

1 (方程式の解)

- (1) 方程式 $4x + 1 = 7(x + 1)$ を解け。
- (2) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1) = 0$ を満たす実数 x を求めよ。
- (3) x の方程式 $(a^2 - 1)x = a - 1$ (a は定数) を解け。

2 (不等式と大小比較)

- (1) 不等式 $-3x + 7 > -5x + 4$ を解け。
- (2) 不等式 $4x + 5 \geq 7x + 11$ を解け。
- (3) $\frac{10}{13}$ と $\frac{13}{17}$ の大小を比べよ。

3 (絶対値を含む方程式・不等式)

次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x - 2| = 5$

(2) $|x - 1| \leq 3$

(3) $|x + 2| = -2x + 1$

(4) $|2x - 1| > x + 1$

(5) $|x - 2| + |x - 5| = 9$

4 (分数方程式・分数不等式)

(1) 方程式 $\frac{x-4}{x-1} + \frac{8}{x-2} = \frac{3}{(x-1)(x-2)}$ を解け。

(2) 不等式 $\frac{x^2 - 2x + 7}{x + 1} < x$ を解け。

5 (連立1次方程式)

次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y - 3z = -10 \\ x - y + 2z = 11 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} ax + (a-1)y = 3a-1 \\ (a-1)x + (a+2)y = 3a \end{cases} \quad (a \text{ は定数})$$

6 (連立不等式)

$$(1) \text{ 連立不等式 } \begin{cases} |x-1| > 2 \\ 3x+4 \leq 5x+7 \\ 8x-4 \leq 5x+6 \end{cases} \text{ を解け。}$$

(2) x についての連立不等式

$$\begin{cases} a+3 \leq x \leq 7-3a \\ 3a+1 < x < 4a+6 \end{cases}$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。(3) 「 $x > 1$ ならば $ax < b$ 」が成り立つような実数 a, b についての条件を求めよ。

7 (2次方程式)

(1) 次の2次方程式を解け。

(i) $x^2 + 10x + 21 = 0$

(ii) $5x^2 + 7x - 6 = 0$

(iii) $x^2 + 6x + 9 = 0$

(iv) $x^2 + x - 1 = 0$

(v) $7x^2 - 21x + 9 = 0$

(vi) $3x^2 + 4x + 3 = 0$

(2) k を定数とするとき, 方程式 $k(x^2 + 1) = 4x$ を満たす実数 x の個数を求めよ。(3) 2次方程式 $x^2 + ax + 3 - a = 0$ が重解をもつような a の値とその重解を求めよ。

8 (2次不等式)

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 - 6x + 8 > 0$

(2) $2x^2 - 5x + 2 < 0$

(3) $5x^2 - 15x + 9 \leq 0$

(4) $x^2 + 4x + 4 > 0$

(5) $5x^2 - 4x + 1 \leq 0$

9 (根号を含む方程式・不等式)

(1) 方程式 $\sqrt{x+2} = 2(x-1)$ を解け。

(2) 不等式 $x+2 < \sqrt{x+4}$ を解け。

(3) 2数の大小を比べよ。

(i) $9\sqrt{3}$, $7\sqrt{5}$ (ii) $\frac{3}{2}$, $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

10 (連立方程式の技巧)

次の連立方程式を解け。

(1)
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 6 \\ z + x = 7 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 - xy + y^2 = 19 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x = 2 - y^2 \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - 4y + 2z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$

(5)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0 \end{cases}$$

1 確認：変数 x を含む等式 $f(x) = 0$ を、「 $f(x) = 0$ を満たす x の値を考察する」という観点でとらえるとき、 x を未知数とする方程式という。方程式を満たす x の値それぞれを解または根という。方程式の解という場合は、解全体の集合を指す。一般に、「方程式を解け」「方程式の解を求めよ」とあれば、解全体を答えなければならない。

方程式を解くには、次に挙げるような等式の性質を用いる：

$$1^\circ a = b \iff a + c = b + c, \quad a = b \iff a - c = b - c$$

$$2^\circ c \neq 0 \text{ のとき}, \quad ac = bc \iff a = b, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \iff a = b$$

$$3^\circ ab = 0 \iff a = 0 \text{ または } b = 0$$

ここで、注意すべき点は方程式を解く際の変形はすべて同値変形によることである。同値変形とは、条件や意味合いを損なうことなく式表示を変えることである。

性質 1° は、実際の計算においては

$$a + c = b \iff a = b - c$$

と(符号が変えて)他辺に移動される形で用いることが多く、移項と呼ばれる。

x の方程式 $ax = b$ の解は

$$a \neq 0 \text{ のとき}, \quad x = \frac{b}{a} \text{ (ただ一つ)}$$

$a = 0$ かつ $b = 0$ のとき、任意の数 x が解(不定)

