

1 (累乗根)

(1) $\sqrt[3]{216}$ を簡単にせよ。(2) a, b を正の実数, n を 3 以上の自然数とするととき,

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

が成り立つことを定義にもとづいて示せ。

(3) 8 の 6 乗根をすべて求めよ。

2 (指数法則)

次の式を計算せよ。

(1) $8^{\frac{5}{4}} \div 16^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}}$

(2) $4^{-\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}} \div \sqrt{16^{-3}}$

(3) $\frac{8}{3} \sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

(4) $\frac{\sqrt[3]{a^2} \sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a}} \quad (a > 0)$

(5) $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}} \quad (a > 0)$

(6) $(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}) \quad (a > 0, b > 0)$

3 (指数関数のグラフ)

次の関数のグラフをかけ。また, (2), (3) のグラフについて, (1) のグラフとどのような位置関係にあるかを答えよ。

(1) $y = 3^x$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(3) $y = 3 \cdot 3^x$

4 (指数方程式・指数不等式)

次の方程式, 不等式を解け。

(1) $(2^x)^x = 4 \cdot 2^x$

(2) $4^x - 7 \cdot 2^{x+2} - 128 = 0$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 9\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 32 \leq 0$

(4) $a^{2x-2} + a^{x-1} < 2$ (a は 1 でない正の定数)

5 (対数の定義)

(1) $2^x = 3$ を満たす x の値を求めよ。(2) $\log_{\sqrt{2}} 8$ および $3^{\log_3 5}$ を簡単にせよ。

(3) 次の公式を証明せよ。

$$(i) \log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (ii) \log_a x^p = p \log_a x \quad (iii) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

6 (対数の計算)

(1) 次の式を簡単にせよ。

(i) $\frac{1}{2} \log_3 75 + \log_3 \frac{\sqrt[3]{3}}{5}$

(ii) $4 \log_3 \sqrt{10} + \log_{\frac{1}{3}} 25 + \log_3 \frac{9}{4}$

(iii) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$

(2) $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ のとき, 次の値を a , b で表せ。

(iv) $3 \log_{10} 6 - \log_{10} 96 + \log_{10} 27$

(v) $\log_{15} 12$

7 (対数関数のグラフ)

- (1) $y = 3^x$ のグラフをもとにして, $y = \log_3 x$ のグラフをかけ。
- (2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフをもとにして, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフをかけ。
- (3) $y = \log_3 3x$, $y = \log_3(x+1)$, $y = \log_3 \frac{1}{x}$ のグラフは, $y = \log_3 x$ のグラフとそれぞれどのような位置関係にあるか。

8 (対数方程式・対数不等式)

次の方程式, 不等式を解け。

- (1) $(\log_3 x)^2 + \log_{\frac{1}{3}} x - 2 = 0$
- (2) $\frac{1}{2} \log_2 x + \log_4(2x - 3) = \frac{1}{2} \log_2 14$
- (3) $\log_{\frac{1}{4}}(2+x) - 1 \leq \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$
- (4) $\log_a(x+1) > \log_{a^2}(2x^2 + x - 1)$ (a は 1 でない正の定数)

9 (同符号の多項式への置き換え)

- (1) 不等式 $(\log_2 x)^3 - \log_2 x \leq 0$ を解け。
- (2) $\log_x y + 2\log_y x - 3 > 0$ を満たす点 (x, y) の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

10 (最大・最小)

- (1) 関数 $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 1$ の最小値を求めよ。
- (2) 関数 $f(x) = (\log_2 2x)^2 + \log_4 x$ の最小値を求めよ。
- (3) 関数 $f(x) = 2 \cdot 3^x + 8 \cdot 3^{-x}$ の最小値を求めよ。
- (4) $x > 0$ のとき, $4\sqrt{2x} + \frac{1}{x}$ の最小値を求めよ。
- (5) $x > 0, y > 0, x + y = 6$ のとき, $\log_2 x + \log_4 y$ の最大値を求めよ。

11 (大小比較)

大小を比較せよ。

(1) $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{5}}$

(2) $\log_3 4, \frac{4}{3}$

(3) $\frac{2}{3}, \log_2 \sqrt{3}, \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}}, \log_{\sqrt{3}} \sqrt{6}, \log_3 \sqrt{2}$

12 (常用対数)

$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき、以下の各問に答えよ。

(1) 光があるガラス板 1 枚を通過するごとに、その光の強さが $\frac{1}{9}$ だけ失われるものとする。この光が n 枚重ねたガラス板を通過したときの強さが、はじめの光の強さの $\frac{1}{100}$ より小さくなるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) 3^{123} は何桁の整数となるか。また、首位の数字と末尾の数字を求めよ。

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{40}$ を小数で表したとき、はじめて 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また、その数字は何か。

