

## □1 (等式の証明)

次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \}$$

$$(2) \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$(3) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$(4) \quad \sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{5} + 1}$$

## □2 (分数恒等式)

$$(1) \quad \frac{3}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1} \text{ を満たす定数 } a, b, c \text{ を求めよ。}$$

$$(2) \quad \frac{1}{(x^2 - 1)^2} \text{ を部分分数展開せよ。}$$

$$(3) \quad \frac{1}{x(x + 1)(x + 2)} \text{ を2つの分数の差で表せ。}$$

## 3 (比例式)

- (1)  $3x = 5y \neq 0$  のとき,  $\frac{x(x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2)}$  の値を求めよ。
- (2)  $5a - 4b - 9c = 0$  かつ  $10a + 6b + 3c = 0$  を満たすとき,  $a : b : c$  を求めよ。

## 4 (不等式の証明)

- (1)  $a, b, c$  を正の数とするとき, 不等式  $\frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \geq \frac{3abc}{ab + bc + ca}$  が成り立つことを証明せよ。
- (2)  $y = x + 1$  のとき, 不等式  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4}$  が成り立つことを証明せよ。
- (3)  $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$  のとき,  
 $ab + 1 > a + b, abc + 2 > a + b + c$   
が成り立つことを証明せよ。

## 5 (相加平均・相乗平均)

- (1)  $a \geq 0, b \geq 0$  のとき, 不等式  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  が成り立つことを証明せよ。また, 等号成立条件を求めよ。
- (2)  $a > 0, b > 0$  のとき,  $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$  であることを証明せよ。
- (3)  $x > 0$  のとき,  $x + \frac{1}{x+1} > 1$  を証明せよ。
- (4)  $x > 0$  のとき,  $y = \frac{2x}{x^2+1}$  の最大値を求めよ。
- (5) 半径 1 の円に内接する長方形の面積および周の長さの最大値を求めよ。
- (6)  $x > 0$  のとき,  $y = x + \frac{1}{x}$  のとり得る値の範囲を求めよ。

## 6 (コーシー・シュワルツの不等式)

- (1) 不等式  $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$  が成り立つことを証明せよ。また, 等号成立条件を求めよ。
- (2)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  のとき,  $x + 2y + 3z$  の最大値と最小値を求めよ。
- (3)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  のとき,  $x + 2y + 3z$  の最大値と最小値を求めよ。

7 (絶対値)

(1)  $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$  が成り立つことを証明せよ。

(2) 次のグラフをかけ。

(i)  $y = |x^2 - 1|$       (ii)  $y = -(x + 1)|x - 1|$       (iii)  $y = ||x| - 1|$

8 (無理式)

(1)  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}$  の分母を有理化せよ。

(2)  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ ,  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  をそれぞれ簡単にせよ。

(3)  $a = \sqrt{6} - \sqrt{5}$  のとき,  $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 4}$  の値を求めよ。

## 9 (命題)

- (1) 「整数  $m, n$  に対して,  $mn$  が 6 で割り切れるならば,  $m$  または  $n$  は 6 で割り切れる」という命題の逆, 裏, 対偶の命題をそれぞれ作れ。
- (2) (1)で作った逆, 裏, 対偶の命題について, 真であれば証明し, 偽であれば反例を挙げよ。
- (3) 対偶がもとの命題と同値であることを示せ。

## 10 (集合)

- (1) 整数全体の集合を  $Z$  とし,  $S = \{3m + 5n \mid m, n \text{ は整数}\}$  とするとき,  $Z = S$  であることを示せ。
- (2) 集合  $A, B$  に対して,  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  であることを示せ。
- (3) 全体集合  $U$  の部分集合  $A, B$  に対して, 要素の個数が
$$n(U) = 50, n(A) = 25, n(B) = 19, n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 14$$
であるとき, 集合  $A \cup B$ ,  $\overline{A \cap B}$ ,  $\overline{A \cup B}$  の要素の個数をそれぞれ求めよ。

## 11 (同値変形)

- (1) 不等式  $x < \sqrt{x+2}$  および  $\frac{x^2}{x+3} \geq \frac{1}{x+3}$  を解け。
- (2)  $y = x^2 + k$  かつ  $x = y^2 + k$  を満たす実数  $x, y$  が存在するような実数  $k$  の範囲を求めよ。
- (3)  $n^2 + 2$  が  $2n + 1$  の倍数となるような自然数  $n$  をすべて求めよ。

## 12 (必要条件・十分条件)

- (1) 次の文中の  にあてはまるものを, 下の4つの中から選べ。ただし,  $m, n$  は整数,  $x, y$  は実数とする。
- (i)  $m$  または  $n$  が 4 の倍数であることは,  $mn$  が 4 の倍数であるための 。
- (ii)  $|x| + |y| = x + y$  であることは,  $x + y \geq 0$  であるための 。
- (iii)  $x^2 + y^2 \leq 1$  であることは,  $|x| + |y| \leq 1$  であるための 。

必要十分条件である

必要条件であるが, 十分条件ではない

十分条件であるが, 必要条件ではない

必要条件でも十分条件でもない

- (2)  $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$  を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めよ。

## 13 (背理法)

(1)  $\sqrt{6}$  は無理数であることを証明せよ。

(2)  $a, b, c, d$  が有理数であるとき,

$$a + b\sqrt{6} = c + d\sqrt{6} \implies a = b, c = d$$

であることを証明せよ。

## 14 (転換法)

整数  $a, b, c, d$  が

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

を満たすとき,  $d$  が偶数ならば  $a, b, c$  はすべて偶数であることを証明せよ。

1 確認：このファイルでは、数学Aの「論理と集合」と数学IIの「式と証明」にわたって、式変形と論じ方の基礎を学ぶ。これらの単元抜きに数学が語れないほど、数学全般を支える重要な単元なので、甘くみてもいけない。なお、因数分解、多項式の恒等式、対称式、交代式については、「多項式」のファイルで扱っている。

証明問題で登場する式は(証明せよと言うからには)結果的に正しい式のはずであるが、問題となるのは、(精神的に正常な)誰の目にも正しいと認識させるためにはどのように論じればよいか、ということである。

等式  $A = B$  を示すには

1°  $A$  を変形して  $B$  を導く (または、 $B$  を変形して  $A$  を導く)

2°  $A, B$  をそれぞれ変形して、同じ式を導く

3°  $A - B$  を変形して  $0$  を導く

4°  $A > 0, B > 0$  であれば、 $A^2 = B^2$  を(上記の方法で)導く

というのが基本である。不等式の証明(→ 4) や技巧的な方法(背理法・転換法 → 16), 数学的帰納法 → 「数列」)については、このあとに続いて学習すればよい。

