

I

$$0 \leq \arg \beta < \frac{2\pi}{3} \text{ より}$$

$$0 \leq \arg \beta^3 = 3 \arg \beta < 2\pi$$

$$\beta^3 = \alpha = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \text{ より}$$

$$3 \arg \beta = \theta \quad \therefore \arg \beta = \boxed{\frac{\theta}{3}} \text{ (ア)}$$

$$\frac{4\pi}{3} \leq \arg \gamma < 2\pi \text{ より}$$

$$4\pi \leq \arg \gamma^3 < 6\pi$$

$$\gamma^3 = \alpha \text{ より}$$

$$3 \arg \gamma - 4\pi = \theta \quad \therefore \arg \gamma = \boxed{\frac{\theta + 4\pi}{3}} \text{ (イ)}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \text{ より}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \arg \gamma \leq \frac{11\pi}{6} \quad \therefore \arg \beta < \arg \alpha < \arg \gamma$$

$$\arg \gamma - \arg \alpha = \frac{\theta + 4\pi}{3} - \theta = \frac{4\pi - 2\theta}{3} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \arg \gamma - \arg \alpha \leq \pi$$

であるから，原点 O が $\triangle PQR$ の内部にあることに注意すると，面積 S は

$$S = \triangle OPQ + \triangle OQR + \triangle ORP$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\left(\theta - \frac{\theta}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\left(\frac{\theta + 4\pi}{3} - \theta\right) \\ + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{3} + 2\pi - \frac{\theta + 4\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \frac{2\theta}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi - 2\theta}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \frac{2\theta}{3} + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{2\theta}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} \sin \frac{2\theta}{3} \right) + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \frac{2\theta}{3} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{2\theta}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\theta}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \boxed{\frac{3}{4} \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \frac{2\theta}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(ウ)

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{2\theta}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\theta}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sin \frac{2\theta}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{2\theta}{3} \sin \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{2\theta}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{2\theta}{3} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$$

であるから,

$$\frac{2\theta}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ または } \frac{5\pi}{6} \text{ のとき最小値 } \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

(工)

$$\frac{2\theta}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ すなわち } \theta = \boxed{\frac{\pi}{2}} \text{ のとき最大値 } \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

(オ) (カ)

をとる。

II

$x > 0$ において

$$F'(x) = e^{-ax} \sin x$$

は $\sin x$ と符号変化が同じであり,

$$x = (2n-1)\pi \text{ で } + \rightarrow -, \quad x = 2n\pi \text{ で } - \rightarrow +$$

となるから,

$$F(x) \text{ は } x = (2n-1)\pi \text{ で極大, } x = 2n\pi \text{ で極大}$$

となる。

部分積分法により

$$\begin{aligned} F(\pi) &= \left[-\frac{1}{a} e^{-at} \sin t \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{1}{a} e^{-at} \cos t \right) dt \\ &= 0 + \int_0^\pi \boxed{\frac{1}{a} e^{-at} \cos t} dt \quad (\text{キ}) \\ &= \left[\boxed{-\frac{1}{a^2} e^{-at} \cos t} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \boxed{\frac{1}{a^2}} e^{-at} \sin t dt \quad (\text{ク}) \quad (\text{ケ}) \\ &= \frac{e^{-a\pi} + 1}{a^2} - \frac{1}{a^2} F(\pi) \\ \therefore F(\pi) &= \boxed{\frac{e^{-a\pi} + 1}{a^2 + 1}} \quad (\text{コ}) \end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned} S_n = F(n\pi) &= \left[-\frac{1}{a^2} e^{-at} \cos t \right]_0^{n\pi} - \frac{1}{a^2} \int_0^{n\pi} e^{-at} \sin t dt \\ &= \frac{1 - e^{-an\pi} (-1)^n}{a^2} - \frac{1}{a^2} S_n \\ \therefore S_n &= \boxed{\frac{1 - (-e^{-a\pi})^n}{a^2 + 1}} \quad (\text{シ}) \end{aligned}$$

この結果,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1 - (-e^{-a\pi})^{n+1} - \{1 - (-e^{-a\pi})^n\}}{a^2 + 1} = \frac{(-e^{-a\pi})^n (1 + e^{-a\pi})}{a^2 + 1}$$

となるから, $\{S_{n+1} - S_n\}$ は公比 $\boxed{-e^{-a\pi}}$ の等比数列であることがわかる。
(サ)

$$|-e^{-a\pi}| = e^{-a\pi} < 1 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-e^{-a\pi})^n = 0$$

であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{\frac{1}{a^2 + 1}} \quad (\text{ス})$$