① 確認：2乗して a になる数を a の平方根，3乗して a になる数を a の立方根という。 a の平方根，立方根はそれぞれ x の方程式 $x^2 = a$ ， $x^3 = a$ の解(根)である。 n を2以上の自然数とすると、 n 乗して a になる数を a の n 乗根という。したがって、 n 乗根は a ($\neq 0$) に対して n 個ある。平方根，立方根，4乗根，…を総称して、累乗根という。

n が正の奇数のとき、実数 a の n 乗根で実数のものはただ1つ存在し、それを $\sqrt[n]{a}$ と表す。 n が正の偶数のとき、正の実数 a の n 乗根で実数のものは2つ存在するが、そのうち正のものを $\sqrt[n]{a}$ と表す。 $n = 2$ のときは、単に \sqrt{a} と表す。

正の実数の範囲では、 a の n 乗根と $\sqrt[n]{a}$ は同じ数を指すが、複素数の範囲では a (> 0)の n 乗根と $\sqrt[n]{a}$ は意味が異なるので注意しよう。指数・対数(数学II)の問題として解く場合は実数の範囲を前提とするので、こうした混乱は生じないであろう。

解答：

$$(1) \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6 \quad (\text{答})$$

$$(2) \alpha = \sqrt[n]{a}, \beta = \sqrt[n]{b} \text{ とおくと、定義より}$$

$$\alpha^n = a, \beta^n = b \quad \therefore (\alpha\beta)^n = \alpha^n \beta^n = ab$$

α, β はともに正の実数であるから $\alpha\beta$ も正の実数であり、 $(\alpha\beta)^n = ab$ であるから

$$\alpha\beta = \sqrt[n]{ab} \quad \therefore \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (\text{おわり})$$

$$(3) 8 \text{ の } 6 \text{ 乗根は、方程式 } x^6 = 8 \text{ の解のことであり、}$$

$$x^6 - 8 = (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{2} \text{ または } x^4 + 2x^2 + 4 = 0$$

$x^4 + 2x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - \sqrt{2}x + 2)$ と因数分解できるから、8の6乗根は

$$x = \pm\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2} \quad (\text{答})$$

(注) 極形式を用いて、次のように求めてもよい。

$$x^6 = 8 = (\sqrt{2})^6 \iff \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^6 = 1$$

に注意すると、1の6乗根は

$$\cos(60k)^\circ + i \sin(60k)^\circ \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

であるから、

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \pm 1, \pm \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \pm \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{2}, \pm \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2}, \pm \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}{2} \quad (\text{答})$$

□2 確認： a を正の実数， n を正の整数とすると， a を n 回かけあわせた数を a^n と表すことにすると，正の実数 a ， b と正の整数 m ， n に対して指数法則が成り立つ：

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^n b^n = (ab)^n$$

一般の実数の指数についても，指数法則を満たすように定義する。

まず a^0 ($a > 0$) については

$$a^n = a^{n+0} = a^n a^0 \quad \text{より} \quad a^0 = 1$$

と定まり，負の整数 $-n$ については

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n a^{-n} \quad \text{より} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

と定まる。

次に，正の整数の逆数 $\frac{1}{n}$ については

$$a = (a^{\frac{1}{n}})^n \quad \text{より} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

と定められ，一般の正の有理数 $\frac{m}{n}$ に対して

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

と定められる。

任意の無理数 x に対して，有理数列 $\{x_n\}$ で

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

となるものが存在するから，既に定義されている a^{x_n} (x_n は有理数) をもとに

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$$

と定めればよいと考えられる。しかし，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \text{ は収束するのか？}$$

その極限值は有理数列 $\{x_n\}$ の選び方に依らないのか？

という2点が疑問として残る。残念ながら，その疑問は高校数学の範囲では解決できないので，高校ではこれらが成り立つことを認めて指数を定義している。

まとめると，正の実数 a ， b および任意の実数 x ， y に対して

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x$$

が成り立つように指数を定義することができ，この性質を指数法則という。このようにうまく定義されているので，安心して機械的に計算することができる。

解答：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 8^{\frac{5}{4}} \div 16^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}} &= (2^3)^{\frac{5}{4}} \div (2^4)^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}} \\
 &= 2^{\frac{15}{4}} \div 2^6 \times 2^{\frac{5}{2}} \\
 &= 2^{\frac{15}{4}-6+\frac{5}{2}} \\
 &= 2^{\frac{15-24+10}{4}} \\
 &= 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 4^{-\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}} \div \sqrt{16^{-3}} &= (2^2)^{-\frac{3}{2}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} \div \{(2^4)^{-3}\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2^{-3} \times 3^1 \div 2^{-6} \\
 &= 2^{-3-(-6)} \times 3 \\
 &= 2^3 \times 3 \\
 &= 24 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{8}{3} \sqrt[6]{9} + \sqrt[3]{-24} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} &= \frac{8}{3} (3^2)^{\frac{1}{6}} - (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} + (3^{-2})^{\frac{1}{3}} \\
 &= 8 \times 3^{\frac{1}{3}-1} - (2^3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} \\
 &= 3^{-\frac{2}{3}} (8 - 2 \times 3 + 1) \\
 &= 3^{-\frac{2}{3}} \times 3 \\
 &= 3^{-\frac{2}{3}+1} \\
 &= 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{\sqrt[3]{a^2} \sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a}} = (a^2)^{\frac{1}{3}} (a^3)^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{4+9-1}{6}} = a^2 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}} &= \sqrt{a} \sqrt{\sqrt{a}} \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}} \\
 &= a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{8}} a^{\frac{1}{16}} \\
 &= a^{\frac{8+4+2+1}{16}} = a^{\frac{15}{16}} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(6) 乗法公式を用いて

