

# ディオファントス方程式 $2^n x^2 + y^4 = z^4$ について

大塚美紀生

本稿では、次のディオファントス方程式<sup>注1</sup>を考える。

定理 1 方程式

$$2^n x^2 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

を満たす自然数  $n$  と奇数  $x, y, z$  は存在しない。<sup>注2</sup>

定理 2 方程式

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{2}$$

を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

定理 3 自然数  $x, y, z$  が方程式

$$x^4 + y^4 = 2z^4 \tag{3}$$

を満たすならば、 $x = y = z$  である。

定理 1 は文献 [3] の Theorem 2 と実質的には同じであるが、本稿ではその別証明を与えたい。直接的に証明する方針のため、[3] の証明より若干の簡素化が図れたのではないかと思う。

定理 2 は 4 次の場合のフェルマー (Fermat) の問題、定理 3 は 4 次の場合のシェルピンスキー (Sierpiński) の問題<sup>注3</sup> であるが、定理 1 を用いれば直ちに解決する。

定理 1 の証明

(1) を満たす自然数  $n$  および奇数  $x, y, z$  が存在するものと仮定すると、

$$x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1 \tag{4}$$

として一般性を失うことはなく、その中で

$z$  が最小

であるものをとることにする。

$d = \gcd(y, z)$  とすると、(1) より  $d^4 | 2^n x^2$  であるが、 $d$  は奇数であるから

$$d^4 | x^2$$

素因数分解を考えると

$$d^2 | x$$

したがって、 $x \mapsto \frac{x}{d^2}$ ,  $y \mapsto \frac{y}{d}$ ,  $z \mapsto \frac{z}{d}$  と置き換えて論じることにより、はじめから

$$\gcd(y, z) = 1$$

としてよい。

(1)を変形すると,

$$2^n x^2 = z^4 - y^4 = (z^2 + y^2)(z + y)(z - y) \quad (5)$$

$y, z$  は奇数であるから,  $z^2 + y^2, z + y, z - y$  はすべて偶数であり,

$$\begin{aligned} z^2 + y^2 &= (z + y)(z - y) + 2y^2 \\ &= 2z^2 - (z + y)(z - y) \end{aligned}$$

$$(z + y) + (z - y) = 2z$$

$$(z + y) - (z - y) = 2y$$

および  $\gcd(y, z) = 1$  より,

$$\gcd(z^2 + y^2, z + y) = \gcd(z^2 + y^2, z - y) = \gcd(z + y, z - y) = 2$$

また,  $z^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$  であることも考えて, (5)より

$$z^2 + y^2 = 2a^2, \quad z + y = 2b^2, \quad z - y = 2^{n-2} c^2$$

または (6)

$$z^2 + y^2 = 2a^2, \quad z + y = 2^{n-2} c^2, \quad z - y = 2b^2$$

を満たすどの2つも互いに素である正の奇数  $a, b, c$  が存在する。いずれの場合も

$$\begin{aligned} 4a^2 &= 2(z^2 + y^2) = (z + y)^2 + (z - y)^2 \\ &= (2b^2)^2 + (2^{n-2} c^2)^2 \\ &= 4b^4 + 2^{2n-4} c^4 \end{aligned}$$

両辺4で割ると

$$a^2 = b^4 + 2^{2n-6} c^4$$

さらに変形して

$$b^4 = a^2 - 2^{2n-6} c^4 = (a + 2^{n-3} c^2)(a - 2^{n-3} c^2) \quad (7)$$

(1)において

$$2^n x^2 = z^4 - y^4 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$$

より

$$n \geq 4$$

であり,  $a$  が奇数であることより  $a \pm 2^{n-3} c^2$  はともに奇数であるから, (7)より

$$a + 2^{n-3} c^2 = k^4, \quad a - 2^{n-3} c^2 = l^4 \quad (8)$$

を満たす互いに素な正の奇数  $k, l$  が存在する。2式の差をとって

$$2 \cdot 2^{n-3} c^2 = k^4 - l^4$$

$$\therefore 2^{n-2} c^2 + l^4 = k^4 \quad (9)$$

(1), (4)より  $z > y (\geq 1)$  であることに注意すると, (6)より

$$2z > z \pm y = 2b^2$$

(7), (8)より  $b = kl$  であるから

$$2z > 2b^2 = 2k^2 l^2 \geq 2k^2 \geq 2k \quad \therefore z > k (\geq 1)$$

よって, (9)を満たす自然数  $n - 2$  および正の奇数  $c, l, k$  の存在<sup>注4</sup>は,  $z$  の最小性に反するから, (1)を満たす自然数  $n$  と奇数  $x, y, z$  は存在しない。 (証明おわり)