(1), (2), (3)の結果は、公式として覚えておこう。

解答：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (\text{右辺}) &= \frac{1}{2} \{ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \} \\
 &= \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) \\
 &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (\text{左辺}) \qquad (\text{おわり})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (\text{右辺}) &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\
 &= (x+y+z) \{ x^2 - (y+z)x + y^2 - yz + z^2 \} \\
 &= x^3 + (y+z-x)x^2 + \{ y^2 - yz + z^2 - (y+z)x \} x + (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\
 &= x^3 + 0 - 3yzx + (y^3 + z^3) = (\text{左辺}) \qquad (\text{おわり})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\
 (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 &= a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 \\
 &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\
 \therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \qquad (\text{おわり})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2})^2 &= \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\
 &= 2\sqrt{5} + 2 \\
 &= 2(\sqrt{5} + 1) \\
 &= (\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+1})^2
 \end{aligned}$$

であり、 $\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2} > 0$ 、 $\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+1} > 0$  であるから

$$\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+1} \qquad (\text{おわり})$$



2 確認：分母と分子がともに多項式(整式)である分数式を有理式という。一般には

$\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$  なども分数式であるが，ここでは有理式特有の性質や変形法を確認する。

多項式  $P(x)$  を多項式  $Q(x)$  で割ると，ある多項式  $F(x)$ ,  $R(x)$  を用いて

$$P(x) = Q(x)F(x) + R(x), \quad (Q(x) \text{ の次数}) > (R(x) \text{ の次数})$$

と表される。したがって，どんな有理式も

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \quad (Q(x) \text{ の次数}) > (R(x) \text{ の次数})$$

と表されることになる。説明の都合上，ここだけで通用する用語として，

$$F(x) \text{ を } \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ の整式部分， } \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ を } \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ の分数部分}$$

と呼ぶことにする。(整数部分，小数部分のもじりである。) 整式の除法の一意性により，各有理式ごとに(定数倍を除いて)整式部分と分数部分は一意に定まる。

互いに素な整式  $A(x)$ ,  $B(x)$  に対して，整数の場合と同様に，

$$A(x)D(x) + B(x)E(x) = 1$$

を満たす整式  $D(x)$ ,  $E(x)$  が存在するから，整式  $Q(x)$  が互いに素な整式  $A(x)$ ,  $B(x)$  の積であるならば，

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{\{A(x)D(x) + B(x)E(x)\}R(x)}{A(x)B(x)} = \frac{D(x)R(x)}{B(x)} + \frac{E(x)R(x)}{A(x)}$$

と変形できる。さらに，最右辺の分数をそれぞれ整式部分と分数部分に分けて，同様の作業をくり返すと，最終的には既約多項式  $Q_k(x)$  を分母として

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \cdots + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$$

と表示できる。ここで， $P_k(x)$  は  $Q_k(x)$  より低次の多項式である。このような表示を部分分数展開といい，部分分数展開を求めることを部分分数に分けるといふ。

そういうわけで，本来なら本問(1)のようなヒントがなくても

$$\frac{3}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$$

と自力で未知数が設定できるはずなのである。こうした部分は，学校ではきちんと説明されないことが多いので，上に述べたことを(入試の答案でそのまま使わないにしても)よく理解しておこう。文字の置き方は，(2)で練習する。

実際に問題を解くときの注意点を述べると，文字をおいたあとの係数比較は，分母を払って整式の恒等式に帰着させて行なわねばならない。それは，分母・分子に同じ数や式をかけても分数は変わらないため，分数式のままでは係数についての条件がわかりにくいからである。整式の恒等式と同様，係数比較法と数値代入法が使える。

分子が定数で，分母がある等差数列の連続する項の積の形をしているときは，(3)の解答のように，2つの分数の差を作っておいてから定数倍を調整するのが早い。もちろん(1)，(2)のような一般論で処理することもできるが，頻度の高さや応用の広さを考えると，こうした基本技巧はぜひとも覚えたい。狭義では，(3)のように2つの単位分

数の差を作る(単位分数に分ける)ことを部分分数展開ということも多い。

解答：

(1) 両辺に  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$  をかけて，

$$3 = a(x^2 - x + 1) + (bx + c)(x + 1) = (a + b)x^2 + (b + c - a)x + a + c$$

係数を比べると，

$$a + b = 0 \quad \text{かつ} \quad b + c - a = 0 \quad \text{かつ} \quad a + c = 3$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -1, \quad c = 2 \quad (\text{答})$$

(2) 有理式の性質より

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 - 1)^2} &= \frac{1}{(x - 1)^2(x + 1)^2} \\ &= \frac{a(x - 1) + b}{(x - 1)^2} + \frac{c(x + 1) + d}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

と表される。両辺に  $(x - 1)^2$  をかけると

$$\frac{1}{(x + 1)^2} = a(x - 1) + b + (x - 1)^2 \left( \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{(x + 1)^2} \right)$$

$x = 1$  を代入することにより  $b = \frac{1}{4}$  と求まり，

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{(x - 1)(x + 1)^2} - \frac{1}{4(x - 1)} - (x - 1) \left( \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{(x + 1)^2} \right) \\ &= \frac{4 - (x + 1)^2}{4(x - 1)(x + 1)^2} - (x - 1) \left( \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{(x + 1)^2} \right) \\ &= \frac{-x - 3}{4(x + 1)^2} - (x - 1) \left( \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{(x + 1)^2} \right) \end{aligned}$$

に  $x = 1$  を代入することにより， $a = -\frac{1}{4}$  と求まる。

同様の作業で  $c = d = \frac{1}{4}$  が得られるから，求める部分分数展開は

$$\frac{1}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{1}{4(x - 1)} + \frac{1}{4(x - 1)^2} + \frac{1}{4(x + 1)} + \frac{1}{4(x + 1)^2} \quad (\text{答})$$

(注) (1)のように分母をすべて払って，係数比較して連立方程式を解いてもよい。

(3)  $\frac{1}{x(x + 1)} - \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{(x + 2) - x}{x(x + 1)(x + 2)} = \frac{2}{x(x + 1)(x + 2)}$  より

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x + 1)(x + 2)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x(x + 1)} - \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} \right) \\ &= \frac{1}{2x(x + 1)} - \frac{1}{2(x + 1)(x + 2)} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

□3 確認： $3x = 5y$ ,  $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ ,  $x : y = 5 : 3$  (実は3つとも同じ式)のように, 比の値が等しいことを表す式を比例式という。比例式が与えられているとき, 比例定数を  $k$  とでもおいて(1)の  $\frac{x(x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2)}$  のような同次分数式(分母と分子が同じ次数の有理式)に代入すると,  $k$  が約されて値が求められる。逆に言えば, 同次分数式は(個別の値は不明でも)変数の比だけで定まるのである。