$$\begin{aligned}
 &(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}) \\
 &= (a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}) \{ (a^{\frac{1}{6}})^2 + a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} + (b^{\frac{1}{6}})^2 \} \\
 &= (a^{\frac{1}{6}})^3 - (b^{\frac{1}{6}})^3 \\
 &= a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

3 確認： a を 1 でない正の定数とすると、実数 x に対して a^x を対応させる関数を x を変数とする指数関数という。複素数の範囲で定義ができないわけではないが、高校の範囲で指数関数 $y = a^x$ と言えば、底 a は 1 でない正の定数、指数 x は実数であるものと仮定する。したがって、指数関数のグラフを考えることができる。

指数関数の増減を調べるのは数学 III もしくは大学の範囲となるが、中学生のときに放物線 $y = x^2$ のグラフを学んだときのように、 (x, y) の値の組を細かく求めてつないでいった概形を基礎として覚えるのである。この際、グラフが連続で滑らかとなることは認めるのである。(いずれ大学の教養課程できちんと学ぶことになる。)

$y = 3^x$ について

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \doteq 1.732, \quad 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{3}} \doteq 1.316$$

$$3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0.577$$

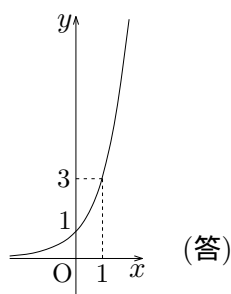
などと計算(もちろん電卓を用いればよい)して数表を作成すると、

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
3^x	0.192	0.333	0.577	1	1.316	1.732	2.280	3	5.196

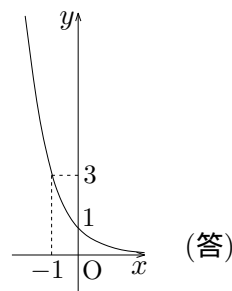
これをもとにして (1) $y = 3^x$ のグラフをかき、あとの(2), (3)のグラフは(1)との位置関係を考えてかけばよい。試験では、(1)の概形は知識として認めてよい。

解答：

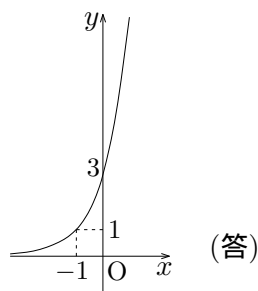
(1) $y = 3^x$ のグラフは



(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ のグラフは、 $y = 3^x$ のグラフを y 軸に関して対称に移動したものであるから、そのグラフは



(3) $y = 3 \cdot 3^x = 3^{x+1}$ のグラフは、 $y = 3^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したものであるから、グラフは右図のようになる。



4 確認：3 で考察した $y = a^x$ (a は 1 でない正の定数) のグラフを一般に考えると、指数関数の性質として次のことがわかる：

$$\begin{aligned} a \text{ によらず } a^u = a^v &\iff u = v && (1 \text{ 対 } 1 \text{ 対応}) \\ a > 1 \text{ のとき } a^u < a^v &\iff u < v && (\text{狭義の単調増加}) \\ 0 < a < 1 \text{ のとき } a^u < a^v &\iff u > v && (\text{狭義の単調減少}) \end{aligned}$$

厳密に言えば、数学Ⅱの段階ではこれらは証明されていないが、あとから(大学の教養課程で)正しいことが保証される。ここでは、直感的に正しいと理解しておく。

指数方程式や指数不等式は、上の性質により解を求めることができる。直接的な形でないときは、底を一つの(1でない)正の定数 a に統一し、 a^x についての方程式・不等式とみて、まず a^x について解けばよい。その際、 $a^x > 0$ であることに注意する。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad (2^x)^x = 2^{x^2}, \quad 4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{x+2} \text{ より} \\ (2^x)^x = 4 \cdot 2^x &\iff 2^{x^2} = 2^{x+2} \\ &\iff x^2 = x + 2 \\ &\iff x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0 \\ &\iff x = -1, 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 指数法則より

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2, \quad 2^{x+2} = 2^x 2^2 = 4 \cdot 2^x$$

であるから、 $2^x = t$ とおくと

$$4^x - 7 \cdot 2^{x+2} - 128 = t^2 - 28t - 128 = (t+4)(t-32) = 0$$

$t = 2^x > 0$ より

$$2^x = 32 = 2^5 \quad \therefore x = 5 \quad (\text{答})$$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} = t$ とおくと、与不等式は

$$t^2 - 18t + 32 = (t-2)(t-16) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq t \leq 16$$