$a = 0$ かつ $b \neq 0$ のとき、解なし(不能)

となる。方程式の解の意味を考えると明らかであるが、整理して覚えておこう。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad 4x + 1 = 7(x + 1) &\iff 4x + 1 = 7x + 7 \\ &\iff 4x - 7x = 7 - 1 \\ &\iff -3x = 6 \iff x = -2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x \text{ は実数であるから } x^2 + 1 > 0 \text{ であることに注意すると,} \\ (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1) = 0 &\iff (x - 1)(x - 2) = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \text{ または } x - 2 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ または } 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (i) $a^2 - 1 \neq 0$ のとき

$$x = \frac{a - 1}{a^2 - 1} = \frac{a - 1}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{1}{a + 1}$$

(ii) $a^2 - 1 = a - 1 = 0$ のとき、方程式は $0x = 0$ となって、任意の数が解となる。

(iii) $a^2 - 1 = 0$ かつ $a - 1 \neq 0$ のとき、方程式は $0x = \frac{1}{a + 1}$ となって解なし。

以上をまとめて、求める解は

$$a \neq \pm 1 \text{ のとき } x = \frac{1}{a + 1}, \quad a = 1 \text{ のとき解は任意, } a = -1 \text{ のとき解なし} \quad (\text{答})$$

2 確認：数量間の大小関係を $<$, $>$, \leq , \geq を用いて表した式を不等式といい，変数 x を含む不等式を満たす x の値や範囲を不等式の解という。不等式の場合は，「等式」と「方程式」のように用途によって名称を区別することはないので，状況に応じて意味合いを判断する必要がある。

不等式を解くには，次に挙げるような不等式の性質を用いる：

$$1^\circ a < b \iff a + c < b + c, \quad a < b \iff a - c < b - c$$

$$2^\circ c > 0 \text{ のとき}, \quad ac < bc \iff a < b, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \iff a < b$$

$$3^\circ c < 0 \text{ のとき}, \quad ac < bc \iff a > b, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \iff a > b$$

4° a, b が実数のとき

$$ab > 0 \iff "a > 0 \text{ かつ } b > 0" \text{ または } "a < 0 \text{ かつ } b < 0"$$

$$ab < 0 \iff "a > 0 \text{ かつ } b < 0" \text{ または } "a < 0 \text{ かつ } b > 0"$$

方程式の解法と同様，不等式を解く際の変形はすべて同値変形でなければならない。

性質 1° は，実際の計算においては

$$a + c < b \iff a < b - c, \quad a < b + c \iff a - c < b$$

と変形されることが多く，(方程式の場合と同様)移項と呼ばれる。これを

$$a < b \iff a - b < 0, \quad a > b \iff a - b > 0$$

とみることにより，2つの数や式の大小を比較することができる。

解答：

$$(1) \quad -3x + 7 > -5x + 4 \iff -3x + 5x > 4 - 7$$

$$\iff 2x > -3$$

$$\iff x > -\frac{3}{2} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad 4x + 5 \geq 7x + 11 \iff 4x - 7x \geq 11 - 5$$

$$\iff -3x \geq 6$$

$$\iff x \leq -2 \quad (\text{答})$$

(3) 2数の差をとって0と比べると，

$$\frac{10}{13} - \frac{13}{17} = \frac{10 \times 17 - 13 \times 13}{13 \times 17} = \frac{170 - 169}{221} = \frac{1}{221} > 0$$

となるから，

$$\frac{10}{13} > \frac{13}{17} \quad (\text{答})$$

3 確認：数直線上で 0 と実数 x との距離を x の絶対値といい、記号 $|x|$ で表す。実際の計算では、 a を正の定数とするとき

$$|x| = a \iff x = \pm a \quad (x = a \text{ または } x = -a)$$

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

$$|x| > a \iff x < -a \text{ または } x > a$$

が成り立つことを用いる。一般には、

$$|y| = \begin{cases} -y & (y \leq 0) \\ y & (y \geq 0) \end{cases}$$

として絶対値をはずしてから式変形する。

なお、複素数 z の絶対値 $|z|$ についても同様に、複素平面上で原点から点 z までの距離と定義されるが、このファイルでは扱わない。

解答：

$$(1) |x - 2| = 5 \iff x - 2 = 5 \text{ または } x - 2 = -5 \iff x = 7 \text{ または } -3 \quad (\text{答})$$

$$(2) |x - 1| \leq 3 \iff -3 \leq x - 1 \leq 3 \iff -2 \leq x \leq 4 \quad (\text{答})$$

$$(3) |x + 2| = \begin{cases} -(x + 2) & (x \leq -2) \\ x + 2 & (x \geq -2) \end{cases} \text{であることを考えて}$$