(2)のように, 与えられた同次(連立方程)式から比例式を導くには,

1° 2つの変数だけの式を複数用意する

2° 共通の変数について解いて, 1つにつなぐ

3° 適当な数で全辺を割って, 分子の変数の係数を1にする

という手順で変形すればよい。3°において, 係数がすべて整数であれば, その最小公倍数で割ればよい。1次の係数のマイナスは, 比例式では分母に編入させる。

一般に, 比を扱うときには, (中学のときのような)  $a : b = x : y$  の形に表示するよりも, 分数で表す方が処理しやすい。ここで確認する変形の技巧は, 応用範囲が広く重要である(にもかかわらず軽視している人が多い)。

解答:

(1)  $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = k (\neq 0)$  とおくと,  $x = 5k$ ,  $y = 3k$  であり,

$$\frac{x(x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2)} = \frac{5k(25k^2 - 9k^2)}{3k(25k^2 + 9k^2)} = \frac{5 \times 16}{3 \times 34} = \frac{40}{51} \quad (\text{答})$$

$$(2) \begin{cases} 5a - 4b - 9c = 0 & \dots\dots ① \\ 10a + 6b + 3c = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

① + ② × 3 より

$$35a + 14b = 0$$

② - ① × 2 より

$$14b + 21c = 0$$

$$\therefore 35a = -14b = 21c$$

全辺を  $2 \times 3 \times 5 \times 7$  で割って,

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{-15} = \frac{c}{10}$$

$$\therefore a : b : c = 6 : -15 : 10 \quad (\text{答})$$

(注) 比を表すときは, できるだけ簡単な(整数)比に直す。

4 確認：不等式の基本性質として，実数  $a, b, c$  に対して

$$a > b \text{ かつ } b > c \implies a > c$$

$$a > b \implies a + c > b + c$$

$$a > b \text{ かつ } c > 0 \implies ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

が成り立つ。

大小比較や不等式の証明では，

$$a > b \iff a - b > 0$$

により差をとって 0 と比べることを基本とし，平方完成や仮定の活用を考える。見かけの単純さに反して，一つに集めることで本質が見抜きやすくなる効果は大きく，King of Foundation の称号を与えたいほどである。

等号のつく不等式の証明では，要求されていなくても等号が成り立つための条件を求めておくのが常識である。(2)では，

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0$$

を考えると一見不成立に思えるが， $y = x + 1$  のもとではこの等号は成り立ち得ない。ここでは [1] (1) の公式は役に立たないのである。意外にも，その公式は(1)の証明で役に立つ。両辺の差をとって，一つに集めてみないと見えないことである。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} - \frac{3abc}{ab + bc + ca} &= \frac{(ab + bc + ca)^2 - 3abc(a + b + c)}{(a + b + c)(ab + bc + ca)} \\ &= \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a + b + c)}{(a + b + c)(ab + bc + ca)} \\ &= \frac{(ca - ab)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2}{2(a + b + c)(ab + bc + ca)} \\ &= \frac{a^2(b - c)^2 + b^2(c - a)^2 + c^2(a - b)^2}{2(a + b + c)(ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

$a > 0, b > 0, c > 0$  より  $a + b + c > 0, ab + bc + ca > 0$  であるから，

$$\begin{aligned} \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} - \frac{3abc}{ab + bc + ca} &\geq 0 \\ \therefore \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} &\geq \frac{3abc}{ab + bc + ca} \end{aligned}$$

ここで，不等式の等号は

$$(b - c)^2 = (c - a)^2 = (a - b)^2 = 0 \text{ すなわち } a = b = c$$

のとき成り立つ。

(おわり)

(2)  $y = x + 1$  により  $y$  を消去し,  $z$  について整理すると

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \\ &= x^2 + (x+1)^2 + z^2 - (x+z)(x+1) - zx \\ &= z^2 - (2x+1)z + x^2 + x + 1 \\ &= \left(z - \frac{2x+1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 + x + 1 \\ &= \left(z - \frac{2x+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ここで, 不等式の等号は

$$y = x + 1 \quad \text{かつ} \quad z = x + \frac{1}{2}$$

のとき成り立つ。

(おわり)

(3) 差をとって,

$$(ab+1) - (a+b) = (a-1)(b-1)$$

$0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$  より  $a-1$  と  $b-1$  はともに負(同符号)であるから

$$(a-1)(b-1) > 0$$

$$\therefore ab+1 > a+b$$

さらに,  $0 < ab < 1$ ,  $0 < c < 1$  であるから, 上の不等式を用いて

$$abc+2 = (ab \cdot c + 1) + 1 > (ab+c) + 1 = (ab+1) + c > a+b+c$$

(おわり)

5 確認：数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に対して

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \text{ を相加平均, } \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \text{ を相乗平均}$$

という。  $a_1, a_2, \dots, a_n$  がすべて正の実数であるとき、

$$(\text{相加平均}) \geq (\text{相乗平均}), \text{ 等号成立条件は } a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

が成り立つ。本問では  $n = 2$  のときのみ演習するが、一般の  $n$  について成り立つことも少し見ておこう。(1)により  $n = 2$  のときが示されれば、それをくり返して  $n = 2^m$  ( $m$  は自然数) の場合も示される。例えば、 $n = 4$  のときは

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &= \frac{1}{2} \left( \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} \right) \\ &\geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \\ &\quad (\text{等号は } a_1 = a_2 \text{ かつ } a_3 = a_4 \text{ のとき成り立つ}) \\ &\geq \frac{\sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}}}{2} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \\ &\quad (\text{不等式の等号は } a_1 a_2 = a_3 a_4 \text{ のとき成り立つ}) \end{aligned}$$

一般の  $n$  の場合は、 $2^{m-1} \leq n < 2^m$  となる自然数  $m$  に対して、変数が  $2^m$  個の場合の相加・相乗平均の不等式において

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{2^m} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

とおけば証明される。例えば、 $n = 13$  の場合を導きたいのであれば、 $n = 16$  の場合を証明した上で  $a_{14} = a_{15} = a_{16} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{13}}{13}$  とおくと、

$$\begin{aligned} &\left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{13} + 3 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{13}}{13}}{16} \right)^{16} \\ &\geq a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{13} \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{13}}{13} \right)^3 \\ &\implies \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{13}}{13} \right)^{13} \geq a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{13} \end{aligned}$$