定理 2 の証明<sup>注5</sup>

(2)を満たす自然数  $x, y, z$  の存在を仮定して矛盾を導く。

$d = \gcd(x, y)$  とすると, (2)より  $d^4 \mid z^4$  であるが, 素因数分解を考えると

$$d \mid z$$

となるから,  $(x \mapsto \frac{x}{d}, y \mapsto \frac{y}{d}, z \mapsto \frac{z}{d}$  と置き換えることにより)はじめから

$$\gcd(x, y) = 1$$

であるとして示せばよい。

ここで,  $x, y$  がともに奇数であるとすれば,  $x^4 \equiv y^4 \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $z^4 \not\equiv 2 \pmod{4}$  となるから, (2)のもとでは  $x$  と  $y$  の偶奇は異なる。対称性を考えると,

$x$  は偶数,  $y$  は奇数

であるとして一般性を失わない。このとき,  $x$  は自然数であるから

$$x = 2^m u \quad (m \text{ は自然数}, u \text{ は奇数})$$

と表すことができ, (2)より

$$2^{4m}(u^2)^2 + y^4 = z^4$$

が成り立つ。ところが,  $4m$  は自然数,  $u^2, y, z$  は奇数であるから, 定理 1 に反する。

よって, (2)を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。 (証明おわり)

定理 3 の証明

自然数  $x, y, z$  が(3)を満たすとする。  $2z^4$  は偶数であるから

$$x \equiv y \pmod{2}$$

であるが,  $x$  と  $y$  がともに偶数であるとすれば  $x = 2x_1, y = 2y_1$  とおくと(3)は

$$x_1^4 + y_1^4 = 2z_1^4$$

となるから, はじめから

$x, y$  はともに奇数

であるとして証明すればよい。

(3)の両辺を平方して変形すると

$$(x^4 + y^4)^2 = (2z^4)^2$$

$$(x^4 - y^4)^2 + 4x^4y^4 = 4z^8$$

$$\left(\frac{x^4 - y^4}{2}\right)^2 + (xy)^4 = z^8$$

ここで,  $x \neq y$  とすれば,  $x^4 \equiv y^4 \equiv 1 \pmod{4}$  より

$$\frac{x^4 - y^4}{2} = 2^m u \quad (m \text{ は自然数}, u \text{ は奇数})$$

と表すことができ, (3)は

$$2^{2m}u^2 + (xy)^4 = (z^2)^4$$

となって, 自然数  $2m$  と奇数  $u, xy, z$  の存在が定理 1 と矛盾する。

よって,  $x = y = z$  である。

(証明おわり)

注 1 不定方程式を，整数解や有理数解を考える対象とみるとき，その方程式を一般にディオファントス方程式 (Diophantine equation) という。ピタゴラス方程式のように個別の方程式を指す用語ではない。

注 2 定理 1 は，「 $x^2 + y^4 = z^4$  は非自明な整数解をもたない」という有名な定理の特別な場合に見えるが，定理 1 は「 $n$  が奇数のときも存在しない」と主張しているわけだから，お互いに拡張にはなっていない。

注 3 シェルピンスキーの問題と呼ばれるものはたくさんあるが，ここでは「3 以上の整数  $p$  に対して， $a_n = n^p$  で定められる数列  $\{a_n\}$  に含まれる相異なる 3 項が等差数列をなすことがあるか」というものである。

$$x^p - z^p = z^p - y^p \iff x^p + y^p = 2z^p$$

と変形できるので，「方程式  $x^p + y^p = 2z^p$  が非自明解をもつか」と言い換えられる。ピタゴラス数と同様に， $p = 2$  の場合は無数に非自明解が存在する。

フェルマーの問題については，有名なので説明するまでもないだろう。

注 4 定理 1 の証明において， $n$  が  $n - 2$  にずれてもまた 3 以上であることが奇妙に思えるが，これは何回でも 2 で割り切れることを意味しており， $2^n x = 0$  でなければならぬことを本質的に表している。

注 5 ここでは定理 1 の応用例として扱っているが，定理 2 を証明するだけであれば  $2^n x^4 + y^4 = z^4$  ( $x^4 + 2^m y^4 = z^4$ ) を考える方が短い議論で済む。(→ [2])

## 参考文献

- [ 1 ] W.Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, North-Holland (1988).
- [ 2 ] Y.Suzuki, *Simple proof of Fermat's Last Theorem for  $n = 4$* , Proc. Japan. Acad., 62A, 209-210 (1986).
- [ 3 ] Y.Suzuki, *On the Diophantine Equation  $2^a X^4 + 2^b Y^4 = 2^c Z^4$* , Proc. Japan. Acad., 72A, 92-94 (1996).
- [ 4 ] A.Wakulicz, *On the equation  $x^3 + y^3 = 2z^3$* , Colloq. Math. 5, 11-15 (1957)