

1 (複素数の定義と四則演算)

- (1) $\frac{2+3i}{1+2i} + \frac{2i}{3-i}$ を計算せよ。
- (2) $z^2 = 4 + 3i$ を満たす複素数 z を求めよ。

2 (共役複素数, 絶対値)

絶対値が 1 より小さい複素数 α, β に対して, 不等式 $\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| < 1$ が成り立つことを示せ。

3 (実数となるための条件)

$\frac{z}{2} + \frac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 $z (z \neq 0)$ が複素数平面上でえがく図形を式で表し、図示せよ。

4 (乗法と回転, 極形式)

(1) 複素数平面上において, 点 z が原点のまわりに θ だけ回転した点 w は

$$w = z(\cos \theta + i \sin \theta)$$

であることを示せ。

(2) 複素数 $\frac{-1+5i}{3-2i}$ を極形式に表せ。

(3) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^8$ の値を求めよ。

5 (1の根と高次方程式)

(1) n を 2 以上の自然数とすると、方程式 $z^n = 1$ の解は

$$z = \cos\left(\frac{360k}{n}\right)^\circ + i \sin\left(\frac{360k}{n}\right)^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

であることを示せ。

(2) 方程式 $z^6 = 4(-1 + \sqrt{3}i)$ の解を極形式で表せ。

6 (1の根と相反方程式)

(1) 方程式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ の解を極形式で表せ。ただし、偏角 θ は $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする。

(2) (1) で求めた解の一つを α とするとき、 $\alpha + \bar{\alpha}$ の値を求めよ。

(3) $\cos 72^\circ$ を求めよ。

7 (実数係数の2次方程式と共役複素数)

a, b が実数のとき, 2次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の解の絶対値がすべて1より小さくなるための条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

8 (複素係数の2次方程式)

a を実数定数とし, 2次方程式 $x^2 + (a + 2i)x + (6 + ai) = 0$ を考える。

- (1) 実数解をもつような a の値とそのときの实数解を求めよ。
- (2) 重解をもつような a の値とそのときの重解を求めよ。

9 (恒等式と高次方程式)

実数係数の3次方程式

$$2x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$$

が $1 + i$ を解にもつとき, a, b と残りの解を求めよ。

10 (極形式と三角形)

複素数平面上において, 3点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする $\triangle 0\alpha\beta$ を考える。

- (1) $\alpha = 1 + 3i$ とするとき, $\triangle 0\alpha\beta$ が正三角形となるような β を求めよ。
- (2) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0, |\alpha - \beta| = 2$ のとき, $\triangle 0\alpha\beta$ の面積 S を求めよ。

11 (等比数列の和)

(1) θ が 360° の整数倍でないとき, $\sum_{k=0}^n \cos k\theta$, $\sum_{k=0}^n \sin k\theta$ をそれぞれ求めよ。

(2) 複素数平面上において, 原点を P_0 とし, P_0 から実軸の正の方向に 1 進んだ点を P_1 とする。次に P_1 を中心として 45° 回転して向きを変え, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする。以下同様に P_n に到達した後, 45° 回転してから前回進んだ距離の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする。このとき, 点 P_{10} が表す複素数を求めよ。

12 (平行条件, 垂直条件)

(1) 複素数平面上において, 異なる 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるための必要十分条件は

$$\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta) = 0$$

であることを示せ。

(2) 複素数平面上において, 2 点 $0, \alpha$ を通る直線に点 β からおろした垂線の足を γ とするとき, γ を α, β で表せ。

13 (複素共役と円の方程式)

2つの複素数 z と w の間に $w = \frac{z+i}{z+1}$ ($z \neq -1$) なる関係がある。複素数平面上において点 z が虚軸上を動くとき、点 w の軌跡を求めよ。

14 (直線の方程式)

- (1) 点 z が2点 $1 - \frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2} + i$ を通る直線上を動くとき、 z が満たすべき関係式を求めよ。
- (2) $(1-i)z + (1+i)\bar{z} = 2$ のとき、点 z がえがく図形を求めよ。

15 (アポロニウスの円, 垂直二等分線)

複素数 z に対して, $w = \frac{1}{1-z}$ とおく。ただし, $z \neq 1$ とする。

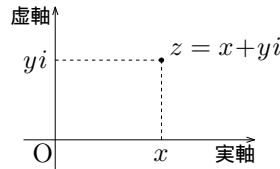
- (1) z が $|z| = \frac{1}{2}$ を満たすとき, w が複素数平面上でえがく図形を図示せよ。
- (2) z が $|z| = 1$ を満たすとき, w が複素数平面上でえがく図形を図示せよ。
- (3) z が $|z| < 1$ を満たすとき, w が複素数平面上でえがく領域を図示せよ。

16 (円周角)

- (1) 複素数平面上の異なる 4 点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が同一円周上にあるとき, $\frac{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}$ は実数であることを示せ。
- (2) 複素数平面上で $\arg \frac{z-6}{z} = 45^\circ$ ($z \neq 6$) を満たす点 z がえがく図形を求めよ。

1 確認：実数 x, y と虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いて $x + yi$ と表される数を複素数といい、 x を実部、 y を虚部という。虚部が 0 である複素数は実数であり、虚部が 0 でない複素数は虚数、実部が 0 である虚数は純虚数と呼ばれる。

複素数 $x + yi$ を座標平面上の点 (x, y) として表すとき、その平面を複素(数)平面といい、実部を表す座標軸を実軸、虚部を表す座標軸を虚軸という。 $z = x + yi$ とおくとき、複素数平面上では複素数 z で表される点または略して点 z と呼び、実部 x および虚部 y をそれぞれ記号で $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$ と表す。



複素数平面上において、複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) はまた「ベクトル $1, i$ の一次結合で表される、原点を始点とするベクトル」とみることでもでき、
複素数の和、差、実数倍および相等条件は平面ベクトルとして定義される。