解法上重要なのは最大最小の問題に應用できることであるが、もともとは最大最小問題とは無関係の不等式なので、適用できるための特殊な状況をつかむことが不可欠である。変数が 0 以上のとき(分母にあれば正)であることは言うまでもないが、

等号成立条件と適用可能な式の形の見極め

の方がより重要である。

(相加・相乗平均の不等式、コーシー・シュワルツの不等式のように)既に成り立っている不等式、いわゆる絶対不等式は、直接には大小関係しかわからないので、不等式の表記がそのまま最大値・最小値を表しているとは限らない。例えば、不等式

$$x^2 \geq -1$$

が成り立つからと言って、 $x^2$  の最小値が  $-1$  というわけではない。不等式から最大値

・最小値を求めるには、不等式の等号が成り立ち得るのかどうか鍵となる。相加・相乗平均の公式には、不等式だけでなく、等号成立条件まで含まれていることにも注意したい。この部分がいいかげんだと、(2)で次のような失敗をしかねない。

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}, \quad b + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{4}{a}} \quad \text{より} \quad \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 8 ?$$

この場合、2つの不等式の等号成立条件は一致していない。このようなミスを防ぐには、はじめから適用箇所をできるだけ1ヶ所に絞るか、すべての等号成立条件が一致するかをチェックする心掛けが大切である。(3)のように、等号成立条件が成り立たないことを示すことで、不等式の等号を抜く場合もあるので、悩みは尽きない。

相加・相乗平均の不等式が最大最小問題に適用できる形は決まっています、

相乗平均が定数のとき、相加平均の最小値が求められる

相加平均が定数のとき、相乗平均の最大値が求められる

というパターン以外は絶対にあり得ない。したがって、(2)や(3)のような不可思議な形をしていても、しっかりと式の形を見抜けることまでもが基本の範囲なのである。ここもいいかげんにしていると、次のようなトラブルに見舞われる。

$$x \geq 0 \text{ のとき } x^2 + 1 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 1} = 2x$$

不等式の等号は  $x = 1$  のとき成り立つから、最小値は2?

もちろん  $x = 0$  のとき最小値1である。グラフを描いてみるとすぐにわかることであるが、2つのグラフの上下関係と一方のグラフの  $y$  座標の最小値は一般には無関係なのである。 $y = x^2 + 1$  と  $y = 2x$  の例で言えば、点 (1, 1) で接してはいるが、そこが放物線の頂点とは限らないということである。

それでは、上のパターンにあてはまるとなぜきちんと解けるのかと言えば、その接線が  $x$  軸に平行な直線(定数関数のグラフ)となると事態が変わってしまうのである。各自で図をイメージして、理解を深めてもらいたい。微分法を習った人には、極値が最大値・最小値の候補となると言った方がわかりやすいだろうか。

最後に、相加・相乗平均の不等式を用いて最大値や最小値が求められたとしても、その関数の値域(とり得る値)まではわからないことに注意してほしい。不等式の公式利用には限界であって、大小関係と等号成立条件しか保証されないのである。その関数をよく知っていることと正しい推論で結果を求めることを混同してはいけない。したがって、(6)の値域を数学Ⅱ・Bまでの範囲で求めるのであれば、2次方程式に帰着させて解くことになる。下の解答では答案だけを書いておくと、基本の確認については「2次関数」のファイルの[10]を読んでほしい。

以上、相加・相乗平均の不等式について通り一遍の確認をしたが、今までかなり雑に扱われていたのではないだろうか。

解答:

(1)  $a \geq 0, b \geq 0$  より  $\sqrt{a}, \sqrt{b}$  はともに実数であることに注意すると,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

 $a \geq 0, b \geq 0$  のもとで,

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \iff \sqrt{a} = \sqrt{b} \iff a = b \quad (\text{おわり})$$

(2) 相加・相乗平均の不等式より

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9$$

不等式の等号は  $ab = 2$  のとき成り立つ。 (おわり)(3)  $x > 0$  のとき  $x+1 > 1 (> 0)$  に注意して, 相加・相乗平均の不等式より

$$x + \frac{1}{x+1} = x+1 + \frac{1}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$$

ここで, 不等式の等号成立条件は

$$x+1 = \frac{1}{x+1} \quad \therefore (x+1)^2 = 1$$

ところが,  $x+1 > 1$  よりこの条件は満たされないから,

$$x + \frac{1}{x+1} > 1 \quad (\text{おわり})$$

(4)  $x > 0$  に注意して, 相加・相乗平均の不等式より

$$\frac{x^2+1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1 \quad \therefore \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$$

ここで, 不等式の等号は

$$x = \frac{1}{x}, x > 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 1$$

のとき成り立つから,

$$\frac{2x}{x^2+1} \text{ の最大値は } 1 \quad (\text{答})$$

(5) 半径 1 の円に内接する長方形の隣接 2 辺の長さを  $x, y$  とすると,

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

相加・相乗平均の不等式より

$$2 = \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = xy$$

ここで, 不等式の等号は  $x = y = \sqrt{2}$  のとき成り立つから,

$$\text{面積 } xy \text{ の最大値は } 2 \quad (\text{答})$$



$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 4 + 2xy$$

$xy$  は  $x = y$  のとき最大値 4 をとるから,  $x + y > 0$  も考えて

$$\text{周の長さ } 2(x+y) \text{ の最大値は } 4\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(6)  $y = x + \frac{1}{x} \iff x^2 - yx + 1 = 0$  であるから,  $x$  の 2 次方程式

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

が少なくとも一つ正の実数解をもつような  $y$  の範囲を求めればよい。ところが,

$$(2 \text{ 解の積}) = 1 > 0$$

より(本問では) 2 解とも正の実数であることと同値であり, その条件は

$$(\text{判別式}) = y^2 - 4 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad (2 \text{ 解の和}) = y > 0$$

$$\therefore y \geq 2$$

今の議論で,  $x$  が正の範囲をとるための必要十分条件が  $y \geq 2$  であるから, これは  $y$  が実際にとり得る値の範囲である。よって,

$$y \text{ の値域は } y \geq 2 \quad (\text{答})$$

(注) あくまでも相加・相乗平均の不等式だけでは値域を断定できないというだけであり, 相加・相乗平均の不等式が使えないわけではない。試験場では, 数学 III と組み合わせて次のように処理するのが实际的であろう。

相加・相乗平均の不等式より

$$y = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

ここで, 不等式の等号は  $x = 1$  のとき成り立つ。

関数  $y = x + \frac{1}{x}$  は  $x > 0$  において連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty \quad \left(\text{または} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty\right)$$

