

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

複素数平面上の点 $P(\alpha)$ が、原点 $O(0)$ を中心とする半径1の円 C 上にある。 α の偏角を θ とし、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ であるとする。また、点 $Q(\beta)$ 、点 $R(\gamma)$ はそれぞれ

$$\beta^3 = \alpha, \quad 0 \leq \arg \beta < \frac{2\pi}{3}$$

$$\gamma^3 = \alpha, \quad \frac{4\pi}{3} \leq \arg \gamma < 2\pi$$

をみたす点であるとする。

複素数 β 、 γ の絶対値はどちらも1だから、点 Q 、 R は円 C 上の点である。さらに β 、 γ の偏角はそれぞれ 、 である。よって β 、 γ を極形式で表すと

$$\beta = \cos \text{ } + i \sin \text{ }$$

$$\gamma = \cos \text{ } + i \sin \text{ }$$

となる。 $\triangle PQR$ の面積 S を θ で表すと

$$S = \text{ } + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。

θ を $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ の範囲を動かすとき、 S は、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ または $\theta = \frac{3\pi}{2}$ で最小値

をとり、 $\theta = \text{ }$ で最大値 をとる。

(解答群省略)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解
 用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

a を正の定数として、

$$F(x) = \int_0^x e^{-at} \sin t \, dt$$

とおく。 $x > 0$ のとき $F(x)$ の増減を調べると、 $F(x)$ が極大となるのは n を自然数
 として $x = (2n - 1)\pi$ のとき、極小となるのは $x = 2n\pi$ のときである。また、部分
 積分を行うと

$$F(\pi) = \int_0^\pi \boxed{\text{キ}} \, dt$$

となり、部分積分をもう一度行うことにより

$$\int_0^\pi \boxed{\text{キ}} \, dt = \left[\boxed{\text{ク}} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \boxed{\text{ケ}} e^{-at} \sin t \, dt$$

がわかる。したがって、 $F(\pi) = \boxed{\text{コ}}$ である。

以下では、 $S_0 = F(0) = 0$ とおき、自然数 n に対し、 $S_n = F(n\pi)$ とおく。この
 とき

$$S_{n+1} - S_n = \boxed{\text{サ}} (S_n - S_{n-1})$$

であるから、 $S_{n+1} - S_n = \left(\boxed{\text{サ}} \right)^n (S_1 - S_0)$ であり、

$$S_n = \boxed{\text{シ}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{\text{ス}}$$

となる。したがって、最初に考察した $F(x)$ の増減により、 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \boxed{\text{ス}}$
 がわかる。

(解答群省略)

III 座標平面上に, 3点 $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(-1,3)$ をとる。以下の問いに答えよ。(30点)

原点 O を通る傾き k の直線 $y = kx$ を ℓ とする。点 A , B , C のそれぞれと直線 ℓ との距離を a , b , c とし,

$$F = a^2 + b^2 + c^2$$

とおく。

- (1) F を k で表せ。
- (2) F を最小にする k の値を m とし, 最大にする k の値を M とする。 m と M を求めよ。

以下では, 点 P の座標が (u, v) のとき, 点 $(u^2 - v^2, 2uv)$ を P' と表すことにする。点 P として点 A , B , C をとったときの P' をそれぞれ A' , B' , C' とし, $\triangle A'B'C'$ の重心を H とする。

- (3) m , M を (2) のとおりとする。点 P が直線 $y = mx$ または直線 $y = Mx$ 上にあるとき, 点 P' は直線 OH 上にあることを示せ。

IV a を正の実数とする。2つの曲線

$$C_1 : y = ax^3 \quad (x \geq 0), \quad C_2 : y = x \log x \quad (x \geq 1)$$

がある点 P を共有し、 P におけるそれぞれの接線が一致している。このとき、以下の問いに答えよ。(30点)

- (1) 点 P の座標と a を求めよ。
- (2) 曲線 C_1 と C_2 は P 以外に共有点をもたないことを示せ。
- (3) 曲線 C_1 , C_2 , および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。