$2 = 2^1, 16 = 2^4$ であるから

$$1 \leq -x \leq 4 \quad \therefore -4 \leq x \leq -1 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (4) \quad a^{2x-2} + a^{x-1} < 2 &\iff a^{2x} + a \cdot a^x < 2a^2 \\ &\iff (a^x)^2 + a \cdot a^x - 2a^2 < 0 \\ &\iff (a^x + 2a)(a^x - a) < 0 \\ &\iff a^x - a < 0 \quad (\because a^x + 2a > 0) \\ &\iff a^x < a \end{aligned}$$

よって、求める解は

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき } & x > 1 \\ a > 1 \text{ のとき } & x < 1 \end{cases} \quad (\text{答})$$

5 確認： a を 1 でない正の定数とすると、指数関数 $y = a^x$ が定義できて、 x と y は 1 対 1 に対応する。特に、任意の正の数 y に対して実数 x がただ 1 つ定まり、これを $x = \log_a y$ と表し、 a を底とする対数という。また、 y を対数 $\log_a y$ の真数という。

対数と指数は 1 対 1 の関係にあるので、指数法則を対数で表現した公式が得られる。その公式を用いると、わざわざ指数に戻らなくても、対数のままで計算することができる。計算練習 6 に先立って、本問(3)で公式を確認しておこう。

解答：

$$(1) 2^x = 3 \iff x = \log_2 3 \quad (\text{答})$$

$$(2) 8 = 2^3 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = (\sqrt{2})^6 \text{ であるから, 対数の定義より}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 8 = 6 \quad (\text{答})$$

対数の定義より

$$\log_3 5 = x \iff 3^x = 5$$

であるから、

$$3^{\log_3 5} = 5 \quad (\text{答})$$

(3) (i) $x = a^s$, $y = a^t$ とおくと、指数法則より

$$xy = a^s a^t = a^{s+t}$$

であるから、対数の定義より

$$\log_a xy = s + t = \log_a x + \log_a y \quad (\text{おわり})$$

(ii) $x = a^s$ とおくと、指数法則より

$$x^p = (a^s)^p = a^{sp}$$

であるから、対数の定義より

$$\log_a x^p = ps = p \log_a x \quad (\text{おわり})$$

(iii) (ii) と対数の定義を用いると

$$\log_a b \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

となり、底の条件 $a > 0$, $a \neq 1$ より $\log_c a \neq 0$ であるから、

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{おわり})$$

(注) 一般に(iii)の公式を「底の変換公式」または「底変換の公式」という。

6 確認：5(3)で確認した公式を用いると，対数のまま計算することができるが，実際の計算では

底をそろえて一つの対数にまとめる

真数を指数法則により整理する

真数(の整数)を素因数分解して，素数の対数ごとに整理する

といった作業が必要となる。また，底の変換公式を変形した関係式

$$\log_a b \log_b c = \log_a c$$

も有用である。特に，

$$\log_a b \log_b a = 1$$

解答：

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{1}{2} \log_3 75 + \log_3 \frac{\sqrt[3]{3}}{5} &= \log_3 (3 \times 5^2)^{\frac{1}{2}} + \log_3 (3^{\frac{1}{3}} \times 5^{-1}) \\ &= \log_3 (3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} 5^{1-1}) = \log_3 3^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6} \log_3 3 = \frac{5}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad 4 \log_3 \sqrt{10} + \log_{\frac{1}{3}} 25 + \log_3 \frac{9}{4} &= \log_3 (10^{\frac{1}{2}})^4 + \frac{\log_3 25}{\log_3 3^{-1}} + \log_3 \frac{9}{4} \\ &= \log_3 100 - \log_3 25 + \log_3 \frac{9}{4} \\ &= \log_3 \left(100 \times 25^{-1} \times \frac{9}{4} \right) \\ &= \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad (\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4) \\ &= \left(\log_2 3^2 + \frac{\log_2 3}{\log_2 2^3} \right) \left(\log_3 2^4 + \frac{\log_3 2^2}{\log_3 3^2} \right) \\ &= \left(2 \log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3 \log_2 2} \right) \left(4 \log_3 2 + \frac{2 \log_3 2}{2 \log_3 3} \right) \\ &= \left(2 + \frac{1}{3} \right) \log_2 3 \times (4 + 1) \log_3 2 = \frac{7}{3} \cdot 5 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = \frac{35}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad 3 \log_{10} 6 - \log_{10} 96 + \log_{10} 27 \\ &= 3 \log_{10} (2 \times 3) - \log_{10} (2^5 \times 3) + \log_{10} 3^3 \\ &= 3(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) - (5 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) + 3 \log_{10} 3 \\ &= 3(a + b) - (5a + b) + 3b = -2a + 5b \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad \log_{15} 12 &= \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 15} = \frac{\log_{10} (2^2 \times 3)}{\log_{10} \frac{3 \times 10}{2}} = \frac{2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2} \\ &= \frac{2a + b}{b + 1 - a} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