(i) $x \leq -2$ のとき

$$-x - 2 = -2x + 1 \text{ より } x = 3 \text{ となって, } x \leq -2 \text{ に反するから不適。}$$

(ii) $x \geq -2$ のとき

$$x + 2 = -2x + 1 \text{ より } x = -\frac{1}{3} \text{ となって, } x \geq -2 \text{ を満たす。}$$

$$\text{以上より, 求める解は } x = -\frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

$$(4) (i) x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, } |2x - 1| = -(2x - 1) = -2x + 1 \text{ であり,}$$

$$-2x + 1 > x + 1 \iff -2x - x > 1 - 1 \iff -3x > 0 \iff x < 0$$

$$(ii) x \geq \frac{1}{2} \text{ のとき, } |2x - 1| = 2x - 1 \text{ であり,}$$

$$2x - 1 > x + 1 \iff 2x - x > 1 + 1 \iff x > 2$$

$$\therefore x < 0 \text{ または } x > 2 \quad (\text{答})$$

$$(5) |x - 2| + |x - 5| = \begin{cases} -(x - 2) - (x - 5) = -2x + 7 & (x \leq 2) \\ (x - 2) - (x - 5) = 3 & (2 \leq x \leq 5) \\ (x - 2) + (x - 5) = 2x - 7 & (x \geq 5) \end{cases} \text{ であるから,}$$

$$(i) x \leq 2 \text{ のとき } -2x + 7 = 9 \quad \therefore x = -1$$

$$(ii) 2 \leq x \leq 5 \text{ のとき } 3 = 9 \quad \therefore \text{解なし}$$

$$(iii) x \geq 5 \text{ のとき } 2x - 7 = 9 \quad \therefore x = 8$$

$$\text{以上より, 求める解は } x = -1 \text{ または } 8 \quad (\text{答})$$

4 確認：数学 I の教科書には，分数の方程式・不等式は(例題として)載っていないが，いつの間にか習い終わったことにされている。本問では，分数計算における同値変形の基本の部分だけ確認しておきたい。

原則的には 1, 2 と同様であるが，分数表示でまとめるならば，

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff P(x) = 0 \text{ かつ } Q(x) \neq 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \iff \begin{aligned} & \text{“} P(x) > 0 \text{ かつ } Q(x) > 0 \text{”} \\ & \text{または “} P(x) < 0 \text{ かつ } Q(x) < 0 \text{”} \end{aligned}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \iff \begin{aligned} & \text{“} P(x) > 0 \text{ かつ } Q(x) < 0 \text{”} \\ & \text{または “} P(x) < 0 \text{ かつ } Q(x) > 0 \text{”} \end{aligned}$$

解答：

(1) $(x-1)(x-2) \neq 0$ のもとで，両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけて

$$(x-4)(x-2) + 8(x-1) = 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$x \neq 1, 2$ より

$$x = -3 \quad (\text{答})$$

(2) (i) $x < -1$ のとき

$$\frac{x^2 - 2x + 7}{x+1} < x \iff x^2 - 2x + 7 > x(x+1)$$

$$\iff -3x > -7 \iff x < \frac{7}{3}$$

$x < -1$ を考えあわせて

$$x < -1$$

(ii) $x > -1$ のとき

$$\frac{x^2 - 2x + 7}{x+1} < x \iff x^2 - 2x + 7 < x(x+1)$$

$$\iff -3x < -7 \iff x > \frac{7}{3}$$

$x > -1$ を考えあわせて

$$x > \frac{7}{3}$$

以上 (i), (ii) より

$$x < -1 \text{ または } x > \frac{7}{3} \quad (\text{答})$$

(注) 分母は 0 にならないから，初めから $x = -1$ の場合は除外してある。

5 確認：2つ以上の方程式をすべて満たす値(共通解)を考えると、その方程式の組を連立方程式という。連立方程式の解くには、(代入法や加減法により)変数を1つずつ消去して行き、1変数方程式に帰着させることが基本である。

連立方程式の一方が $y = f(x)$ の形にできるときは、他方の式に代入して

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} F(x, f(x)) = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$$

と同値変形できる。このような変形法を一般に代入法という。

a, b, c, d が $ad - bc \neq 0$ を満たす定数であるとき、

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} aF(x, y) + bG(x, y) = 0 \\ cF(x, y) + dG(x, y) = 0 \end{cases}$$