複素数の積は、 i の多項式として掛け算して $i^2 = -1$ と置き換えることにより、演算結果がまた $x + yi$ の形になるように定める。

複素数の商は i の多項式の比つまり有理式と定めれば良さそうであるが、問題は演算結果がまた $x + yi$ の形となって定義の正当性が保証されるかどうかである。虚数で割るときは、分母・分子に分母の共役複素数(虚部が逆符号の複素数)をかけて、積の定義に従って分母・分子をそれぞれ計算すれば $x + yi$ の形にできる：

$$\begin{aligned} \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + (bc - ad)i - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

この式変形のことを分母の実数化という。あらためて述べると、

複素数の商は i の有理式を分母の実数化によって $x + yi$ の形にしたものと定める。

高校では知識だけ認めて証明はしないが、

代数学の基本定理：

複素数係数の n 次方程式は、重複度も含めて n 個の複素数解をもつが成り立つ。そのことを考えると、方程式

$$z^2 = 4 + 3i$$

の解は $z = \pm\sqrt{4 + 3i}$ で済ませるわけにはいかない。 $x + yi$ (x, y は実数) の形の数で、方程式を満たすものを求めなければならない。(もっとも、本問では問題文に「複素数を求めよ」と明記してあるので、そのような誤解は生じないはずだが……)

解答：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{2+3i}{1+2i} + \frac{2i}{3-i} &= \frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} + \frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\
 &= \frac{2-i-6i^2}{1^2-2^2i^2} + \frac{6i+2i^2}{3^2-i^2} \\
 &= \frac{8-i}{5} + \frac{-2+6i}{10} \\
 &= \frac{2(8-i)-2+6i}{10} \\
 &= \frac{7}{5} + \frac{2}{5}i \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) 求める複素数を

$$z = x + yi \quad (x, y \text{ は実数})$$

とおくと,

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 4 + 3i$$

であるから実部, 虚部をそれぞれ比べて

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & \dots\dots ① \\ 2xy = 3 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②より

$$y = \frac{3}{2x}$$

であるから①に代入して y を消去すると,

$$x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4$$

$$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$$

$$(2x^2 + 1)(2x^2 - 9) = 0$$

 $x^2 \geq 0$ より

$$x^2 = \frac{9}{2} \quad \therefore x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

②とあわせて

$$(x, y) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

よって, 求める複素数 z は

$$z = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{または} \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad (\text{答})$$

2 確認：複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) に対して、複素数 $\bar{z} = x - yi$ を z の共役複素数という。「共役」とは、本来「(ある範囲の数を係数にもつ)同じ方程式の解」という意味で、実際、実数係数の2次方程式が虚数解をもつときは2解は互いに複素共役である。共役(をとるという作業)と四則演算とは交換可能であり、ちょっとした計算で次が成り立つことがわかる。

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

実数の場合の自然な拡張として、複素数 z の絶対値 $|z|$ を複素数平面上における原点からの距離と定義する。すなわち、

$$z = x + yi \quad (x, y \text{ は実数}) \text{ に対して, } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

実数のときと同様に

$$|z| = 0 \iff z = 0, \quad |-z| = |z|, \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

が成り立つが、さらに

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad |\bar{z}| = |z|$$

が成り立つことにも注意したい。また、

$$\text{三角不等式: } |z + w| \leq |z| + |w|$$

は重要である。ここで、不等式の等号は $z = 0$ または $w = 0$ または z と w が互いに正の実数倍のとき成り立つ。三角不等式を変形した式

$$|z + w| \geq ||z| - |w||$$

も有用である。

$$\begin{aligned} \text{解答: } |1 - \bar{\alpha}\beta|^2 - |\alpha - \beta|^2 &= (1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \alpha\bar{\beta}) - (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= 1 + \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} \\ &= (1 - \alpha\bar{\alpha})(1 - \beta\bar{\beta}) \\ &= (1 - |\alpha|^2)(1 - |\beta|^2) \end{aligned}$$

仮定より $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ であるから

$$|1 - \bar{\alpha}\beta|^2 - |\alpha - \beta|^2 = (1 - |\alpha|^2)(1 - |\beta|^2) > 0$$

$$\therefore |1 - \bar{\alpha}\beta| > |\alpha - \beta|$$

$|\alpha - \beta| \geq 0$ より、特に $|1 - \bar{\alpha}\beta| > 0$ であるから、

$$\left|\frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right| < 1$$

(おわり)

(注) $|1 - \bar{\alpha}\beta| > 0$ については、

$$|\bar{\alpha}\beta| = |\bar{\alpha}||\beta| < 1$$

であるから、三角不等式を用いて

$$|1 - \bar{\alpha}\beta| \geq |1 - |\bar{\alpha}\beta|| > 0$$

と(独立に)導くこともできる。

3 確認：実数となるための条件は、通常

$$\begin{aligned} \text{「}z \text{は実数」} &\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\iff \bar{z} = z \\ &\iff \arg z = (180n)^\circ \quad (n \text{は整数}) \end{aligned}$$

のいずれかで表現する。本問は、 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ において

$$\operatorname{Im}(z) = 0, \quad 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$$

としても解けるが、まずは共役複素数を用いた基本解法を確認しよう。

この条件のもとで範囲を考えると、 z が虚数ならば

$$0 \leq \frac{z}{2} + \frac{1}{z} \leq 2$$

としても変形できない。そこで、実部を持ち出して

$$0 \leq \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{z}\right) \leq 2$$

と表現し、 $z + \bar{z}$ や $z\bar{z}$ (実数) の単位で変形する。

解答：

$\frac{z}{2} + \frac{1}{z}$ は実数であるから

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{z}\right)} &= \frac{z}{2} + \frac{1}{z} \\ \frac{\bar{z}}{2} + \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{z}{2} + \frac{1}{z} \\ \frac{\bar{z} - z}{2} + \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} &= 0 \\ (\bar{z} - z)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z\bar{z}}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{z} = z \quad \text{または} \quad |z|^2 = z\bar{z} = 2 \quad \dots\dots \text{①}$$