7 確認： a を 1 でない正の定数とすると、実数 x に対して $\log_a x$ を対応させる関数を x を変数とする対数関数という。高校の範囲で対数関数 $y = \log_a x$ と言えば、底 a は 1 でない正の定数、真数 x は正の実数であると仮定されていると考えて、対数関数のグラフをかくことができる。

対数関数の増減を調べるのも数学 III もしくは大学の範囲となるが、逆関数として

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

と定義されているので、指数関数のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に移動させたものと直感的に認めればよい。あとは、数学 II 「図形と方程式」で学んだ図形的性質を活用する。

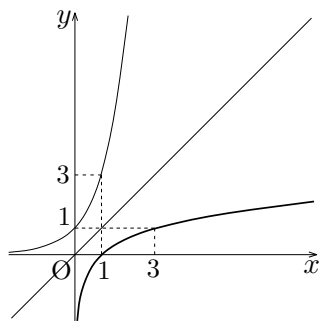
解答：

(1) $y = \log_3 x$ のグラフは、 $y = 3^x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に移動したものであり、下図の(A)のようになる。

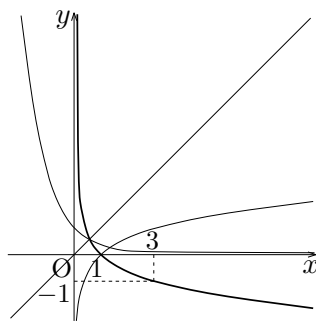
(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフは、 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に移動したものであり、下図の(B)のようになる。また、

$$y = \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^{-1}} = -\log_3 x$$

により、(1)のグラフを x 軸に対称に移動したものをかいてもよい。



図(A)



図(B)

(答)

(3) $y = \log_3 x$ のグラフを

$$y = \log_3 3x = \log_3 x + 1 \text{ は } y \text{ 軸方向に } 1 \text{ だけ平行移動 (答)}$$

$$y = \log_3(x + 1) \text{ は } x \text{ 軸方向に } -1 \text{ だけ平行移動 (答)}$$

$$y = \log_3 \frac{1}{x} = -\log_3 x \text{ は } x \text{ 軸に関して対称移動 (答)}$$

したものである。

8 確認：7 で確認したグラフを一般に考えると、対数関数の性質として

$$\begin{aligned}
 a \text{ によらず } \log_a u = \log_a v &\iff u = v && (1 \text{ 対 } 1 \text{ 対応}) \\
 a > 1 \text{ のとき } \log_a u < \log_a v &\iff u < v && (\text{狭義の単調増加}) \\
 0 < a < 1 \text{ のとき } \log_a u < \log_a v &\iff u > v && (\text{狭義の単調減少})
 \end{aligned}$$

が成り立つ。これらの性質は対数方程式・対数不等式を解く決め手となる。

方程式・不等式が単純でないときは、存在条件(底の条件+真数条件)のもとで、

- (i) $\log_a x$ についての多項式として整理して $\log_a x$ を求める
- (ii) 両辺をそれぞれ一つの対数にまとめる

などすればよい。途中計算においては、6 で確認したような変形を行なう。

解答：

(1) 真数条件 $x > 0$ のもとで、底の変換公式より

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^{-1}} = \frac{\log_3 x}{-\log_3 3} = -\log_3 x$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 (\log_3 x)^2 + \log_{\frac{1}{3}} x - 2 &= (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 \\
 &= (\log_3 x + 1)(\log_3 x - 2) = 0 \\
 \iff \log_3 x &= -1 \text{ または } \log_3 x = 2 \\
 \iff x &= 3^{-1} \text{ または } x = 3^2 \iff x = \frac{1}{3}, 9 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) 真数条件より $x > 0$ かつ $2x - 3 > 0$ であるから

$$x > \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①のもとで、底の変換公式より

$$\log_4(2x - 3) = \frac{\log_2(2x - 3)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2x - 3)}{2 \log_2 2} = \frac{1}{2} \log_2(2x - 3)$$

であるから、与えられた方程式は

$$\begin{aligned}
 \log_2 x + \log_2(2x - 3) &= \log_2 14 \\
 \log_2 x(2x - 3) &= \log_2 14 \\
 x(2x - 3) &= 14 \\
 2x^2 - 3x - 14 &= 0 \\
 (2x - 7)(x + 2) &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

①かつ②より

$$x = \frac{7}{2} \quad (\text{答})$$

(注) ②への式変形は①の前提ではあるが、真数を抜き出した式 $x(2x - 3) = 14$ 自体は①と独立の(条件)式になるので、②は題意の方程式と単独では同値にならない。

(3) 真数条件より $2+x > 0$ かつ $3-x > 0$ であるから

$$-2 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①のもとで、底の変換公式より

$$\log_{\frac{1}{4}}(2+x) = \frac{\log_{\frac{1}{2}}(2+x)}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}(2+x)$$

