

定数倍はなぜ無視されるのか？(整式の除法)

整式の問題において、

$4xy$ と $6xz$ の最大公約数は $2x$ と x のどちらなのか

で悩んだり、

$(x+1)(x+2)$ は $2(x+1)$ で割り切れる

と言われて戸惑った経験はないだろうか。

実は、整式の倍数、約数、除法の考察において、

0でない定数倍は1と同一視する

ことを前提としているのである。上の例において、約数については $2x$ と x 、 $x+1$ と $2(x+1)$ は区別しないのである。そのような約束がどこから出てきたのかと言えば、

整式を整数と同じように扱う

と言い出したときから必然的にそうになってしまうのである。

お手本となった整数の場合を振り返ってみると、除法の基礎にあるのは

任意の整数 a, b ($b \neq 0$) に対して、

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

を満たす整数 q, r が一意に存在する

という定理である。条件式のほうに目が行きがちであるが、ここで大事なことは

どのような(0でない)2つの整数を持ってきても割り算できる

ということである。

この原則を整式についてもあてはめると、

どのような単項式 ax^m, bx^n を持ってきても割り算できる

というルールが必然的に定まってしまう。このことは、 $a \neq 0, b \neq 0$ であれば、 $\frac{a}{b}$ も $\frac{b}{a}$ も値が存在するような数の範囲で考えなければいけない、ということの意味する。したがって、整式の係数は

加減乗除について閉じている有理数や実数の範囲で考える

ことにするのである。加減乗除について閉じている数の集合の中では、0以外は互いに割り切れるので倍数・約数の概念はなくなり、上の例のように1倍も2倍も同じということになる。

逆に、整式の定数倍の違いを区別してしまうと

$$x^2 + x + 1 = (2x + 1) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}$$

のような計算はできなくなり、割り算できるものとできないものとの判別を迫られて、とても「整数のように」気軽には扱えなくなってしまう。