であるから, 関数  $y = x + \frac{1}{x}$  が  $x > 0$  においてとり得る値の範囲は

$$y \geq 2 \quad (\text{答})$$

6 確認： $2n$  個の実数  $a_k, b_k (k = 1, 2, \dots, n)$  に対して，不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

(等号成立は  $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \dots = a_n : b_n$  のとき)

が成り立つ。この不等式をコーシー・シュワルツ(Cauchy-Schwarz) の不等式という。一般の  $n$  の場合でも，(新たな発想を持ち出すことなく) 本問(1)と同様に証明できる。数学 B の「ベクトルの内積」とみればほとんど明らかな内容である。

解法上重要なことは，式の特徴と等号成立条件を活かして，最大最小問題に応用することである。(  $n = 3$  の場合は)  $ax + by + cz$  の形(内積とみなせる形)を見抜いて，平方和(ベクトルの大きさの平方)の形と整合することを確認して公式を適用する。単なる丸暗記ではなかなか使いこなせないので，ポイントをしっかりおさえておこう。

解答：

$$\begin{aligned} (1) \quad & (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\ &= a^2(y^2 + z^2) + b^2(z^2 + x^2) + c^2(x^2 + y^2) - 2(abxy + bcyz + cazx) \\ &= (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) + (c^2x^2 - 2cazx + a^2z^2) \\ &= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geq 0 \\ &\therefore (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

不等式の等号成立条件は

$$ay - bx = 0 \text{ かつ } bz - cy = 0 \text{ かつ } cx - az = 0$$

$$\text{すなわち } a : b : c = x : y : z$$

(おわり)

(2) コーシー・シュワルツの不等式および仮定より

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 14$$

ここで，不等式の等号は

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ かつ } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\text{すなわち } x = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}, y = \pm \frac{2}{\sqrt{14}}, z = \pm \frac{3}{\sqrt{14}} \text{ (複号同順)}$$

のとき成り立つから，

$$\text{最大値 } \sqrt{14}, \text{ 最小値 } -\sqrt{14} \text{ (答)}$$

(3) コーシー・シュワルツの不等式および仮定より

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq (1 + 2 + 3)(x^2 + 2y^2 + 3z^2) = 6$$

ここで，不等式の等号は

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z}{\sqrt{3}} \text{ かつ } x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

$$\text{すなわち } x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

のとき成り立つから，

$$\text{最大値 } \sqrt{6}, \text{ 最小値 } -\sqrt{6} \text{ (答)}$$

7 確認：実数  $x$  の絶対値  $|x|$  とは， $x$  を数直線上の点として表すときの原点からの距離のことであるから，

$$|x| = \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

複素数の絶対値も(複素数平面上で)原点からの距離として定義されるが，本ファイルでは実数の範囲で考える。

複素数平面上で考えると，不等式

$$|x + y| < |x| + |y|$$

はちょうど三角形の成立条件を表すので，(1)で示す不等式は三角不等式と呼ばれる。なお，三角関数の不等式も三角不等式と呼ぶので，混同しないように注意を要する。

実数の絶対値は数直線上原点からの距離を表すから，図形的には0または正ならそのまま，負なら原点に関して対称移動した値とみることができる。特に， $y = |f(x)|$  のグラフは， $y = f(x)$  のグラフの  $x$  軸から下にある部分だけを  $x$  軸に関して折り返したものとなる。同様に，絶対値の意味を考えれば，(2)のグラフはいずれも(場合分けしなくても)すぐにかけるはず。

解答：

$$(1) (|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) = 2(|xy| - xy) \geq 0$$

より

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{等号成立は } |xy| = xy \text{ のとき})$$

上の不等式は任意の実数で成り立つから， $x$  を  $x - y$  に置き換えても成り立ち，

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \quad \therefore |x| - |y| \leq |x - y|$$

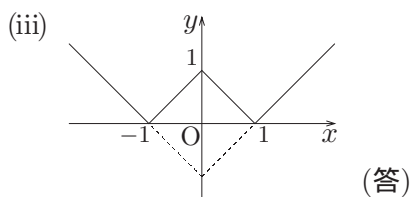
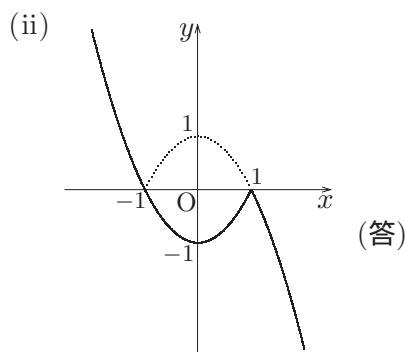
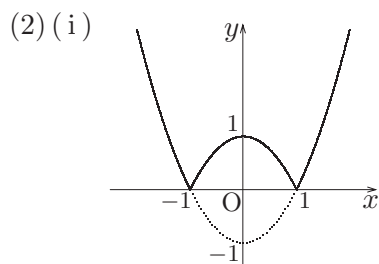
また， $y$  を  $y - x$  に置き換えても成り立つから，

$$|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x| \quad \therefore |y| - |x| \leq |x - y|$$

$y$  を  $-y$  に置き換えて2式をまとめると

$$||x| - |y|| = ||x| - | -y|| \leq |x - (-y)| = |x + y| \quad (\text{おわり})$$

(注) 複素数の範囲で証明できるが，ここでは実数の範囲とした。



8 確認：(1)の計算のように，乗法公式

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2, \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

を用いて分母から根号の入った式をなくす作業のことを分母の有理化という。

(2)のような二重根号の式は，関係式(乗法公式の変形)

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab} \quad (\text{複号同順})$$

を用いて，外の根号をはずすことができる。ただし， $a, b$ にあたる数が根号を含むと，

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

のように，かえって表示を複雑にしてしまう。二重根号をはずすには，まず中の根号の係数を2に直さなければならない。

1° 根号の係数が偶数であれば  $2m\sqrt{n} = 2\sqrt{m^2n}$  と変形する。

2° 根号の係数は偶数でないが根号の中が4の倍数ならば，

$$\sqrt{4d} = 2\sqrt{d} \text{ と変形する。}$$

3° そのいずれでもなければ， $m + \sqrt{n} = \frac{2m + 2\sqrt{n}}{2}$  と変形する。

平方根の平方は  $(\sqrt{x})^2 = x$  のように元に戻るが，平方の正の平方根は

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

となって，元に戻るとは限らないので注意したい。例えば，

$$\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1 \neq 1 - \sqrt{2}$$

である。

解答：

$$(1) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})} = \frac{4 - \sqrt{10}}{2} \quad (\text{答})$$

$$(2) \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 3 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{答})$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad (\text{答})$$