$\frac{z}{2} + \frac{1}{z}$ の実部は

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{z + \bar{z}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{z\bar{z}}\right)$$

であるから、①のもとで0以上2以下となる条件は

$$0 \leq \operatorname{Re}(z)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|z|^2}\right) \leq 2 \quad \dots\dots \text{②}$$

z が実数のとき

$$0 \leq z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{z^2 + 2}{2z} \leq 2$$

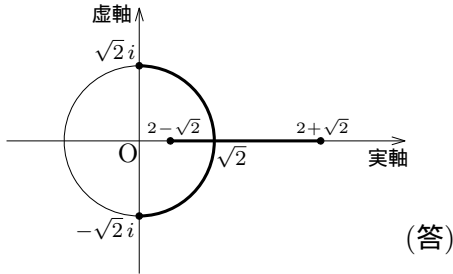
$$z > 0 \quad \text{かつ} \quad z^2 - 4z + 2 \leq 0 \quad (z^2 \geq 0 \text{ は任意の実数 } z \text{ で成立})$$

$$\therefore 2 - \sqrt{2} \leq z \leq 2 + \sqrt{2}$$

$|z| = \sqrt{2}$ のとき

$$0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$$

求める図形は①かつ②であり，図示すると次図のようになる。



別法： $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$) とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} + \frac{1}{z} &= \frac{r}{2}(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{r}\right) \sin \theta \end{aligned}$$

が 0 以上 2 以下の実数であるための条件は

$$\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{r}\right) \sin \theta = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$0 \leq \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{r}\right) \cos \theta \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③より

$$r = \sqrt{2} \quad \text{または} \quad \sin \theta = 0$$

であり，④より

$$r = \sqrt{2} \quad \text{のとき} \quad 0 \leq \cos \theta (\leq \sqrt{2})$$

$$\sin \theta = 0 \quad \text{のとき} \quad z = r, \quad (0 \leq) \frac{r}{2} + \frac{1}{r} \leq 2$$

となって，以下解答と同様である。

4 確認：複素数平面上において点 $z = x + yi$ (x, y は実数) を原点のまわりに θ だけ回転させて点 w となるとき，3 点 $1, i, z$ の相対的な位置関係は変わらないので，

$$w = x(\cos \theta + i \sin \theta) + y\{\cos(90^\circ + \theta) + i \sin(90^\circ + \theta)\}$$

が成り立ち，(1)が証明される。その計算結果よりただちに

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n \text{ は整数})$$

が導かれる。前者は加法定理，後者はド・モアブルの定理である。なお，

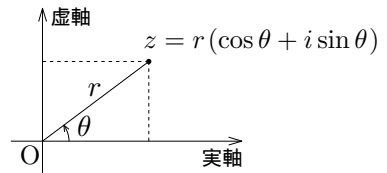
$$w = (x + yi)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

を導く過程において，((1)の証明では)余角の公式と負角の公式を用いられるが，加法定理は用いられないことに注意してほしい。

複素数の積・商・累乗の計算の際は，回転と相似をイメージして

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r = |z| > 0)$$

と表示した方が，演算の構造がわかりやすい。この表示を極形式(表示)といい，図形的には右図のようになる。ここで， θ を z の偏角といい，記号では $\arg z$ と表す。



解答：

(1) 回転移動により 3 点 $1, i, z = x + yi$ (x, y は実数) の相対的な位置関係は変わらないから，

$$w = x(\cos \theta + i \sin \theta) + y\{\cos(90^\circ + \theta) + i \sin(90^\circ + \theta)\}$$

余角の公式と負角の公式より

$$w = x(\cos \theta + i \sin \theta) + y\{\sin(-\theta) + i \cos(-\theta)\}$$

$$= x(\cos \theta + i \sin \theta) + y(-\sin \theta + i \cos \theta)$$

$$= x(\cos \theta + i \sin \theta) + yi(i \sin \theta + \cos \theta)$$

$$= (x + yi)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= z(\cos \theta + i \sin \theta)$$

(おわり)

$$(2) \quad \frac{-1 + 5i}{3 - 2i} = \frac{(-1 + 5i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ = \sqrt{2} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \\ 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

であるから，

$$\left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 + i} \right)^8 = (\sqrt{2} \{\cos(-15)^\circ + i \sin(-15)^\circ\})^8 \\ = 2^4 \{\cos(-120)^\circ + i \sin(-120)^\circ\} = -8 - 8\sqrt{3}i \quad (\text{答})$$

5 確認：4 で述べたように，累乗の計算は極形式で表す方が見通し良い。そこで，

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$$

とにおいて，絶対値の比較と実部，虚部の比較から r と θ を求める。一見 r と θ の2変数なので実部，虚部の比較だけで済みそうに思えるが，実は $\cos \theta$ と $\sin \theta$ は計算の際には独立変数であるかのように振る舞うので，先に絶対値 r を確定させる必要がある。

1 の n 乗根が，複素数平面上で単位円 $|z| = 1$ 上の n 等分点

$$z = \cos \left(\frac{360k}{n} \right)^\circ + i \sin \left(\frac{360k}{n} \right)^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

であることは，公式として覚えておきたい。

一般の方程式 $z^n = \alpha$ の場合は，極形式を用いて α の n 乗根 β を求め， $\left(\frac{z}{\beta}\right)^n = 1$ として1の根の公式を適用すればよい。

