カ) (キ)

正方形 $B'C'D'E'$ の対角線の交点 O' は, $B'D'$ の中点として

$$O' \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

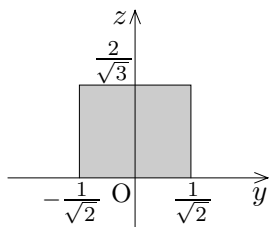
F' は $A'O'$ を 2:1 に外分するから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF'} &= \frac{-\overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{OO'}}{2-1} = -\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, 0\right) + 2\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(\boxed{-\sqrt{\frac{2}{3}}}, 0, \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \end{aligned}$$

(ク)

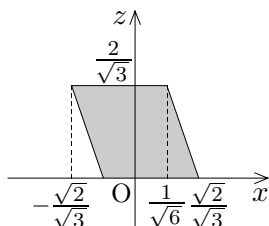
正八面体 $A'B'C'D'E'F'$ を z 軸方向から見ると, 輪郭は正六角形である。

x 軸方向から見ると



輪郭は 正方形でない長方形 である。
(ケ)

y 軸方向から見ると



$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2$$

に注意すると, 輪郭は ひし形 である。
(コ)

II

部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx &= \left[\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x dx \\ &\stackrel{(\text{シ})}{=} \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{(1+x)^2} dx \\ &\stackrel{(\text{サ})}{=} \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx \right| &= \frac{1}{n\pi} \left| \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{(1+x)^2} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \frac{|\sin n\pi x|}{(1+x)^2} dx \\ &\leq \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &\leq \frac{1}{n\pi} \int_0^1 dx = \frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0$ であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx = \boxed{0} \quad (\text{ス})$$

$\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とするとき

$$\frac{|\cos n\pi x|}{1 + \frac{k}{n}} \leq \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} \leq \frac{|\cos n\pi x|}{1 + \frac{k-1}{n}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |\cos n\pi x| dx &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\cos \theta| \left(\frac{\theta}{n\pi} \right)' d\theta \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi |\cos \theta| d\theta \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boxed{\frac{2}{n\pi}} \quad (\text{セ}) \end{aligned}$$

であるから, ①より

$$\frac{\frac{2}{n\pi}}{1 + \frac{k}{n}} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx \leq \frac{\frac{2}{n\pi}}{1 + \frac{k-1}{n}}$$

辺々加えると

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \leq \int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n}} \dots\dots \textcircled{2}$$

区分求積法により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 \boxed{\frac{2}{\pi(1+x)}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\log(1+x) \right]_0^1 \quad (\text{ソ}) \\ &= \frac{2 \log 2}{\pi} \end{aligned}$$

であるから, ②においてハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx = \boxed{\frac{2 \log 2}{\pi}} \quad (\text{タ})$$

III

(1) C の方程式 $y = x^3 - 3x$ と ℓ の方程式 $y = k(x - a) + a^3 - 3a$ とを連立して y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^3 - 3x - k(x - a) + a^3 - 3a &= 0 \\ (x - a)(x^2 + ax + a^2) - 3(x - a) - k(x - a) &= 0 \\ (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3 - k) &= 0 \end{aligned}$$

C と ℓ が 3 点で交わるための条件は, x の 2 次方程式

$$x^2 + ax + (a^2 - 3 - k) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が a でない相異なる 2 実数解をもつことであり,

$$\begin{cases} (\text{判別式}) = a^2 - 4(a^2 - 3 - k) = 4(k + 3) - 3a^2 > 0 \\ a^2 + a \cdot a + (a^2 - 3 - k) = 3a^2 - 3 - k \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{3}{4}a^2 - 3 < k < 3a^2 - 3 \quad \text{または} \quad k > 3a^2 - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad (\text{答})$$