(3)  $a = \sqrt{6} - \sqrt{5}$  のとき

$$\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 4 = 2\left\{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{5})^2\right\} - 4 = 18 = (3\sqrt{2})^2$$

であるから，

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 4} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

9 確認：言葉や数式を用いて述べた事柄で、正しいかそうでないかが定まっているものを命題といい、正しい命題を真の命題、正しくない命題を偽の命題という。命題が成り立たないことを示す例を反例という。

命題はしばしば  $p \Rightarrow q$  の形で述べられるが、このとき  $p$  を仮定、 $q$  を結論という。命題  $p \Rightarrow q$  に対して、 $q \Rightarrow p$  を逆、 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$  を裏、 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  を対偶という。ここで  $\bar{p}$ 、 $\bar{q}$  はそれぞれ  $p$ 、 $q$  の否定を表す。なお、 $p \Rightarrow q$  は「 $\bar{p}$  または  $q$ 」を意味する。

条件  $p$  と条件  $q$  が数学的に同じ内容であるとき、 $p$  と  $q$  は同値であるといい、 $p \Leftrightarrow q$  と表す。これは、12 で登場する必要十分条件と同じ意味である。(3) で確認するように、対偶はもとの命題と同値である。

解答：

(1) 逆の命題は、「整数  $m$ 、 $n$  に対して、

$m$  または  $n$  が 6 で割り切れるならば、 $mn$  は 6 で割り切れる」 (答)

裏の命題は、「整数  $m$ 、 $n$  に対して、

$mn$  が 6 で割り切れないならば、 $m$  と  $n$  はともに 6 で割り切れない」 (答)

対偶の命題は、「整数  $m$ 、 $n$  に対して、

$m$  と  $n$  がともに 6 で割り切れないならば、 $mn$  は 6 で割り切れない」 (答)

(2)  $m$  または  $n$  が 6 で割り切れるならば、

$m = 6p$  ( $p$  は整数) または  $n = 6q$  ( $q$  は整数)

と表せるから、

$mn = 6pn$  または  $mn = 6mq$   $\therefore$  「逆の命題」は真 (答)

6 = 2 × 3 であり、2 と 3 は互いに素であるから、「6 で割り切れない」ことは「2 と 3 を素因数にもたない」ことと同値である。素因数分解を考えると、 $mn$  が 2 と 3 を素因数にもたないならば、 $m$  も  $n$  も 2 と 3 を素因数にもたないことなるから、

「 $mn$  が 6 で割り切れない」 $\implies$ 「 $m$  も  $n$  も 6 で割り切れない」

$\therefore$  「裏の命題」は真 (答)

6 が合成数であることに注意すると、

反例  $m = 2$ 、 $n = 3$  により「対偶の命題」は偽 (答)

(注) 反例は、他にも考えられる。

(3) 「 $p \Rightarrow q$ 」 $\iff$ 「 $\bar{p}$  or  $q$ 」 $\iff$ 「 $\bar{\bar{q}}$  or  $\bar{p}$ 」 $\iff$ 「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」 (おわり)

10 確認：ものの集まりを集合といい，集合を構成している個々のものを要素という。高校では，集合を規定する条件に対して要素が確定する場合のみ，集合と呼ぶことにする。例えば，「おばさんの集合」は実在するが，（少なくとも高校数学の範囲では）「おばさん」を規定することはできないので，高校数学では「おばさんの集合」は考えないのである。教科書に書いてある「範囲がはっきりした」というのもこのような意味であり，有限集合や有界集合に限定するわけではない。（実際，無限集合も扱う。）  
 $a$ が集合  $A$  の要素であるとき， $a$ は  $A$  に属するといい， $a \in A$  と表す。

$A = \{1, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  のように，集合  $A$  の任意の要素が集合  $B$  の要素に含まれるとき，集合  $A$  は集合  $B$  に含まれる，または集合  $A$  は集合  $B$  の部分集合であるといい， $A \subset B$  と表す。 $A \subset B$  であることを導くときは， $x \in A \Rightarrow x \in B$  を示す。 $A = B$  であることを示すには， $A \subset B$  かつ  $A \supset B$  を示せばよい。要素を全くもたない集合を空集合といい， $\emptyset$  で表す。空集合は，任意の集合の部分集合である。

集合  $A, B$  に対して，

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

と表し，それぞれ共通集合，和集合という。

考察の対象とするものの全体の集合  $U$  をあらかじめ決めておき，集合  $U$  の要素や部分集合について考えるとき，集合  $U$  を（この考察対象についての）全体集合という。全体集合  $U$  の部分集合  $A$  に対して， $A$  に属さない  $U$  の要素全体からなる集合を  $A$  の補集合といい， $\bar{A}$  と表す。全体集合  $U$  の部分集合  $A, B$  について

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

が成り立ち，これをド・モルガンの法則という。

解答：

(1)  $S$  の要素はすべて整数であるから  $S \subset Z$  である。 $n \in Z$  に対して，

$$n = 6n - 5n = 3(2n) + 5(-n) \in S$$

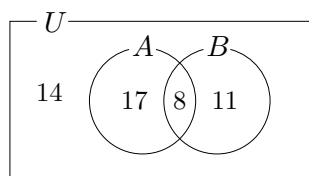
であるから  $Z \subset S$  である。よって， $Z = S$  が成り立つ。 (おわり)

(2)  $x \in \overline{A \cap B} \iff x \notin A \cap B \iff x \notin A \text{ または } x \notin B$   
 $\iff x \in \bar{A} \text{ または } x \in \bar{B} \iff x \in \bar{A} \cup \bar{B}$  (おわり)

$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ かつ } x \notin B$   
 $\iff x \in \bar{A} \text{ かつ } x \in \bar{B} \iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}$  (おわり)

(3)  $n(A \cup B) = n(U) - n(\overline{A \cup B})$   
 $= n(U) - n(\bar{A} \cap \bar{B})$   
 $= 50 - 14 = 36$  (答)

$n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(A \cup B) - n(A)$   
 $= 36 - 25 = 11$  (答)



$n(\bar{A} \cup \bar{B}) = n(B) + n(\overline{A \cap B}) = 19 + 14 = 33$  (答)

11 確認：9で述べたように、 $p$ と $q$ が数学的に同じ内容であるとき、 $p$ と $q$ は同値であるといい、 $p \Leftrightarrow q$ と表すのであった。同値な条件に置き換えて、議論を進展させることを同値変形という。数学の問題を解くことは、同値変形してより簡単な条件に書き換える作業だと言ってよい。例えば、方程式 $(x-1)(x-2)=0$ の解を $x=1$ とすると誤りになるのは、 $(x-1)(x-2)=0$ と $x=1$ が同値でないからである。同値変形がきちんと身につけていないと、数学の理解を阻害することになる。