であるから、与えられた不等式は

$$\log_{\frac{1}{2}}(2+x) \leq 2\left\{1 + \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\right\} = 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(3-x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}(3-x)^2$$

(底) $= \frac{1}{2} < 1$ より

$$2+x \geq \frac{1}{4}(3-x)^2$$

$$(x-3)^2 - 4(x+2) = x^2 - 10x + 1 \leq 0$$

$$\therefore 5 - 2\sqrt{6} \leq x \leq 5 + 2\sqrt{6} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より

$$5 - 2\sqrt{6} \leq x < 3 \quad (\text{答})$$

(4) 真数条件より $x+1 > 0$ かつ $2x^2+x-1 = (x+1)(2x-1) > 0$ であるから

$$x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①のもとで、底の変換公式より

$$\log_{a^2}(2x^2+x-1) = \frac{\log_a(2x^2+x-1)}{\log_a a^2} = \frac{1}{2} \log_a(2x^2+x-1)$$

であるから、与えられた不等式は

$$2 \log_a(x+1) > \log_a(2x^2+x-1)$$

$$\log_a(x+1)^2 > \log_a(x+1)(2x-1)$$

底と1との大小で場合を分けると、 $0 < a < 1$ のとき

$$(x+1)^2 < (x+1)(2x-1)$$

$$\therefore (x+1)(x-2) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$a > 1$ のとき

$$(x+1)^2 > (x+1)(2x-1)$$

$$\therefore (x+1)(x-2) < 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

よって、 $0 < a < 1$ のときは①かつ②、 $a > 1$ のときは①かつ③が求める解であり、

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \text{ のとき} & x > 2 \\ a > 1 \text{ のとき} & \frac{1}{2} < x < 2 \end{cases} \quad (\text{答})$$

9 確認：8 で確認した対数の基本性質は，少し見方を変えれば

$$a > 1 \text{ のとき } \log_a u - \log_a v > 0 \iff u - v > 0$$

とみることができる。これは，同符号の多項式で置き換えることにより，対数不等式が多項式の不等式に同値変形できることを意味する。高次または多変数の対数不等式を処理する際には，このちょっとした視点の転換が重要となる。

実際の変形では $\log_a x$ が単独因数で現れることがあるが，その場合は

$$\log_a x = \log_a x - \log_a 1$$

とみて $x - 1$ に置き換えればよい。また，グラフから $y = \log_a x$ と $y = x - 1$ の符号の変わり方が同じだととらえるのもよい。

(2)のように底にも変数がある場合は，1 より大きい定数(例えば2)を底とする対数だけで書き換えてから処理すると，式が見やすい。

解答：

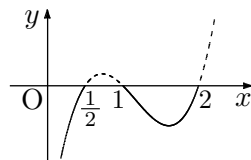
(1) (底) = 2 > 1 に注意すると，

$$(\log_2 x)^3 - \log_2 x = \log_2 x (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) \leq 0$$

$$\iff \log_2 x (\log_2 x - \log_2 2^{-1})(\log_2 x - \log_2 2) \leq 0$$

$$\iff x > 0 \text{ かつ } (x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) \leq 0$$

$$\iff 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ または } 1 \leq x \leq 2 \quad (\text{答})$$



$$(2) \log_x y + 2 \log_y x - 3 = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} + 2 \frac{\log_2 x}{\log_2 y} - 3$$

$$= \frac{(\log_2 y)^2 - 3 \log_2 x \log_2 y + 2(\log_2 x)^2}{\log_2 x \log_2 y} > 0$$

$$\iff \log_2 x \log_2 y \{(\log_2 y)^2 - 3 \log_2 x \log_2 y + 2(\log_2 x)^2\} > 0$$

$$\iff \log_2 x \log_2 y (\log_2 y - \log_2 x)(\log_2 y - 2 \log_2 x) > 0$$

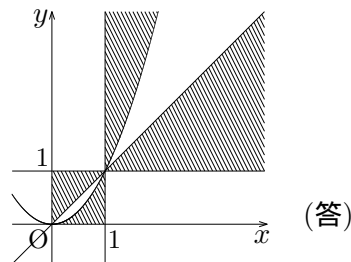
$$\iff \log_2 x \log_2 y (\log_2 y - \log_2 x)(\log_2 y - \log_2 x^2) > 0$$

$$\iff x > 0 \text{ かつ } y > 0 \text{ かつ } (x - 1)(y - 1)(y - x)(y - x^2) > 0$$

例えば，点 (3, 2) で

$$(3 - 1)(2 - 1)(2 - 3)(2 - 3^2) > 0$$

となることに注意すると，点 (x, y) の存在範囲は右図の斜線部分(境界は含まない)となる。



(答)

10 確認：これまでにみてきたように，存在条件の確認と底をそろえることにさえ注意すれば，指数・対数の問題も多項式の処理に帰着できる。そういう意味では最大最小問題を敢えて取り上げる必要はないのだが，重要なのは本問(3)(4)(5)のように相加・相乗平均の不等式を用いるパターンである。