解答：

(1) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) とおくと，

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = 1$$

両辺の絶対値を比べて

$$|z^n| = r^n = 1 \quad \therefore r = 1$$

そこで， $\cos n\theta + i \sin n\theta = 1$ の実部，虚部をそれぞれ比べると

$$\cos n\theta = 1 \quad \text{かつ} \quad \sin n\theta = 0$$

$$\therefore n\theta = (360k)^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

よって，1 の n 乗根は

$$z = \cos \left(\frac{360k}{n} \right)^\circ + i \sin \left(\frac{360k}{n} \right)^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{おわり})$$

$$(2) \quad 4(-1 + \sqrt{3}i) = 8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 8(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \\ = \{\sqrt{2}(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)\}^6$$

であるから，与えられた方程式は

$$\left\{ \frac{z}{\sqrt{2}(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)} \right\}^6 = 1$$

1 の6乗根を求めて

$$\frac{z}{\sqrt{2}(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)} = \cos(60k)^\circ + i \sin(60k)^\circ \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\therefore z = \sqrt{2}(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ), \\ \sqrt{2}(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ), \\ \sqrt{2}(\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ), \\ \sqrt{2}(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ), \\ \sqrt{2}(\cos 260^\circ + i \sin 260^\circ), \\ \sqrt{2}(\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ) \quad (\text{答})$$

〔6〕 確認：方程式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ のように，降べきの順と昇べきの順で係数の並びが同じである方程式を相反方程式^{そいはん}という。特に，偶数次の場合は z と $\frac{1}{z}$ の対称式と解釈できるので， $z + \frac{1}{z}$ の方程式に直すことができる。

(2)における α は 1 の原始 5 乗根であるから，特に

$$|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha} = 1$$

であり， $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha}$ は (1) から導かれる 2 次方程式の解である。1 の 5 乗根は複素数平面上で単位円 $|z| = 1$ 上の 5 等分点であるから

$$\alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$$

解答：

(1) $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ より，方程式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ の解は 1 の原始 5 乗根であり，極形式で表すと

$$z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ, \quad \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ, \\ \cos 216^\circ + i \sin 216^\circ, \quad \cos 288^\circ + i \sin 288^\circ \quad (\text{答})$$

(2) $\theta = (72k)^\circ$ ($k = 1, 2, 3, 4$) とおくと，(1)より

$$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\bar{\alpha} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \quad \alpha \neq 0 \text{ より}$$

$$\alpha^2 + \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 1 = 0$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 1 = 0$$

2 次方程式の解の公式より

$$\alpha + \bar{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{答})$$

(3) $\alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ とすると， $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha} = 2 \cos 72^\circ$ であるから，

(2) および $\cos 72^\circ > 0$ より

$$\cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad (\text{答})$$

(研究) $u = \alpha + \bar{\alpha}$, $v = \alpha^2 + \bar{\alpha}^2$ を求めて，相反方程式を解く代わりに，解と係数の関係 (\rightarrow 〔7〕) を用いて u , v を 2 解とする 2 次方程式を導いてもよい。

7 確認：まず最初に思いつくのは、実数解の場合と虚数解の場合に分けることである。実数係数なら虚数解の場合は互いに複素共役となって単純であるが、実数係数で実数解の場合は2解には数学的つながりは何もなく、グラフを持ち出すという大掛かりな解法(→「2次関数」8)が必要となるからである。

「解と係数の関係」については、既に「2次関数」7で確認しているが、「複素数」の分野として重要となるのは

$$\operatorname{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \quad |\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$$

との結びつきである。

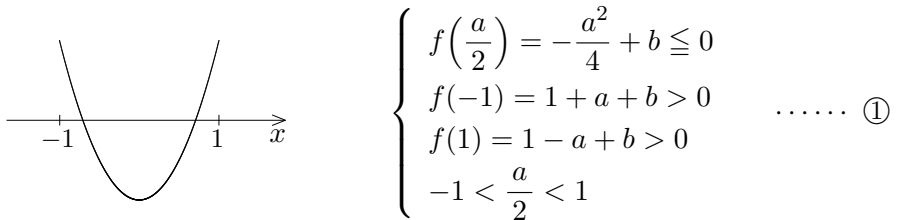
解答：

(i) $a^2 - 4b \geq 0$ のとき

2解はともに実数であり、2解とも $-1 < x < 1$ の範囲にあることが条件である。

$$f(x) = x^2 - ax + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

とおく。 $y = f(x)$ のグラフと x 軸とが共有点を持ち、かつその共有点が $-1 < x < 1$ の範囲にだけあるための条件を考えて、



(ii) $a^2 - 4b < 0$ のとき

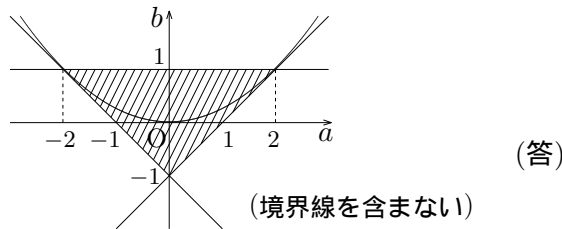
2次方程式の係数は実数であるから、2解は互いに共役な虚数 $\alpha, \bar{\alpha}$ となり、

$$b = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2, \quad |\alpha| = |\bar{\alpha}|$$

に注意すると、題意の条件は

$$a^2 - 4b < 0 \quad \text{かつ} \quad (0 \leq) b < 1 \quad \dots\dots ②$$

以上 (i), (ii) で得られた①または②が求める条件であり、図示すると次図の斜線部分



となり、式で表すと

$$\max\{-a - 1, a - 1\} < b < 1 \quad (\text{答})$$

8 確認：判別式は本来，実数解をもつかどうかを判別するものではなく，重解をもつかどうかを判別するものである。2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ が実数であるかどうかを $\sqrt{b^2-4ac}$ の部分だけで判断できるのは，係数 a, b, c がすべて実数という場合に限っての話である。