本問では、方程式・不等式の処理に現れる同値変形と次数下げ(ユークリッドの互除法)に関わる同値変形を扱う。もちろん、これで同値変形のすべてをカバーするわけではないが、同値変形とは何なのかという実感がつかめるはずである。

不等式の解法は、原則的には大小比較(1次不等式)と符号の考察

$$ab > 0 \Leftrightarrow \text{「}a \text{と}b \text{は同符号」}, \quad ab < 0 \Leftrightarrow \text{「}a \text{と}b \text{は異符号」}$$

の2つの手法しかない。それ以上複雑な不等式の場合は、同値変形してこれらに帰着させることになる。符号の考察は、多項式関数のグラフを利用するのがふつうである。

整数 $a$ を正の整数 $b$ で割るとき、ある整数 $q, r$ を用いて

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

と表される。このとき

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$$

が成り立つ。 $0 \leq r < b$ であるから、この作業をくり返すと $a$ と $b$ の最大公約数を求めることができる。こうして最大公約数を求める方法をユークリッドの互除法という。ユークリッドの互除法は、多項式についても適用できる。本問(3)では、多項式の除法と整数の除法が混在しているので、意味の違いに注意する。

解答：

(1) 実数 $\sqrt{x+2}$ が存在することより、

$$x \geq -2$$

$-2 \leq x < 0$ のとき、 $x < \sqrt{x+2}$ は成り立つ。

$x \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} x < \sqrt{x+2} &\Leftrightarrow x^2 < x+2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-2) < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x < 2 \end{aligned}$$

以上まとめて

$$x < \sqrt{x+2} \Leftrightarrow -2 \leq x < 2 \quad (\text{答})$$

(注)  $y = x$ と $y = \sqrt{x+2}$ のグラフから不等式を解くこともできるが、ここでは同値変形の練習として解答した。

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+3} \geq \frac{1}{x+3} &\iff \frac{x^2}{x+3} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+3} \geq 0 \\ &\iff (x+3)(x+1)(x-1) \geq 0 \text{ かつ } x+3 \neq 0 \\ &\iff y = (x+3)(x+1)(x-1) \text{ かつ } y \geq 0 \text{ かつ } x \neq -3 \\ &\iff -3 < x \leq -1 \text{ または } x \geq 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) 最後の部分は,  $y = (x+3)(x+1)(x-1)$  のグラフを描いて確かめよ。

$$(2) \quad \begin{cases} y = x^2 + k & \dots\dots \textcircled{1} \\ x = y^2 + k & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ②より

$$\begin{aligned} y - x &= x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \\ (x-y)(x+y+1) &= 0 \\ \therefore x = y \text{ または } y = -x - 1 & \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$x = y$  のとき

$$\textcircled{1} \iff x^2 - x + k = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - k \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$y = -x - 1$  のとき

$$\textcircled{1} \iff x^2 + x + k + 1 = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -k - \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

以上を整理すると

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} &\iff \textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{3} \\ &\iff \text{“} y = x \text{ かつ } \textcircled{4} \text{” または “} y = -x - 1 \text{ かつ } \textcircled{5} \text{”} \end{aligned}$$

$x$  と  $y$  は 1 次式で結ばれているので,  $x$  が実数なら  $y$  も実数となるから,

「①かつ②を満たす実数  $x, y$  が存在」

$\iff$  「④または⑤を満たす実数  $x$  が存在」

$$\iff \frac{1}{4} - k \geq 0 \text{ または } -k - \frac{3}{4} \geq 0 \iff k \leq \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$

(3)  $2n + 1$  は奇数であることに注意して,

$$4(n^2 + 2) = 4n^2 + 8 = (2n + 1)(2n - 1) + 9$$

であることを考えると

「 $n^2 + 2$  は  $2n + 1$  の倍数」 $\iff$  「 $4(n^2 + 2)$  は  $2n + 1$  の倍数」

$\iff$  「9 は  $2n + 1$  の倍数」

$2n + 1$  が 3 以上の整数であることより

$$2n + 1 = 3 \text{ または } 9$$

$$\therefore n = 1 \text{ または } 4 \quad (\text{答})$$



12 確認： $p \Rightarrow q$ が真の命題であるとき， $p$ は $q$ であるための十分条件， $q$ は $p$ であるための必要条件という。 $p \Rightarrow q$ も $q \Rightarrow p$ も真であるとき， $p$ は $q$ であるための( $q$ は $p$ であるための)必要十分条件，または $p$ と $q$ は同値であるという。したがって，必要か十分かを述べる以前に，命題の真偽が問題となる。基本的には，9のように地道に真偽を判定すればよいのであるが，

同値変形して簡単な条件に帰着させる  $\rightarrow$  11

包含関係により視覚的に考える

という技巧も大切である。「包含関係」について少し補足しておく，条件 $p$ ， $q$ を表す真理集合がそれぞれ $P$ ， $Q$ であるとき，

$$\text{「}p \Rightarrow q \text{が真の命題」} \iff P \subset Q$$

である。これはちょうど，「東京都は本州にある」ことは正しいが，「本州は東京都にある」ことは間違いであるという日常的な論理であり，部分集合の論じ方そのものである。仮定と結論が集合として表現できない命題の場合は，この技巧は使えない。

数学を論じるときの原則は同値変形であるが，同値な条件を引き出すのが単純ではない場合も多い。同値変形にこだわるとかえって難しくなる場面では，まず必要条件から候補を絞り，その候補について十分性を吟味するという二段構えで論じる方法が効果的である。(2)では，整数 $x$ ， $y$ が

$$x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$$

を満たすための必要十分条件をいきなり述べるのは困難なので，

必要条件として $x$ が実数

であることから整数 $y$ の候補を絞り， $x$ と $y$ がともに整数となる(十分性を満たす)ものを一つ一つ調べていくことで解決する。

解答：

(1)

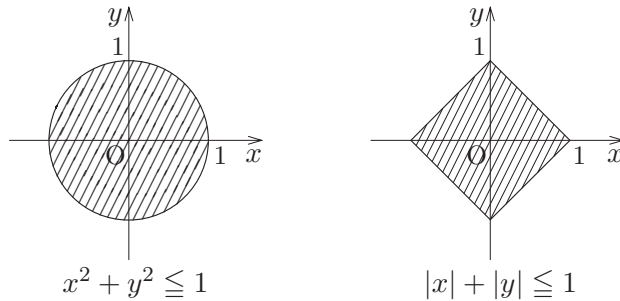
(i) 「 $mn$ が4の倍数」 $\iff$ 「 $m$ または $n$ が4の倍数」または「 $m$ ， $n$ がともに偶数」  
 ~~$\iff$~~  「 $m$ または $n$ が4の倍数」(反例： $m = n = 2$ )