相加・相乗平均は，建前としては数学Ⅱ「式と証明」で履習済みであるが，「式と証明」を習った時点では累乗根が未習だったために，3変数以上の相加・相乗平均は既習でありながら事実上未習である。3変数の場合は

$a > 0, b > 0, c > 0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{a+b+c}{3} = \sqrt[3]{abc} \iff a=b=c$$

であり，4変数以上の場合も同様である。また，指数・対数で表現されると印象が変わるので，ここで練習する意義は十分にある。

解答：

(1) $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 1 = (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 1 = (3^x - 3)^2 - 8$
 $3^x > 0$ を考えると $3^x = 3$ のとき最小であり， $f(x)$ の最小値は
 $f(1) = -8$ (答)

(2) 真数条件より $f(x)$ の定義域は $x > 0$ であり，

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_2 2x)^2 + \log_4 x \\ &= (\log_2 2 + \log_2 x)^2 + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \\ &= (\log_2 x + 1)^2 + \frac{1}{2} \log_2 x \\ &= (\log_2 x)^2 + \frac{5}{2} \log_2 x + 1 \\ &= \left(\log_2 x + \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \end{aligned}$$

よって， $\log_2 x = -\frac{5}{4}$ のとき $f(x)$ は最小であり，最小値は

$$f(2^{-\frac{5}{4}}) = -\frac{9}{16} \quad (\text{答})$$

(3) 相加・相乗平均の不等式より

$$f(x) = 2 \cdot 3^x + 8 \cdot 3^{-x} \geq 2\sqrt{(2 \cdot 3^x)(8 \cdot 3^{-x})} = 8$$

ここで，不等式の等号成立条件は

$$f(x) = 8 \iff 2 \cdot 3^x = 8 \cdot 3^{-x} \iff (3^x)^2 = 2^2 \iff x = \log_3 2$$

であるから，

$$f(x) \text{ の最小値は } f(\log_3 2) = 8 \quad (\text{答})$$

(4) 相加・相乗平均の不等式より

$$4\sqrt{2x} + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{2x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{(2\sqrt{2x})^2 \cdot \frac{1}{x}} = 6$$

ここで、不等式の等号は

$$2\sqrt{2x} = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{2}$$

のとき成り立つから、

$$4\sqrt{2x} + \frac{1}{x} \text{ の最小値は } 6 \quad (\text{答})$$

(5) 与式を変形して

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y &= \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} \\ &= \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y \\ &= \log_2 xy^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 x^2 y \end{aligned}$$

相加・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} 6 &= \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)^2 y} = 3\sqrt[3]{\frac{x^2 y}{4}} \\ \therefore x^2 y &\leq 2^5 \end{aligned}$$

上式とあわせると

$$\log_2 x + \log_4 y = \frac{1}{2} \log_2 x^2 y \leq \frac{1}{2} \log_2 2^5 = \frac{5}{2} \log_2 2 = \frac{5}{2}$$

ここで、不等式の等号は

$$\frac{x}{2} = y \quad \text{かつ} \quad x + y = 6, \quad \text{すなわち} \quad \frac{x}{2} = y = 2$$

のとき成り立つから、

$$\log_2 2x + \log_4 y \text{ の最大値は } \frac{5}{2} \quad (\text{答})$$

11 確認：大小比較を行なう際には

- (i) 2数の差をとって0と比べる
- (ii) 同じ累乗して比べる
- (iii) 同じ正の数をかけて比べる
- (iv) 適当な数を基準に比べる

というのが基本である。もちろん，指数・対数の処理の基本

- (v) 底をそろえる

ことも忘れてはいけない。また，対数の大小比較では，

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

に注目して，まず0, 1との大小により3つに大別しておく整理しやすい。

解答：

$$(1) (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8, (3^{\frac{1}{3}})^6 = 9 \text{ より}$$

$$2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$$

$$(2^{\frac{1}{2}})^{10} = 2^5 = 32, (5^{\frac{1}{5}})^{10} = 5^2 = 25 \text{ より}$$

$$2^{\frac{1}{2}} > 5^{\frac{1}{5}}$$

$$\therefore 5^{\frac{1}{5}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} \quad (\text{答})$$

(2) それぞれ3倍して比べると，

$$3 \log_3 4 = \log_3 4^3 = \log_3 64$$

$$3 \times \frac{4}{3} = 4 = 4 \log_3 3 = \log_3 3^4 = \log_3 81$$

であるから，

$$\log_3 4 < \frac{4}{3} \quad (\text{答})$$

(3) まず0, 1との大小により大別すると，

$$1 < \sqrt{3} < 2 \text{ より } 0 < \log_2 \sqrt{3} < 1$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} > 1 \text{ より } \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$$

$$\sqrt{6} > \sqrt{3} \text{ より } \log_{\sqrt{3}} \sqrt{6} > 1$$

$$1 < \sqrt{2} < 3^{\frac{1}{2}} \text{ より } 0 < \log_3 \sqrt{2} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