により(x だけの式および y だけの式に直す方向で)同値変形する方法を一般に加減法という。(3)のように、係数に未知定数が含まれている場合は、

$$ax = b \text{ かつ } ay = c \text{ (係数がそろうことに注意)}$$

の形に直してから 1 (3)のように論じるのが基本であり、加減法が有効である。

解答：

$$(1) \begin{cases} 3x + y = 9 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 4x + 3y = 7 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

(代入法による解法)

①より $y = -3x + 9$ であるから、②に代入して

$$4x + 3(-3x + 9) = 7$$

$$4x - 9x = 7 - 27$$

$$-5x = -20 \quad \therefore x = 4$$

①より

$$y = -3 \times 4 + 9 = -3$$

よって、求める解は

$$(x, y) = (4, -3) \text{ (答)}$$

(加減法による解法)

① $\times 3$ - ② より

$$5x = 20 \quad \therefore x = 4$$

① $\times 4$ - ② $\times 3$ より

$$-5y = 15 \quad \therefore y = -3$$

よって、求める解は

$$(x, y) = (4, -3) \text{ (答)}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x + y - 3z = -10 & \dots\dots ① \\ x - y + 2z = 11 & \dots\dots ② \\ 2x + y - z = 3 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

① - ③ × 3 より $-5x - 2y = -19$ ④

② + ③ × 2 より $5x + y = 17$ ⑤

④ + ⑤ × 2 より $5x = 15 \quad \therefore x = 3$ ⑥

④ + ⑤ より $-y = -2 \quad \therefore y = 2$ ⑦

⑥, ⑦ を ③ に代入して $z = 2x + y - 3 = 5$

以上より, 求める解は $(x, y, z) = (3, 2, 5)$ (答)

(注) 同値関係は $①かつ②かつ③ \iff ③かつ④かつ⑤ \iff ③かつ⑥かつ⑦$ となっている。

$$(3) \quad \begin{cases} ax + (a - 1)y = 3a - 1 & \dots\dots ① \\ (a - 1)x + (a + 2)y = 3a & \dots\dots ② \end{cases}$$

① × (a + 2) - ② × (a - 1) より $\{a(a + 2) - (a - 1)^2\}x = (3a - 1)(a + 2) - 3a(a - 1)$
 $\therefore (4a - 1)x = 2(4a - 1)$

② × a - ① × (a - 1) より $\{a(a + 2) - (a - 1)^2\}y = 3a^2 - (3a - 1)(a - 1)$
 $\therefore (4a - 1)y = 4a - 1$

$a = \frac{1}{4}$ のとき, 連立方程式 {①, ②} は $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = -\frac{1}{4}$ かつ $-\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}y = \frac{3}{4}$

となって, 単独の方程式 $x - 3y = -1$ と同値である。

よって, 求める解は

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \text{ のとき } (x, y) = (3k - 1, k) \text{ (} k \text{ は任意)} \\ a \neq \frac{1}{4} \text{ のとき } (x, y) = (2, 1) \end{cases} \quad (\text{答})$$

6 確認：2つ以上の不等式をすべて満たす値や範囲を考えると、その不等式の組を連立不等式という。連立方程式のような複数の式にわたる同値変形はできないので、原則的には個別に解いて、数直線に図示するなどして共通解を求める。

数直線を図示する場合は、教科書のような帯状グラフよりも、(1)の解答のような棒状グラフの方が見やすい。特に、不等式の個数が増えると、その効果が発揮される。端点については、 \leq や \geq の場合は塗りつぶした丸で表し、 $<$ や $>$ の場合は白抜きの丸で表す。より複雑になると、(数学IIの「図形と方程式」で学ぶように)座標平面上に図示して考えるが、このファイルでは数学Iの範囲の基本確認にとどめる。

(2)では、連立不等式の解の存在条件を確認する。連立不等式

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq b_1 \\ a_2 < x < b_2 \end{cases}$$

が解をもつための条件は、

$$a_1 \leq x \leq b_1, \quad a_1 \leq x < b_2, \quad a_2 < x \leq b_1, \quad a_2 < x < b_2$$

がすべて解 x をもつための条件と考えて、

$$a_1 \leq b_1 \text{ かつ } a_1 < b_2 \text{ かつ } a_2 < b_1 \text{ かつ } a_2 < b_2$$