本問のように虚数係数の場合には，判別式によって実数解条件を導くことはできない。しかし，実数解をもつのであれば実部と虚部に分けることができるので，複素数の相等条件を利用すればよい。一方，係数が実数であるか虚数であるかによらず，重解条件を求めるには判別式が利用できる。

解答：

$$x^2 + (a + 2i)x + (6 + ai) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) a, x がともに実数であるとすれば， $\textcircled{1}$ を实部と虚部に分けると，

$$(x^2 + ax + 6) + (2x + a)i = 0$$

実部，虚部をそれぞれ比べること(複素数の相等条件)より，必要条件として

$$\begin{cases} x^2 + ax + 6 = 0 & \dots\dots \textcircled{2} \\ 2x + a = 0 & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ かつ $\textcircled{3}$ より a を消去して

$$x^2 - 2x \cdot x + 6 = 0 \quad \therefore x = \pm\sqrt{6}$$

実数解の存在が言えたので十分であり，このとき $\textcircled{3}$ より求める a の値は

$$a = \pm 2\sqrt{6} \quad (\text{答})$$

であり，実数解は

$$\left. \begin{array}{l} a = 2\sqrt{6} \text{ のとき } x = -\sqrt{6} \\ a = -2\sqrt{6} \text{ のとき } x = \sqrt{6} \end{array} \right\} (\text{答})$$

(2) $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると，

$$D = (a + 2i)^2 - 4(6 + ai) = a^2 - 28$$

であり，重解条件は

$$D = a^2 - 28 = 0 \quad \therefore a = \pm 2\sqrt{7} \quad (\text{答})$$

このとき，重解 $x = -\frac{a+2i}{2}$ は

$$\left. \begin{array}{l} a = 2\sqrt{7} \text{ のとき } x = -\sqrt{7} - i \\ a = -2\sqrt{7} \text{ のとき } x = \sqrt{7} - i \end{array} \right\} (\text{答})$$

9 確認： $1+i$ が 3 次方程式 $2x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$ の解であることは、

$$2(1+i)^3 + a(1+i)^2 + b(1+i) - 6 = 0$$

が成り立つことを意味する。あとは a, b が実数という仮定よりこの等式を満たす a, b を求め、3 次式を因数分解して残りの解を求めればよい。ただ、そのまま計算するだけでは見通しが悪いので、数学 II の整式の解法を上手く利用するのがよい。

解答：

$x = 1 + i$ を解にもつ 2 次方程式を一つ求めると、

$$(x-1)^2 = i^2 \quad \therefore x^2 - 2x + 2 = 0$$

この 2 次式 $x^2 - 2x + 2$ で割ることにより、恒等式

$$\begin{aligned} 2x^3 + ax^2 + bx - 6 \\ = (x^2 - 2x + 2)(2x + a + 4) + (2a + b + 4)x - 2a - 14 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立ち、 $x = 1 + i$ を代入すると 0 になるから

$$(2a + b + 4)(1 + i) - 2a - 14 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$2a + b + 4, -2a - 14$ は実数で $1 + i$ は虚数であるから、 $\textcircled{2}$ より

$$2a + b + 4 = 0 \quad \text{かつ} \quad -2a - 14 = 0$$

$$\therefore a = -7, \quad b = 10 \quad (\text{答})$$

これを $\textcircled{1}$ に代入して

$$2x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x^2 - 2x + 2)(2x - 3)$$

であるから、

$$\text{残りの解は } 1 - i, \quad \frac{3}{2} \quad (\text{答})$$

(注)

1° $\textcircled{2}$ では、わざわざ実部と虚部に分けて整理する必要はない。 $\textcircled{1}$ で確認したように、複素数の相等条件はベクトルと同じと定義されているので、実部・虚部の比較は 2 つのベクトル $1, i$ が 1 次独立であることを意味する。 $\textcircled{2}$ における 2 つのベクトル $1, 1+i$ は $\vec{0}$ でなく、平行でないから 1 次独立ということになるので、そのまま比較することができる。

2° $1+i$ を一般の虚数定数 $a+bi$ (a, b は実数, $b \neq 0$) に変えて上の議論を行なうと、 $a+bi$ は 2 次方程式 $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$ の解であり、2 つのベクトル $1, a+bi$ は 1 次独立であるから、

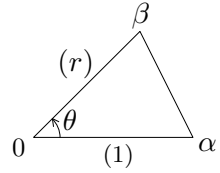
実数係数の多項式に虚数 $a+bi$ (a, b は実数) を代入して 0 になるならば、その多項式は $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ で割り切れ、
 $a-bi$ を代入しても 0 になる

という定理が導かれる。

10 確認： $\triangle 0\alpha\beta$ の 3 頂点の位置関係は、 $\frac{\beta}{\alpha}$ の極形式表示から把握できる。実際、

$$\frac{\beta}{\alpha} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, 0^\circ < \theta < 180^\circ)$$

のとき $\triangle 0\alpha\beta$ は図のようになる。



(1)では、 $|\alpha| = |\beta|$ かつ $\arg \frac{\beta}{\alpha} = \pm 60^\circ$ ととらえればよい。

(2)は $\triangle 0\alpha\beta$ の形状を求めるのが実質的内容であり、(1)の逆問題になっている。同次方程式に注目してまず $\frac{\alpha}{\beta}$ の値を求めることになる。

解答：

(1) $\beta = \alpha \{ \cos(\pm 60^\circ) + i \sin(\pm 60^\circ) \}$ (複号同順)

$$= (1 + 3i) \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{1 \mp 3\sqrt{3}}{2} + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} i \quad (\text{複号同順}) \quad (\text{答})$$

(2)
$$\begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0 & \dots\dots \text{①} \\ |\alpha - \beta| = 2 & \dots\dots \text{②} \end{cases}$$