よって， $m$ または $n$ が4の倍数であることは， $mn$ が4の倍数であるための十分条件であるが，必要条件ではない。(答)

(ii)  $|x| + |y| = x + y \iff (|x| + |y|)^2 = (x + y)^2$  かつ  $x + y \geq 0$   
 $\iff |xy| = xy$  かつ  $x + y \geq 0$   
 $\iff xy \geq 0$  かつ  $x + y \geq 0$   
 ~~$\iff$~~   $x + y \geq 0$  (反例： $x = 2$ ， $y = -1$ )

よって， $|x| + |y| = x + y$ であることは， $x + y \geq 0$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。(答)

(iii)  $xy$  平面上に  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $|x| + |y| \leq 1$  を図示すると, それぞれ次図の斜線部分(境界線を含む)となる。



図より

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \not\supseteq \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$$

であるから,  $x^2 + y^2 \leq 1$  であることは,  $|x| + |y| \leq 1$  であるための必要条件であるが, 十分条件ではない。(答)

(2) 与方程式を  $x$  について整理すると,

$$x^2 + 2(y-2)x + 3y^2 - 2y - 8 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

必要条件として  $x$  は実数であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\text{判別式}) &= (y-2)^2 - (3y^2 - 2y - 8) \geq 0 \\ -2(y^2 + y - 6) &\geq 0 \\ (y+3)(y-2) &\leq 0 \end{aligned}$$

$y$  は整数であるから,

$$y = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

(\*)に代入して  $x$  も整数になる場合を求めると,

(i)  $y = -3$  のとき

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0 \quad \therefore x = 5$$

(ii)  $y = -2$  のとき

$$x^2 - 8x + 8 = 0 \quad \therefore x = 4 \pm 2\sqrt{2} \quad (\text{不適})$$

(iii)  $y = -1$  のとき

$$x^2 - 6x - 3 = 0 \quad \therefore x = 3 \pm 2\sqrt{3} \quad (\text{不適})$$

(iv)  $y = 0$  のとき

$$x^2 - 4x - 8 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm 2\sqrt{3} \quad (\text{不適})$$

(v)  $y = 1$  のとき

$$x^2 - 2x - 7 = 0 \quad \therefore x = 1 \pm 2\sqrt{2} \quad (\text{不適})$$

(vi)  $y = 2$  のとき

$$x^2 = 0 \quad \therefore x = 0$$

以上より, 求める整数  $x, y$  の組は

$$(x, y) = (5, -3), (0, 2) \quad (\text{答})$$

13 確認：命題  $p \Rightarrow q$  を証明するのに， $(p$  を仮定したまま)  $q$  を否定することにより矛盾を導く証明方法を背理法という。これは，アリバイにより無実を立証する論理と同じで，犯行時刻に現場とは別の場所に居た人間が犯人だとすれば，同一時刻に 2ヶ所に同じ人間がいたことになって矛盾するから犯人でない，というわけである。

本問では，背理法の論じ方を確認すると同時に，平方因数をもたない整数の平方根が無理数であることの証明を体験する。このような性質は，有理数係数の整方程式の解(代数的数)にまで一般化できるが，それ以上一般の無理数の性質となると，高校の範囲を越えてしまうので，これ以上は立ち入らないことにする。大学での数学を楽しみにしてほしい。

解答：

(1)  $\sqrt{6}$  が有理数とすると，ある整数  $p, q$  で

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすものが存在する。ここで，この有理数値を表す整数  $p, q$  の組は無数に存在するが，必要なら約分することにより

$p$  と  $q$  は互いに素な正の整数

として一般性を損なわない。①の両辺を平方して整理すると

$$6q^2 = p^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

このとき， $p^2$  は 6 の倍数であるから特に 2 の倍数であり，2 は素数であるから，

$p$  は 2 の倍数

である。同様に，

$p$  は 3 の倍数

である。2 と 3 は互いに素であるから，結局  $p$  は 6 の倍数で

$$p = 6m \quad (m \text{ は正の整数}) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

と表される。②に代入すると

$$q^2 = 6m^2$$

となり，同様の議論をくり返せば，

$$q = 6n \quad (n \text{ は正の整数}) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

と表される。

すると，③と④は  $p$  と  $q$  が 6 を公約数にもつことを示し， $p$  と  $q$  が互いに素になれることと矛盾する。よって， $\sqrt{6}$  は無理数である。(証明おわり)

(2)  $b \neq d$  とすると， $b - d (\neq 0)$  で割ることができるので，

$$\sqrt{6} = \frac{c - a}{b - d}$$

と表すことができる。有理数は加減乗除について閉じているから右辺は有理数であるが，(1)より  $\sqrt{6}$  は無理数であるから矛盾である。よって，

$$b = d \text{ したがって } a = c \quad \text{(証明おわり)}$$

14 確認：仮定として起こり得るすべての場合を調べ尽くすことにより、逆もまた成り立つことを示す方法を転換法という。特に、整数の除法が絡む場合には、余りで分類することで効果を発揮する。

本問において、 $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  を変形して  $a, b, c$  を  $2( )$  の形にするのは不可能である。そこで、 $a, b, c$  それぞれが偶数か奇数かで場合分けして  $a^2 + b^2 + c^2$  の振る舞い方を調べ尽くすことにより、それが偶数の  $d^2$  に一致する場合が特定できるのである。ふつうは  $p$  で割った余りで場合分けすると、平方の考察も  $p$  で割った余りで行なえばよいが、

偶数奇数の考察では、平方数は 4 または 8 で割った余りで考えるのが基本であることも覚えておこう。

転換法では場合分けが頼みの綱なので、

場合分けが多いときは表にまとめる

など、見やすく完全収録するための工夫を凝らしたい。

解答：

$n$  を整数として

$$(2n)^2 = 4n^2, \quad (2n+1)^2 = 4(n^2 + n) + 1$$

であるから、偶数の平方は 4 の倍数、奇数の平方は 4 で割ると 1 余る。

$a^2, b^2, c^2$  および  $a^2 + b^2 + c^2$  について 4 で割った余りは

$a^2$	$b^2$	$c^2$	$a^2 + b^2 + c^2$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	2
1	0	1	2
0	1	1	2
1	1	1	3

ですべてである。

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \text{ かつ } d \text{ が偶数}$$

であるとき  $a^2 + b^2 + c^2$  は 4 の倍数であり、上の表より

$$a, b, c \text{ がすべて偶数}$$

の場合に限られる。

(証明おわり)