$F(x)$ の増減を考えると,

$$(2n - 1)\pi \leq x \leq 2n\pi \text{ において } S_{2n-1} \geq F(x) \geq S_{2n}$$

$$2n\pi \leq x \leq (2n + 1)\pi \text{ において } S_{2n} \leq F(x) \leq S_{2n+1}$$

であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{a^2 + 1}$$

(注) 問題文の指示通りに S_n を求めることもできるが, 実際その通りに解いてみると, 積分計算を新たにやり直した上に階差型の漸化式を解くことになって, かなり遠回りになる。

III

(1) 点と直線の距離公式より

$$a = \frac{|k \cdot 1 - 0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$b = \frac{|k \cdot 2 - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$c = \frac{|k \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

であるから,

$$F = a^2 + b^2 + c^2$$

$$= \frac{k^2 + (2k - 1)^2 + (k + 3)^2}{k^2 + 1}$$

$$= \frac{6k^2 + 2k + 10}{k^2 + 1} \quad (\text{答})$$

$$= 6 + \frac{2(k + 2)}{k^2 + 1}$$

(2) F を k の関数とみて微分すると

$$\frac{dF}{dk} = 2 \cdot \frac{1 \cdot (k^2 + 1) - (k + 2) \cdot 2k}{(k^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-2(k^2 + 4k - 1)}{(k^2 + 1)^2} = \frac{-2(k + 2 + \sqrt{5})(k + 2 - \sqrt{5})}{(k^2 + 1)^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} F = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \left(6 + \frac{2 + \frac{4}{k}}{k + \frac{1}{k}} \right) = 6$$

k	$(-\infty)$	$-2 - \sqrt{5}$	$-2 + \sqrt{5}$	(∞)			
$\frac{dF}{dk}$	-	0	+	0	-		
F	(6)	\searrow	極小	\nearrow	極大	\searrow	(6)

よって, F を最小にする k の値 m と最大にする k の値 M は

$$m = -2 - \sqrt{5}, \quad M = -2 + \sqrt{5} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\overrightarrow{OA}' = (1^2 - 0^2, 2 \times 1 \times 0) = (1, 0)$$

$$\overrightarrow{OB}' = (2^2 - 1^2, 2 \times 2 \times 1) = (3, 4)$$

$$\overrightarrow{OC}' = ((-1)^2 - 3^2, 2 \times (-1) \times 3) = (-8, -6)$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}' + \overrightarrow{OB}' + \overrightarrow{OC}') = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$P(u, v)$ が $y = kx$ 上にあるとき

$$v = ku$$

$$u^2 - v^2 = u^2 - (ku)^2 = (1 - k^2)u^2$$

$$2uv = 2ku^2$$

$k^2 + 4k - 1 = 0$ のとき

$$1 - k^2 = 2 \cdot 2k$$

であるから, $P(u, v)$ が $y = mx$ 上または $y = Mx$ 上にあるとき, $P'(u^2 - v^2, 2uv)$ は直線 $OH: x = 2y$ 上にある。

(証明おわり)

IV

$$(1) \quad (x \log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

点 P の x 座標を t (≥ 1) とおくと, C_1 と C_2 が P において接するための条件は

$$\begin{cases} at^3 = t \log t & \dots\dots \textcircled{1} \\ 3at^2 = \log t + 1 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① および $t \geq 1$ より

$$at^2 = \log t$$

② に代入して

$$3 \log t = \log t + 1$$

$$\log t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = e^{\frac{1}{2}}$$

① に代入して

$$P\left(\sqrt{e}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right), \quad a = \frac{1}{2e} \quad (\text{答})$$

(2) $x \geq 1$ において

$$\frac{1}{2e}x^3 = x \log x \iff \frac{1}{2e} = \frac{\log x}{x^2}$$

であることを考え,

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

とおくと,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\log x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$$

$x > 1$ において

$$f'(x) > 0 \iff 1 - 2 \log x > 0$$

$$\iff \log x < \frac{1}{2} = \log e^{\frac{1}{2}} \iff x < e^{\frac{1}{2}}$$

であるから, $f(x)$ の増減は

x	1	$e^{\frac{1}{2}}$	(∞)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	↗ 極大 ↘	(0)

よって, $x \neq e^{\frac{1}{2}}$ のとき

$$f(x) < f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2e}$$

であるから, C_1 と C_2 は P 以外に共有点をもたない。

(証明おわり)

(3) (2)より, $x \geq 1$ でつねに

$$\frac{\log x}{x^2} \leq \frac{1}{2e}$$

であるから,

$$x \log x \leq \frac{1}{2e} x^3$$

C_1, C_2 および x 軸で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} x^3 dx - \int_1^{\sqrt{e}} x \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{8e} x^4 \right]_0^{\sqrt{e}} - \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e}{8} - \frac{e}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{e}{8} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} (e - 1) \\ &= \frac{e - 2}{8} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$