

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解
用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

O を原点とする座標空間において、6 個の点

$$A(0, 0, 1), B(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D(-1, 0, 0), E(0, -1, 0), F(0, 0, -1)$$

を頂点とする正八面体を考える。 $\triangle ABC$ の重心を G 、 $\triangle ACD$ の重心を H とすると、
線分 OG の長さは $\boxed{\text{ア}}$ であり、 $\cos \angle GOH = \boxed{\text{イ}}$ である。また、正八面
体 $ABCDEF$ の各面の重心を頂点とする正多面体は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

次に、この正八面体を回転と平行移動によって空間の中で動かし、頂点 $A, B, C,$
 D, E, F がそれぞれ点 A', B', C', D', E', F' に、 G が G' に移ったとする。た
だし、移動後の正八面体 $A'B'C'D'E'F'$ は以下の3条件を満たすものとする。

- (1) 点 G' は原点 O である。
- (2) 3 頂点 A', B', C' の z 座標は 0 である。 A' は y 座標も 0 で、 x 座標は正で
ある。
- (3) 3 頂点 D', E', F' の z 座標はすべて正である。

このとき、3 点 D', E', F' の座標は、それぞれ

$$D'(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$$

$$E'(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{カ}})$$

$$F'(\boxed{\text{ク}}, 0, \boxed{\text{カ}})$$

である。正八面体 $A'B'C'D'E'F'$ を真上の z 軸方向から見ると、その輪郭は正六角形
であり、 x 軸方向から見た輪郭は $\boxed{\text{ケ}}$ 、 y 軸方向から見た輪郭は $\boxed{\text{コ}}$ で
ある。

(解答群省略)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解
 用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

自然数 n を限りなく大きくするとき、定積分 $\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx$ と $\int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx$
 がどのような値に近づくかを調べる。まず、部分積分法を用いると

$$\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx = \boxed{\text{サ}} \int_0^1 \frac{\boxed{\text{シ}}}{(1+x)^2} dx$$

である。右辺の絶対値について、被積分関数の絶対値は1以下であるから、

$$\boxed{\text{サ}} \left| \int_0^1 \frac{\boxed{\text{シ}}}{(1+x)^2} dx \right| \leq \boxed{\text{サ}}$$

が成り立ち、

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx = \boxed{\text{ス}}$$

が得られる。

次に、 $k = 1, 2, \dots, n$ とする。 $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ のとき

$$\frac{|\cos n\pi x|}{1 + \frac{k}{n}} \leq \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} \leq \frac{|\cos n\pi x|}{1 + \frac{k-1}{n}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である。ここで、

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |\cos n\pi x| dx = \boxed{\text{セ}}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ の各辺を $x = \frac{k-1}{n}$ から $x = \frac{k}{n}$ まで積分し、 k について1から n
 までの和をとれば、

$$\sum_{k=1}^n \frac{\boxed{\text{セ}}}{1 + \frac{k}{n}} \leq \int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{\boxed{\text{セ}}}{1 + \frac{k-1}{n}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{2}$ において $n \rightarrow \infty$ とすると、左辺と右辺はともに

$$\int_0^1 \boxed{\text{ソ}} dx$$

に収束する。この値を計算して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx = \boxed{\text{タ}}$$

が得られる。

(解答群省略)

III O を原点とする座標平面において、3 次関数 $y = x^3 - 3x$ のグラフを C とする。
 C 上の点 $P(a, a^3 - 3a)$ を通り、傾き k の直線を ℓ とする。ただし、 a は $a > 1$ を満たす定数である。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) C と ℓ が相異なる 3 点で交わるための k の条件を求めよ。
- (2) C と ℓ が相異なる 3 点で交わり、さらに P 以外の交点 $Q(x_1, y_1)$, $R(x_2, y_2)$ (ただし $x_1 < x_2$) の x 座標 x_1, x_2 がともに負になるような k の値の範囲を求めよ。

以下では $a = \sqrt{3}$ とし、 k は (2) で求めた範囲を動くものとする。

- (3) $\triangle OQR$ の面積 S を k で表せ。
- (4) S の最大値を求めよ。

IV $f(x) = e^x$ とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) a を実数とする。2 次関数 $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ が

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a), \quad g''(a) = f''(a)$$

をすべて満たすとき, A, B, C を a で表せ。

- (2) 一般に, 放物線 $y = Ax^2 + Bx + C$ の焦点 F の座標は $\left(-\frac{B}{2A}, \frac{1-B^2}{4A} + C\right)$ で与えられる。 A, B, C を (1) で求めたとおりとするとき, 放物線 $y = Ax^2 + Bx + C$ の焦点 F の座標を a で表せ。

- (3) (2) で求めた焦点 F と点 R (a, e^a) を結ぶ線分 FR の傾きが $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる a の値を p とし, FR の傾きが 0 となる a の値を q とする。 p と q を求めよ。

- (4) p と q を (3) のとおりとする。 a が $p \leq a \leq q$ の範囲を動くとき, 焦点 F が描く曲線の長さを求めよ。