$\beta = 0$ とすると、①より $\alpha = 0$ となって②に反するから、
 $\beta \neq 0$

①の両辺を β^2 で割ることにより

$$\text{①} \iff \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2\frac{\alpha}{\beta} + 4 = 0$$

2 次方程式の解の公式より

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$= 2\{\cos(\pm 60^\circ) + i \sin(\pm 60^\circ)\} \quad (\text{複号同順}) \quad \dots\dots \text{③}$$

よって、 $\triangle 0\alpha\beta$ は

$\angle \alpha 0 \beta = 60^\circ$, $\angle 0 \beta \alpha = 90^\circ$ なる直角三角形

である。③より

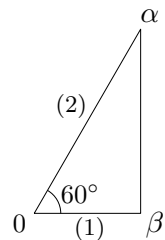
$$|\alpha - \beta| = |\beta| \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| = |\beta| | \pm \sqrt{3}i | = \sqrt{3} |\beta|$$

であるから、②より

$$|\beta| = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle 0\alpha\beta$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |\alpha - \beta| |\beta| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\text{答})$$



11 確認：三角関数の和については，個別に考えないで

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta + i \sum_{k=0}^n \sin k\theta = \sum_{k=0}^n (\cos \theta + i \sin \theta)^k$$

とひとまとめにして求めるのがポイントである。

一定の方向転換をくり返す移動については，

$$\overrightarrow{P_0 P_{10}} = \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} + \overrightarrow{P_3 P_4} + \cdots + \overrightarrow{P_9 P_{10}}$$

とベクトルの和に分割して考察すると，隣接する2つのベクトル $\overrightarrow{P_{k-1} P_k}$ ， $\overrightarrow{P_k P_{k+1}}$ が相似と回転の合成の関係にあるので，複素数で表示すると等比数列の和となって単純計算に帰着される。

解答：

(1) 仮定より $\cos \theta + i \sin \theta \neq 1$ であるから，等比数列の和の公式より

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \cos k\theta + i \sum_{k=0}^n \sin k\theta \\ &= \sum_{k=0}^n (\cos \theta + i \sin \theta)^k \\ &= \frac{1 - (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1}}{1 - (\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i \sin(n+1)\theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta} \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{n+1}{2} \theta - 2i \sin \frac{n+1}{2} \theta \cos \frac{n+1}{2} \theta}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{-2i \sin \frac{n+1}{2} \theta \left(\cos \frac{n+1}{2} \theta + i \sin \frac{n+1}{2} \theta \right)}{-2i \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\cos \frac{n}{2} \theta + i \sin \frac{n}{2} \theta \right) \end{aligned}$$

実部，虚部をそれぞれ比べて

$$\sum_{k=0}^n \cos k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \cos \frac{n}{2} \theta, \quad \sum_{k=0}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \frac{n}{2} \theta \quad (\text{答})$$

(2) 点 P_n を表す複素数を z_n とおくと,

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)(z_n - z_{n-1}) \\ &= \frac{1+i}{2}(z_n - z_{n-1}) \end{aligned}$$

$\{z_n - z_{n-1}\}$ は初項 $z_1 - z_0 = 1$, 公比 $\frac{1+i}{2}$ の等比数列であるから,

$$z_n - z_{n-1} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1}$$

$z_0 = 0$ に注意して

$$\begin{aligned} z_{10} &= z_{10} - z_0 \\ &= \sum_{n=1}^{10} (z_n - z_{n-1}) \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1+i}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1+i}{2}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} (\cos 450^\circ + i \sin 450^\circ)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{32}i\right) \times \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\ &= \frac{32-i}{32}(1+i) \\ &= \frac{33}{32} + \frac{31}{32}i \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

12 確認：平行条件は実数となるための条件，垂直条件は純虚数となるための条件として表現できる。複素数平面上の $\vec{0}$ でない2つのベクトル z, w に対して

$$z \parallel w \iff z = tw \quad (t \text{ は実数}) \iff \frac{z}{w} \text{ は実数} \iff \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{z}{w}$$

$$z \perp w \iff \arg \frac{z}{w} = \pm 90^\circ \iff \frac{z}{w} \text{ は純虚数} \iff \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = -\frac{z}{w}$$

建前上，内積の複素数表示を知らないことになっているので，この純虚数条件は「内積 = 0」に相当する定理として重要である。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \text{ 「3点 } \alpha, \beta, \gamma \text{ は同一直線上} \text{」} &\iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ は実数} \\ &\iff \overline{\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \\ &\iff (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha) = (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\gamma - \alpha) \\ &\iff \bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

(おわり)

(2) 点 γ は2点 $0, \alpha$ を通る直線上にあるから，

$$\gamma = k\alpha \quad (k \text{ は実数})$$

と表される。

$$\beta - \gamma = \beta - k\alpha$$

は $\alpha (\neq 0)$ と垂直であるから，

$$\overline{\left(\frac{\beta - k\alpha}{\alpha}\right)} = -\frac{\beta - k\alpha}{\alpha}$$

$$\alpha(\bar{\beta} - k\bar{\alpha}) = -\bar{\alpha}(\beta - k\alpha)$$

$$\therefore k = \frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2|\alpha|^2}$$

よって，求める複素数は

$$\gamma = \frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2|\alpha|^2} \alpha \quad (\text{答})$$

(注) 正射影の公式 (\rightarrow 「ベクトル」10) と比較すると，

$$(\alpha \text{ と } \beta \text{ の内積}) = \frac{\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta}{2}$$

であることがわかる。もちろん，(ベクトルの内積のときと同様)余弦定理を用いて，直接導くこともできる。

13 確認： $w = \frac{z+i}{z+1}$ とあるので、点 z のえがく図形を点 w のえがく図形に変換する問題ではあるが、(数学 III で学ぶように 1 次分数変換は逆変換が存在するので) 単に z について解き直して代入・整理するだけの問題である。