$\log_2 \sqrt{3}$ と $\frac{2}{3}$ を比べると

$$\log_2 \sqrt{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{2}{3} = \frac{3 \log_2 3 - 4}{6} = \frac{\log_2 27 - \log_2 16}{6} > 0$$

であるから，以上をまとめて

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} < \log_3 \sqrt{2} < \frac{2}{3} < \log_2 \sqrt{3} < \log_{\sqrt{3}} \sqrt{6} \quad (\text{答})$$

12 確認：歴史的には、三角関数表をまねて対数表を作り、天文学的な巨大な数を手軽に扱おうとしたのが対数の始まりである。現在では、10進法を基礎において底を10とする対数の表が標準となっているため、底を10とする対数を常用対数という。

常用対数表の数値をもとに、桁数や首位の数字が求められる。自然数 N に対して

$$N \text{ が } (10 \text{ 進法で}) n \text{ 桁} \iff 10^{n-1} \leq N < 10^n$$

$$N \text{ の首位の数字が } m \iff m \cdot 10^{n-1} \leq N < (m+1) \cdot 10^{n-1}$$

また、 $0 < A < 1$ を満たす小数 A (の10進法表示)において、小数第 n 位にはじめて0でない数字が現れるとすれば、

$$10^{-n} \leq A < 10^{-n+1}$$

いずれの場合も、条件を不等式で表現することがポイントである。

入試では、問題を解くのに必要な常用対数の値は与えられるので、常用対数表の値を事前に覚えておく必要はない。ただし、入試で与えられる常用対数の値は、近似値としてではなく、仮定として受け止めることが原則である。したがって、正確な値と解答値が異なることもあるし、問題文にない常用対数の値を予備知識として用いることはできない。

解答：

(1) 仮定より

$$\left(\frac{8}{9}\right)^n < \frac{1}{100} \quad \therefore \left(\frac{9}{8}\right)^n > 100$$

常用対数をとると

$$n \log_{10} \frac{9}{8} > 2$$

$$\begin{aligned} \therefore n &> \frac{2}{\log_{10} \frac{9}{8}} = \frac{2}{2 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2} \\ &= \frac{2}{2 \times 0.4771 - 3 \times 0.3010} = \frac{2}{0.0512} = \frac{625}{16} = 39.06 \dots \end{aligned}$$

よって、最小の自然数 n は

$$n = 40 \quad (\text{答})$$

(2) 3^{123} が n 桁の数であるとすれば

$$10^{n-1} \leq 3^{123} < 10^n$$

常用対数をとると

$$n - 1 \leq \log_{10} 3^{123} < n$$

ここで

$$\log_{10} 3^{123} = 123 \log_{10} 3 = 123 \times 0.4771 = 58.6833$$

であるから $n = 59$ であり、

$$3^{123} \text{ は } 59 \text{ 桁} \quad (\text{答})$$

の数である。

3^{123} の首位の数字を m とすると

$$m \cdot 10^{58} \leq 3^{123} < (m+1) \cdot 10^{58}$$

常用対数をとると

$$\begin{aligned} \log_{10} m + 58 &\leq 58.6833 < \log_{10}(m+1) + 58 \\ \therefore \log_{10} m &\leq 0.6833 < \log_{10}(m+1) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \log_{10} 4 &= 2 \log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020, \\ \log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990 \end{aligned}$$

であるから,

$$3^{123} \text{ の首位の数字は } m = 4 \quad (\text{答})$$

$3^4 = 81$, $123 = 4 \times 30 + 3$ であることに注意すると

$$3^{123} = 81^{30} \times 27 \text{ の末尾は } 7 \quad (\text{答})$$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{40}$ の小数第 n 位にはじめて 0 でない数字が現れるとすれば,

$$10^{-n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{40} < 10^{-n+1} \quad \therefore 10^{n-1} < 3^{40} \leq 10^n$$

常用対数をとると

$$n - 1 < \log_{10} 3^{40} \leq n$$

ここで,

$$\log_{10} 3^{40} = 40 \log_{10} 3 = 40 \times 0.4771 = 19.0840$$

であるから $n = 20$ であり, $\left(\frac{1}{3}\right)^{40}$ は

$$\text{小数第 } 20 \text{ 位} \quad (\text{答})$$

にはじめて 0 でない数字が現れる。そのはじめの数字を m とすると

$$m \cdot 10^{-20} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{40} < (m+1) \cdot 10^{-20}$$

常用対数をとると

$$\begin{aligned} \log_{10} m - 20 &\leq -19.0840 < \log_{10}(m+1) - 20 \\ \therefore \log_{10} m &\leq 0.9160 < \log_{10}(m+1) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \log_{10} 8 &= 3 \log_{10} 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030, \\ \log_{10} 9 &= 2 \log_{10} 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542 \end{aligned}$$

であるから,

$$\text{小数第 } 20 \text{ 位の数字は } m = 8 \quad (\text{答})$$