となる。等号については、両方につく場合に限りつける。

(3)では、不等式の解の(集合としての)包含関係を考える。

解答：

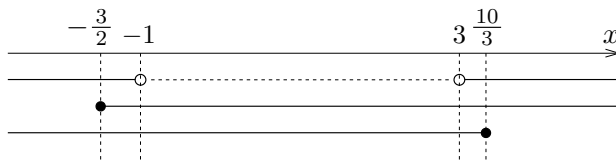
(1) 各不等式を個別に解くと、

$$|x - 1| > 2 \iff x - 1 < -2 \text{ または } x - 1 > 2 \iff x < -1 \text{ または } x > 3$$

$$3x + 4 \leq 5x + 7 \iff 3x - 5x \leq 7 - 4 \iff -2x \leq 3 \iff x \geq -\frac{3}{2}$$

$$8x - 4 \leq 5x + 6 \iff 8x - 5x \leq 6 + 4 \iff 3x \leq 10 \iff x \leq \frac{10}{3}$$

これらを図示すると、



となるから、連立不等式の解は

$$-\frac{3}{2} \leq x < -1 \text{ または } 3 < x \leq \frac{10}{3} \quad (\text{答})$$

(2) x についての連立不等式

$$\begin{cases} a + 3 \leq x \leq 7 - 3a \\ 3a + 1 < x < 4a + 6 \end{cases}$$

が解をもつための条件は,

$$\begin{cases} a + 3 \leq 7 - 3a & \dots\dots \textcircled{1} \\ a + 3 < 4a + 6 & \dots\dots \textcircled{2} \\ 3a + 1 < 7 - 3a & \dots\dots \textcircled{3} \\ 3a + 1 < 4a + 6 & \dots\dots \textcircled{4} \end{cases}$$

がすべて成り立つことである。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff a + 3a \leq 7 - 3 \iff 4a \leq 4 \iff a \leq 1 \\ \textcircled{2} &\iff a - 4a < 6 - 3 \iff -3a < 3 \iff a > -1 \\ \textcircled{3} &\iff 3a + 3a < 7 - 1 \iff 6a < 6 \iff a < 1 \\ \textcircled{4} &\iff 3a - 4a < 6 - 1 \iff -a < 5 \iff a > -5 \end{aligned}$$

であるから, 連立不等式が解をもつような a の範囲は

$$-1 < a < 1 \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad ax < b \iff \begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & x > \frac{b}{a} \\ a = 0 \text{ のとき} & 0 < b \quad (b > 0 \text{ ならば } x \text{ は任意}) \\ a > 0 \text{ のとき} & x < \frac{b}{a} \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} &\text{「} x > 1 \text{ ならば } ax < b \text{」} \\ &\iff \{x \mid x > 1\} \subset \{x \mid ax < b\} \\ &\iff \text{“} a < 0 \text{ かつ } \frac{b}{a} \leq 1 \text{” または “} a = 0 \text{ かつ } b > 0 \text{”} \\ &\iff \text{“} a < 0 \text{ かつ } b \geq a \text{” または “} a = 0 \text{ かつ } b > 0 \text{”} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

7 確認：2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を解くには，因数分解して等式の性質

$$AB = 0 \iff A = 0 \text{ または } B = 0$$

を用いることが基本である。因数分解が容易でないときは，平方完成して

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ ax^2 + bx + c = 0 &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

と解けばよい。これは公式として覚えておき，使えるようにしておこう。なお，(v)，(vi)のように，公式の適用より上のように計算する方がやりやすい場合もあるので注意。

本来， $\sqrt{\quad}$ は実数値に用いる記号であるから，上述において $b^2 - 4ac < 0$ のときには $\sqrt{b^2 - 4ac}$ と表せない。そこで，

$$b^2 - 4ac < 0 \text{ のとき } x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

と表す。ここで， i は平方すると -1 となる数を形式的に表したもので虚数単位という。

一般に，実数 x, y と虚数単位 i を用いて $x + yi$ と表される数を複素数といい， x を実部， y を虚部という。虚部が 0 である複素数は実数であり，虚部が 0 でない複素数を虚数という。複素数も実数と同様に加減乗除が定義できるので，現実の数と認められる。特にことわりがなければ，方程式は複素数の範囲で解くのが常識である。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して， $b^2 - 4ac$ を判別式 (discriminant) という。判別式には D を用いることが多いが，決まっているわけではないので，「2次方程式の判別式を D とする」とことわってから用いるようにする。

a, b, c が実数のとき，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について

$$\text{相異なる 2 実数解をもつ} \iff b^2 - 4ac > 0$$

$$\text{実数の重解をもつ} \iff b^2 - 4ac = 0$$

$$\text{相異なる 2 虚数解をもつ} \iff b^2 - 4ac < 0$$

であることが成り立つ。 a, b, c が実数であるかどうかに関係なく，

$$2 \text{ 次方程式 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ が重解をもつ} \iff b^2 - 4ac = 0$$