(2) ②のもとで, 2 次方程式①の 2 解が x_1, x_2 であるから

$$x_1 + x_2 = -a \quad \text{かつ} \quad x_1x_2 = a^2 - 3 - k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$x_1 < 0$ かつ $x_2 < 0$ より

$$(-a < 0 \text{ かつ}) \quad a^2 - 3 - k > 0 \quad \therefore k < a^2 - 3$$

②も考えて

$$\frac{3}{4}a^2 - 3 < k < a^2 - 3 \quad (\text{答})$$

(3) $a = \sqrt{3}$ のとき, (2)より

$$-\frac{3}{4} < k < 0$$

③より

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{3} \quad \text{かつ} \quad x_1x_2 = -k$$

であるから, $y_1 = x_1^3 - 3x_1$, $y_2 = x_2^3 - 3x_2$ も考えて, $\triangle OQR$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1| \\ &= \frac{1}{2} |x_1(x_2^3 - 3x_2) - x_2(x_1^3 - 3x_1)| \\ &= \frac{1}{2} |x_1x_2(x_2^2 - 3 - x_1^2 + 3)| \\ &= \frac{1}{2} |x_1x_2(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)| \\ &= \frac{1}{2} |x_1x_2| |x_1 + x_2| \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{1}{2} (-k) \sqrt{3} \sqrt{3 - 4(-k)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}k\sqrt{4k+3} \quad (\text{答})$$

(4) (3)より

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{k^2(4k+3)}$$

であることを考えて,

$$f(k) = k^2(4k+3) = 4k^3 + 3k^2$$

とおくと,

$$f'(k) = 12k^2 + 6k = 12k\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

k	$\left(-\frac{3}{4}\right)$	$-\frac{1}{2}$	(0)
$f'(k)$		+	0 -
$f(k)$		↗	極大 ↘

$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{f(k)}$ の最大値は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{f\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (\text{答})$$

IV

(1) $f(x) = e^x$, $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ が

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a), \quad g''(a) = f''(a)$$

をすべて満たすとき

$$Aa^2 + Ba + C = e^a$$

$$2Aa + B = e^a$$

$$2A = e^a$$

であるから, 連立方程式を解いて

$$A = \frac{1}{2}e^a$$

$$B = e^a - 2Aa = (1 - a)e^a$$

$$C = e^a - \frac{1}{2}e^a \cdot a^2 - (1 - a)e^a \cdot a = \left(\frac{1}{2}a^2 - a + 1\right)e^a$$

(答)

(2) (1)のとき

$$-\frac{B}{2A} = -\frac{(1-a)e^a}{e^a} = a - 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - B^2}{4A} + C &= \frac{1 - (1-a)^2 e^{2a}}{2e^a} + \left(\frac{1}{2}a^2 - a + 1\right)e^a \\ &= \frac{1}{2}e^{-a} + \left\{-\frac{(1-a)^2}{2} + \frac{1}{2}a^2 - a + 1\right\}e^a \\ &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \end{aligned}$$

焦点 F の座標は

$$\left(a - 1, \frac{e^a + e^{-a}}{2}\right) \quad (\text{答})$$

(3) $\overrightarrow{FR} = (a, e^a) - \left(a - 1, \frac{e^a + e^{-a}}{2}\right) = \left(1, \frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)$

より,

直線 FR の傾きは $\frac{e^a - e^{-a}}{2}$

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より}$$

$$e^{2p} + \frac{2}{\sqrt{3}}e^p - 1 = 0$$

$$\left(e^p + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$e^p + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$e^p = \frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore p = -\frac{1}{2} \log 3 \quad (\text{答})$$

$$\frac{e^q - e^{-q}}{2} = 0 \quad \text{より}$$

$$q = 0 \quad (\text{答})$$

(4) $F(x, y)$ とおくと,

$$x = a - 1, \quad y = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2}\right)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{e^a}{2} \cdot \frac{e^{-a}}{2} + \left(\frac{e^a}{2} - \frac{e^{-a}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$p \leq a \leq q$ において焦点 F が描く曲線の長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_p^q \sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2} da \\ &= \int_p^q \frac{e^a + e^{-a}}{2} da \\ &= \left[\frac{e^a - e^{-a}}{2} \right]_p^q \\ &= \frac{e^q - e^{-q}}{2} - \frac{e^p - e^{-p}}{2} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$