重要となるのは式変形の方であるが、一般に複素共役に関して対称な式は

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |z + \alpha|^2 + (\text{実数})$$

と変形できるので、円(または直線)の標準形に整理できる。この変形の出来・不出来は、「複素数」分野の得意・不得意に大きく影響するので、この変形だけのために 1 題を割くことにした。(意図的に計算量を少し多めにしている)

また、共役複素数に関する公式

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

もこの機会にしっかり覚えておいてほしい。

解答：

$w = \frac{z+i}{z+1}$ を z について解き直すと、

$$\begin{aligned} w = \frac{z+i}{z+1} &\iff (z+1)w = z+i \\ &\iff (w-1)z = -w+i \iff z = \frac{-w+i}{w-1} \end{aligned}$$

これを虚軸の方程式 $\frac{z+\bar{z}}{2} = 0$ に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{-w+i}{w-1} + \frac{-\bar{w}-i}{\bar{w}-1} &= 0 \\ (-w+i)(\bar{w}-1) + (-\bar{w}-i)(w-1) &= 0 \quad \text{かつ } w \neq 1 \\ \therefore w\bar{w} - \frac{1-i}{2}w - \frac{1+i}{2}\bar{w} &= 0 \quad \text{かつ } w \neq 1 \\ w\left(\bar{w} - \frac{1-i}{2}\right) - \frac{1+i}{2}\bar{w} &= 0 \\ w\left(\bar{w} - \frac{1-i}{2}\right) - \frac{1+i}{2}\left(\bar{w} - \frac{1-i}{2}\right) &= \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1-i}{2} \\ \left(w - \frac{1+i}{2}\right)\left(\bar{w} - \frac{1-i}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \left|w - \frac{1+i}{2}\right|^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore \left|w - \frac{1+i}{2}\right| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{かつ } w \neq 1 \end{aligned}$$

よって、点 w の軌跡は

中心 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ 、半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円から点 1 を除いた図形 (答)

である。

14 確認：直線の方程式の導き方は主に次の3つがある；

(i) ベクトル方程式 $z = \alpha + t\beta$ ($\beta \neq 0$) において，

$t = \frac{z - \alpha}{\beta}$ が実数であるための条件式(→ [3], [12])を整理する

(ii) 点 z_0 を通り，ベクトル α ($\neq 0$) に垂直な直線として，

$\frac{z - z_0}{\alpha}$ が純虚数となるための条件式(→ [12])を整理する

(iii) 2点 α, β から等距離にある点の軌跡(垂直二等分線)

として $|z - \alpha| = |z - \beta|$ と表す(→ [15])

高校では，他の分野からの類推で求められるとして(複素数平面上の)直線の方程式は授業では扱わない(で生徒が自主的に研究して身につける)ことになっている。

解答：

(1) 媒介変数を t として，直線の方程式は

$$z = (1-t)\left(1 - \frac{i}{2}\right) + t\left(-\frac{1}{2} + i\right) \quad \therefore t = \frac{z - \left(1 - \frac{i}{2}\right)}{\frac{3}{2}(-1 + i)}$$

$\bar{t} = t$ より

$$\frac{\bar{z} - \left(1 + \frac{i}{2}\right)}{-1 - i} = \frac{z - \left(1 - \frac{i}{2}\right)}{-1 + i}$$

$$(1+i)z - (1-i)\bar{z} - i = 0$$

$$\therefore (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 1 = 0 \quad (\text{答})$$

(2) $(1-i) + (1+i) = 2$ に注意して，辺々引くと

$$(1-i)z + (1+i)\bar{z} = 2 \iff (1-i)(z-1) + (1+i)(\bar{z}-1) = 0$$

$$\iff \frac{z-1}{1+i} + \frac{\bar{z}-1}{1-i} = 0$$

$$\iff \overline{\left(\frac{z-1}{1+i}\right)} = -\frac{z-1}{1+i}$$

$$\iff (z-1) \perp (1+i)$$

よって，点 z がえがく図形は

点 1 を通り，ベクトル $1+i$ に垂直な直線 (答)

(別法)

$$(1-i)z + (1+i)\bar{z} = 2 \iff z\bar{z} = z\bar{z} - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + 2$$

$$\iff z\bar{z} = (z-1-i)(\bar{z}-1+i)$$

$$\iff |z| = |z - (1+i)|$$

より，点 z がえがく図形は

2点 $0, 1+i$ を両端とする線分の垂直二等分線 (答)

15 確認：答えさえ求めればよいというのであれば、既に13, 14で円と直線の方程式の扱いは終わっている。ところが、初等幾何の性質が活かせるときは、図形的に解く方が簡単で実感もつかみやすい。本問ではアポロニウスの円を取り上げるが、2定点 A, B からの距離の比が $AP : BP = m : n$ (一定)である点 P の軌跡は

$m = n$ のとき AB の垂直二等分線

$m \neq n$ のとき AB を $m : n$ に分ける内分点と外分点を直径の両端とする円となるので、直ちに答が求められる。

ただし、いつでも初等幾何による解法が易しいというわけではなく、

$$\sqrt{2} \left| z - \frac{1-i}{2} \right| = \sqrt{5} |z|$$

のように図形的に考えるとかえってわかりにくくなる場合もある。

(13の解法に従って、中心 $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$, 半径 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ の円になることを確かめてみよ。)

解答：

$$w = \frac{1}{1-z} \iff w(1-z) = 1 \iff wz = w-1 \iff z = \frac{w-1}{w}$$

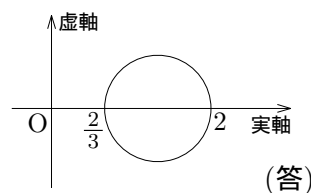
$$(1) \quad |z| = \frac{|w-1|}{|w|} = \frac{1}{2} \iff \frac{|w|}{2} = \frac{|w-1|}{1}$$