は成り立つ。判別式は，もともと「重解を判別するもの」という意味である。

2次方程式の多項式としての構造から，

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2解が $\alpha, \beta \iff ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ という関係が成り立つ。ここで，「2解」とは重解の場合も含むことに注意する。

解答：

$$(1) (i) \quad x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ または } -7 \quad (\text{答})$$

$$(ii) \quad 5x^2 + 7x - 6 = (x + 2)(5x - 3) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ または } \frac{3}{5}$$

$$(iii) \quad x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ (重解)} \quad (\text{答})$$

(注) 多項式の方程式の場合は、重複度まで含めて答えるのが原則である。

(iv) 解の公式より

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{答})$$

(注) (v)以降のように、

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1$$

と平方完成して解いてもよい。

$$\begin{aligned} (v) \quad 7x^2 - 21x + 9 &= 7\left(x^2 - 3x + \frac{9}{7}\right) \\ &= 7\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{7}\right\} \\ &= 7\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{28}\right\} \\ &= 7\left(x - \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) = 0 \\ \therefore x &= \frac{3(\sqrt{7} \pm \sqrt{3})}{2\sqrt{7}} = \frac{3(7 \pm \sqrt{21})}{14} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (vi) \quad 3x^2 + 4x + 3 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + 1\right) \\ &= 3\left\{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1\right\} \\ &= 3\left\{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}\right\} \\ &= 3\left\{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - i^2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2\right\} \\ &= 3\left(x + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i\right)\left(x + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}i\right) = 0 \\ \therefore x &= \frac{-2 \pm \sqrt{5}i}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $k(x^2 + 1) = 4x \iff kx^2 - 4x + k = 0$

(i) $k = 0$ のとき

与えられた方程式は 1 次方程式 $-4x = 0$ であり, ただ 1 つの解 $x = 0$ をもつ。

(ii) $k \neq 0$ のとき

判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = 2^2 - k \cdot k$$

$$= -(k+2)(k-2) \begin{cases} > 0 & (-2 < k < 0 \text{ または } 0 < k < 2) \\ = 0 & (k = -2 \text{ または } k = 2) \\ < 0 & (k < -2 \text{ または } k > 2) \end{cases}$$

以上をまとめて, $k(x^2 + 1) = 4x$ を満たす実数 x の個数は

$$\begin{cases} -2 < k < 0 \text{ または } 0 < k < 2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ k = -2 \text{ または } k = 0 \text{ または } k = 2 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \quad (\text{答}) \\ k < -2 \text{ または } k > 2 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

(注) 2 次不等式の解法は次の [8] で扱う。

(3) 2 次方程式 $x^2 + ax + 3 - a = 0$ が重解をもつとき, 重解を b とすると

$$x^2 + ax + 3 - a = (x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$$

が成り立つから, 係数を比べて

$$\begin{cases} a = -2b & \dots\dots \textcircled{1} \\ 3 - a = b^2 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①を②に代入して a を消去すると

$$\begin{aligned} 3 - (-2b) &= b^2 \\ b^2 - 2b - 3 &= 0 \\ (b+1)(b-3) &= 0 & \therefore b = -1 \text{ または } 3 \end{aligned}$$

①より

$$b = -1 \text{ のとき } a = 2, \quad b = 3 \text{ のとき } a = -6$$

以上より,

$$(a, \text{重解}) = (2, -1), (-6, 3) \quad (\text{答})$$

(注) 重解条件

$$(\text{判別式}) = a^2 - 4(3 - a) = 0$$

により先に a の値を求めた上で, それぞれの値を $x^2 + ax + 3 - a = 0$ に代入して重解を求めてもよい。実質的には, 上の解答で①を $(b = -\frac{a}{2} \text{ として})$ 代入して b を消去した計算と同じであり, 別解というほどではない。(本問のように重解は求めず) a の値だけ求めるのであれば, 判別式を用いる方が早い。

8 確認： $\alpha < \beta$ のとき $(x - \alpha)(x - \beta)$ の符号は、次の表のようになる：

x	$x < \alpha$	$x = \alpha$	$\alpha < x < \beta$	$x = \beta$	$\beta < x$
$x - \alpha$	-	0	+	+	+
$x - \beta$	-	-	-	0	+
$(x - \alpha)(x - \beta)$	+	0	-	0	+

公式としてまとめると、

$$(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \iff x < \alpha \text{ または } x > \beta$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \iff \alpha < x < \beta$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) \geq 0 \iff x \leq \alpha \text{ または } x \geq \beta$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) \leq 0 \iff \alpha \leq x \leq \beta$$

以上の形に帰着されない場合には、「不等式を満たす値や範囲」という解の定義に基づいて考えればよい。2次方程式や2次不等式のグラフを用いる解法については、「2次関数」のファイルで扱う。

解答：

$$(1) \quad x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) > 0 \iff x < 2 \text{ または } x > 4 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad 2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2) < 0 \iff \frac{1}{2} < x < 2 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad 5x^2 - 15x + 9 &= 5(x^2 - 3x) + 9 \\ &= 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9 \\ &= 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ &= 5\left(x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}\right) \leq 0 \\ \therefore \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) &\leq x \leq \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) 分母の有理化と通分を行なうと

$$\frac{3(5 - \sqrt{5})}{10} \leq x \leq \frac{3(5 + \sqrt{5})}{10}$$

$$(4) \quad x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 > 0 \text{ の解を求めると,}$$

x は -2 以外のすべての実数 (答)

$$(5) \quad 5x^2 - 4x + 1 = 5\left(x^2 - \frac{4}{5}x\right) + 1 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} + 1 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}$$

は正の実数値しかとり得ないから、

$$5x^2 - 4x + 1 \leq 0 \text{ は解なし (答)}$$

9 確認：根号を含む方程式・不等式を扱う際の基本は

$$\sqrt{A} = B \iff A = B^2 \text{ かつ } B \geq 0$$

$$A \geq 0, B \geq 0 \text{ のとき } A < B \iff A^2 < B^2, \quad A \leq B \iff A^2 \leq B^2$$

である。一般に、方程式は複素数の範囲で考えるが、 $\sqrt{\quad}$ は実数値にのみ使える記号なので、根号を含む方程式は、例外的に実数の範囲で解くことになる。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt{x+2} = 2(x-1) &\iff x+2 = 4(x-1)^2 \text{ かつ } 2(x-1) \geq 0 \\ &\iff 4x^2 - 9x + 2 = 0 \text{ かつ } x \geq 1 \\ &\iff (4x-1)(x-2) = 0 \text{ かつ } x \geq 1 \\ &\iff x = 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x+4}$ が実数であることより

$$x+4 \geq 0 \quad \therefore x \geq -4$$

(i) $x+2 < 0$ のとき、与えられた不等式を満たし、

$$-4 \leq x < -2$$

(ii) $x+2 \geq 0$ のとき

$$(x+2)^2 < x+4$$

$$x^2 + 3x < 0$$

$$x(x+3) < 0 \quad \therefore -3 < x < 0$$

場合分けの範囲に注意して

$$-2 \leq x < 0$$

(i) または (ii) より

$$-4 \leq x < 0 \quad (\text{答})$$

(3) (i) $9\sqrt{3} = \sqrt{9^2 \times 3} = \sqrt{243}$, $7\sqrt{5} = \sqrt{7^2 \times 5} = \sqrt{245}$ であるから、

$$9\sqrt{3} < 7\sqrt{5} \quad (\text{答})$$

$$(ii) \quad \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{9 - 4\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{81} - \sqrt{80}}{6} > 0 \text{ より}$$

$$\frac{3}{2} > \frac{2\sqrt{5}}{3} \quad (\text{答})$$

10 確認：連立方程式の処理にあたっては、これまで述べてきたこととは別に、知っておいた方がよい技巧がある。本問ではそのような技巧を扱う。

- (1) $x + y = a$, $y + z = b$, $z + x = c$ のひとそろいになっている連立方程式を、俗に循環型(連立方程式)という。循環型の場合は、すべての式を加えて $x + y + z$ を導いてから各式を引けば解が求まる。
- (2) 連立方程式の各式が x, y についての対称式である場合は、基本対称式 $x + y$, xy の値を求めて、 x, y を 2 解とする 2 次方程式を導くことにより、一度に求めることができる。
- (3) 連立方程式の 2 式が互いに変数を入れ替えた形になっている場合は、和と差で組むのが定石である：

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x, y) + f(y, x) = 0 \\ f(x, y) - f(y, x) = 0 \end{cases}$$

$f(x, y) - f(y, x)$ は交代式($x - y$ でくくれば対称式)となり、 $f(x, y) + f(y, x)$ は対称式となるから、(2)に帰着される。