より、点 w のえがく図形は

原点から点 1 に向かう線分を 2 : 1 に内分する

点 $\frac{2}{3}$, 外分する点 2 を直径の両端とする円

となり、図示すると右図のようになる。

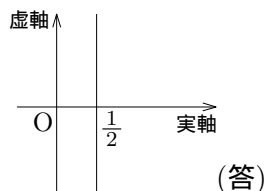


$$(2) \quad |z| = \frac{|w-1|}{|w|} = 1 \iff |w| = |w-1|$$

より、点 w のえがく図形は

2点 0, 1 を両端とする線分の垂直二等分線

となり、図示すると右図の $Re(z) = \frac{1}{2}$ となる。



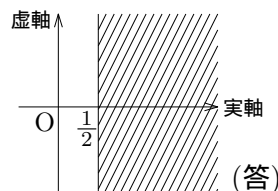
$$(3) \quad |z| = \frac{|w-1|}{|w|} < 1 \iff |w| > |w-1|$$

より、点 w のえがく図形は

$|w| = |w-1|$ に関して点 1 と同じ側、

すなわち $Re(z) > \frac{1}{2}$

となり、図示すると右図の斜線部分(境界線を含まない)となる。



(課題) 13の解法でも答案を作成せよ。

16 確認：円周角も図形的考察において有力なアイテムとなるが，偏角が回転の向きまで含むので対応がつかみにくいのが難点である。しかし，補助の図をかくことでその点をクリアすれば，前問と同様あっさりと問題が解ける。(2)については，3, 13のように機械的な計算でも処理できる。

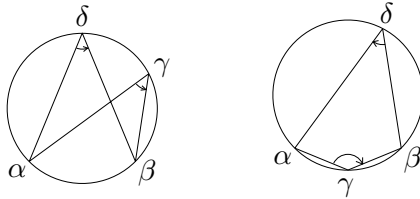
解答：

$$(1) [\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)} \text{ とおくと，}$$

$$[\delta, \gamma, \beta, \alpha] = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$$

$$[\beta, \alpha, \gamma, \delta] = [\alpha, \beta, \delta, \gamma] = \frac{1}{[\alpha, \beta, \gamma, \delta]}$$

が成り立つから，4点が $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の順に並ぶ場合と $\alpha, \gamma, \beta, \delta$ の順に並ぶ場合だけ考えれば十分である。



それぞれの場合において，円周角の性質より

$$\arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} = \arg \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}, \quad \arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} + \arg \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = 180^\circ$$

偏角の性質を用いて整理すると

$$\arg \frac{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)} = 0^\circ \text{ または } 180^\circ$$

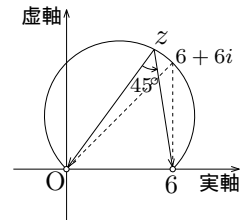
となるから， $\frac{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}$ は実数である。

(おわり)

(2) 図形的に考えて，

$$\arg \frac{z - 6}{z} = 45^\circ \iff \arg \frac{6 - z}{0 - z} = 45^\circ$$

$$\iff \begin{cases} \angle 0z6 = 45^\circ \\ \text{Im}(z) > 0 \end{cases}$$



よって，点 z のえがく図形は

2点 $0, 6 + 6i$ を直径の両端とする円の虚部が正の部分 (答)

(別解)

題意の条件は

$$\frac{z - 6}{z} = r(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{r}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad (r > 0)$$

であるから, $\frac{z-6}{(1+i)z}$ が正の実数となる条件を求めて,

$$\begin{cases} \frac{\bar{z}-6}{(1-i)\bar{z}} = \frac{z-6}{(1+i)z} & \dots\dots ① \\ \operatorname{Re} \frac{z-6}{(1+i)z} = \frac{1}{2} \left(\frac{z-6}{(1+i)z} + \frac{\bar{z}-6}{(1-i)\bar{z}} \right) > 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①を変形して

$$\begin{aligned} ① &\iff (1+i)z(\bar{z}-6) = (1-i)\bar{z}(z-6) \\ &\iff 2iz\bar{z} - 6(1+i)z + 6(1-i)\bar{z} = 0 \\ &\iff z\bar{z} - 3(1-i)z - 3(1+i)\bar{z} = 0 \\ &\iff z(\bar{z}-3+3i) - (3+3i)\bar{z} = 0 \\ &\iff z(\bar{z}-3+3i) - (3+3i)(\bar{z}-3+3i) = (3+3i)(3-3i) \\ &\iff (z-3-3i)(\bar{z}-3+3i) = |3+3i|^2 \\ &\iff |z-(3+3i)|^2 = 18 \\ &\iff |z-(3+3i)| = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

②の両辺に $2(1+i)(1-i)z\bar{z} = 2|(1+i)z|^2 > 0$ をかけて

$$\begin{aligned} ② &\iff (1-i)\bar{z}(z-6) + (1+i)z(\bar{z}-6) > 0 \\ &\iff z\bar{z} - 3(1+i)z - 3(1-i)\bar{z} > 0 \\ &\iff z(\bar{z}-3-3i) - (3-3i)\bar{z} > 0 \\ &\iff z(\bar{z}-3-3i) - (3-3i)(\bar{z}-3-3i) - (3-3i)(3+3i) > 0 \\ &\iff (z-3+3i)(\bar{z}-3-3i) > |3-3i|^2 \\ &\iff |z-(3-3i)|^2 > 18 \\ &\iff |z-(3-3i)| > 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

2円 $|z-(3+3i)| = 3\sqrt{2}$, $|z-(3-3i)| = 3\sqrt{2}$ が2点 $0, 6$ で交わることに注意すると, ①かつ②の表す図形は

$$|z-(3+3i)| = 3\sqrt{2} \text{ かつ } \operatorname{Im}(z) > 0 \quad (\text{答})$$