この技巧は、5 で確認した加減法による同値変形の特別なケースにすぎないが、この形で考えるシーンに出会うことが多いので、是非とも押さえておきたい。

- (4)のように 1 次方程式と 2 次方程式が混ざっているときは、連立 1 次方程式の部分の解くことにより 1 つの文字で表し、2 次方程式に代入すればよい。
- (5) 一般に、連立方程式の処理は 1 次方程式に注目して代入法によって文字を減らすか、積が 0 の形の式に注目(または因数分解)してより低い次数の方程式に帰着させるのが基本である。ところが、ここに挙げた 2 円の方程式の場合は、一見原則通りには解けないかに思える。この場合は、2 式の差をとって 1 次方程式を導いてから、組み換えを行なえばよい。

そのほかにも基本的な処理技巧はいくつか残されているが、それらはおいおい各該当分野の基本解法演習ファイルの中で確認していくことにする。

解答：

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = 5 & \dots\dots ① \\ y + z = 6 & \dots\dots ② \\ z + x = 7 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ より

$$2x + 2y + 2z = 18 \quad \therefore x + y + z = 9 \quad \dots\dots ④$$

④ - ② より $x = 3$, ④ - ③ より $y = 2$, ④ - ① より $z = 4$ と求まるから、

$$x = 3, y = 2, z = 4 \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{cases} x + y = 8 & \dots\dots ① \\ x^2 - xy + y^2 = 19 & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy \text{ であるから, ①を②に代入して}$$

$$8^2 - 3xy = 19 \quad \therefore xy = 15 \quad \dots\dots \text{③}$$

①, ③より, x, y を2解とする t の2次方程式は

$$(t - x)(t - y) = 0$$

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \quad \therefore t^2 - 8t + 15 = 0$$

積が15, 和が8の組を見つけると3と5であるから,

$$(t - 3)(t - 5) = 0$$

この2解が x, y であるから,

$$(x, y) = (3, 5), (5, 3) \quad (\text{答})$$

$$(3) \begin{cases} y = 2 - x^2 & \dots\dots \text{①} \\ x = 2 - y^2 & \dots\dots \text{②} \end{cases}$$

② - ①より

$$x - y = x^2 - y^2$$

$$= (x - y)(x + y)$$

$$(x - y)(x + y - 1) = 0$$

$$\therefore x = y \text{ または } x + y = 1 \quad \dots\dots \text{③}$$

① + ②より

$$x + y = 4 - (x^2 + y^2)$$

$$= 4 - (x + y)^2 + 2xy \quad \dots\dots \text{④}$$

題意の連立方程式は

$$\text{①かつ②} \iff \text{③かつ④}$$

と同値変形されて, $x = y$ のとき④より

$$2x = 4 - 2x^2$$

$$2(x^2 + x - 4) = 2(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = y = -2 \text{ または } x = y = 1$$

$x + y = 1$ のとき④より

$$1 = 4 - 1^2 + 2xy \quad \therefore xy = -1$$

x, y を2解とする t の2次方程式は

$$(t - x)(t - y) = 0$$

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \quad \therefore t^2 - t - 1 = 0$$

解の公式より

$$(x, y) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \right) \quad (\text{複号同順})$$

以上より, 求める解は

$$(x, y) = (-2, -2), (1, 1), \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

(答)

$$(4) \quad \begin{cases} 2x - 3y + z = -1 & \dots\dots ① \\ 3x - 4y + 2z = 1 & \dots\dots ② \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

① × 2 - ② より

$$x - 2y = -3 \quad \therefore x = 2y - 3 \quad \dots\dots ④$$

① × 3 - ② × 2 より

$$-y - z = -5 \quad \therefore z = -y + 5 \quad \dots\dots ⑤$$

④, ⑤ を ③ に代入して

$$(2y - 3)^2 + y^2 + (-y + 5)^2 = 14$$

$$6y^2 - 22y + 20 = 0$$

$$3y^2 - 11y + 10 = 0$$

$$(y - 2)(3y - 5) = 0 \quad \therefore y = 2 \text{ または } \frac{5}{3}$$

④, ⑤ に代入して

$$(x, y, z) = (1, 2, 3), \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) \quad (\text{答})$$

$$(5) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 & \dots\dots ① \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

① - ② より

$$4x + 4y - 24 = 0 \quad \therefore x + y - 6 = 0 \quad \dots\dots ③$$

ここで,

$$① \text{ かつ } ② \iff ① \text{ かつ } ③$$

と言い換えられる。

③を①に代入して y を消去すると,

$$x^2 + (-x + 6)^2 - 2x - 4(-x + 6) = 0$$

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ または } 3$$

③より y も求めて,

$$(x, y) = (2, 4), (3, 3) \quad (\text{答})$$