

1 (2点間の距離, 中線定理)

- (1) $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とするとき,
 中線定理 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) 平行四辺形 $ABCD$ と同一平面上にある点 P に対して
 $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$
 が成り立つとき, 平行四辺形 $ABCD$ はどのような四角形か。

2 (内分・外分)

座標平面上において $A(1, 2)$, $B(8, 1)$, $C(7, 8)$ とする。

- (1) $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC の交点を D とするとき, 点 D の座標を求めよ。
 (2) $\triangle ABC$ の内心 I の座標を求めよ。
 (3) $\triangle ABC$ の重心 G の座標を求めよ。

3 (直線の方程式)

次の各直線の方程式を求めよ。

- (1) 点 $(3, 1)$ を通り, 傾き 2 である直線
- (2) 2点 $(3, 1)$, $(5, 2)$ を通る直線
- (3) 点 $(3, 1)$ を通り, 直線 $y = 3x$ に垂直な直線
- (4) x 軸と点 $(a, 0)$, y 軸と点 $(0, b)$ で交わる直線 ($ab \neq 0$)

4 (直線束)

2直線 $2x - y - 1 = 0$, $3x + 2y - 3 = 0$ の交点を P とする。

- (1) 点 P と点 $(-1, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。
- (2) 点 P を通り, 直線 $2x - 3y = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。
- (3) 点 P を通り, 直線 $x + 3y = 0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

5 (対称点)

座標平面上に 2 点 $A(0, 6)$, $B(5, 4)$ と直線 $l: x + 2y = 2$ がある。

- (1) 直線 l に関して点 A と対称な点の座標を求めよ。
- (2) 直線 l 上にある点 P が $AP + BP$ を最小にするとき, 点 P の座標を求めよ。

6 (点と直線の距離)

- (1) xy 平面上において, 点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であることを示せ。

- (2) 点 $(-1, 2)$ を中心とする半径 1 の円 C 上の点 P から直線 $x + 3y + 5 = 0$ におろした垂線の長さ h の最大値と最小値を求めよ。

7 (三角形の面積公式)

(1) $O(0, 0)$, $P(a, b)$, $Q(c, d)$ とするとき, $\triangle OPQ$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

であることを示せ。

(2) $A(1, 0)$, $B(4, 9)$, $C(0, 2)$ とするとき, $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

8 (円の方程式)

次の各円の方程式を求めよ。

- (1) 点 $(1, 2)$ を通り, x 軸および y 軸に接する円。
- (2) 1 つの直径の両端が 2 点 $A(3, 5)$, $B(7, -1)$ である円。
- (3) 3 点 $A(1, 0)$, $B(4, 9)$, $C(0, 2)$ を通る円。

9 (円と直線)

- (1) 点 $(3, 1)$ を通り, 円 $x^2 + y^2 = 2$ に接する直線の方程式を求めよ。また, 接点の座標を求めよ。
- (2) 点 $(1, 2)$ における円 $x^2 + y^2 = 5$ の接線と平行で, この円によって切り取られる線分の長さが 4 である直線の方程式を求めよ。

10 (円束)

xy 平面上に 2 つの円

$$C_1 : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4, \quad C_2 : (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

がある。

- (1) 円 C_1 と円 C_2 は異なる 2 点で交わることを示せ。
- (2) 円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた直線上 (で円外) の任意の点から円 C_1 と円 C_2 にひいた接線の長さは等しいことを示せ。
- (4) 円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点および点 $(3, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

11 (軌跡)

xy 平面において、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + k$ が異なる 2 点 P, Q で交わるとき、 PQ を $1:2$ に内分する点 R の軌跡を求めよ。ただし、点 P の x 座標は点 Q の x 座標より小さいものとする。

12 (アポロニウスの円, 円周角)

- (1) $A(a, 0), B(b, 0)$ とするとき、 $AP : BP = m : n$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。
ただし、 m, n は相異なる正の定数である。
- (2) $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$ とするとき、 $\angle APB = 30^\circ$ を満たす点 P の軌跡を求め、
図示せよ。

13 (極線)

$a > b > 0$ とする。円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 $(b, \sqrt{a^2 - b^2})$ における接線と x 軸との交点を P とする。また、円の外部の点 (b, c) からこの円に 2 本の接線を引き、接点を Q, R とする。このとき、2 点 Q, R を通る直線は P を通ることを示せ。

14 (不等式の表す領域)

次の不等式を表す領域を図示せよ。

(1) $(2x^2 - y)(x^2 + y^2 - 5) < 0$

(2) $y < \frac{1}{x}$

15 (存在範囲)

- (1) 実数 a が $a \geq 0$ の範囲を変化するとき, xy 平面上の直線 $y = ax - a^2$ が通過する範囲を求めよ。
- (2) $a^2 - ab + b^2 \leq 1$ のとき, 点 $(a + b, ab)$ の存在範囲を求めよ。

16 (領域と最大・最小)

- (1) 連立不等式

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y - 12 \leq 0, 4x + y - 20 \leq 0, x - y + 3 \geq 0$$

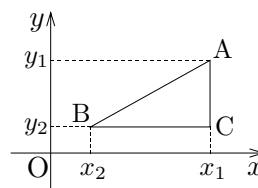
の表す領域を D とする。点 (x, y) が D を動くとき, $-3x + 4y$ の最大値を求めよ。

- (2) $2x^2 - 5x \leq y \leq 3x - 6$ のとき, $x + 2y$ の最大値と最小値を求めよ。

1 確認：2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ の間の距離は、点 $C(x_1, y_2)$ をとって直角三角形 ABC に三平方の定理 (ピタゴラスの定理) をあてはめると

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

であることがわかる。この式は点 A, B の位置によらず機械的に成り立つことが重要である。



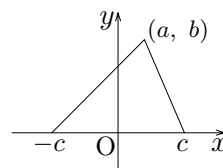
座標平面上で図形を考えることの利点は、図形的性質が数式で表現されるために、直感に頼ることなく機械的な計算で結果が出せることである。しかし、そのことは同時に、覚えなければならない基本的手法がたくさんあることと、処理しやすい分だけ感覚を鈍らせてしまうことを意味するので、最終的には数式処理と図形的考察をバランス良く行なうよう心掛けたいものである。定理の証明においては、注目している図形を座標平面上のどこにもってくるのか、どの図形量を文字で置く(変数設定する)のか、といった考察は重要である。本問の場合であれば、対称性を考えて中点 M を原点にとるのが良いだろう。

解答：

(1) $M(0, 0)$ にとり、 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (a+c)^2 + b^2 + (a-c)^2 + b^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 2(AM^2 + BM^2) \end{aligned}$$

(おわり)

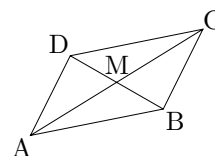


(2) 対角線 AC, BD の交点を M とすると、平行四辺形の性質より M は AC および BD の中点である。(1)の証明内容を考えると、中線定理は三角形ができない場合でも成り立つから、場合分けの必要なく

$$\begin{aligned} PA^2 + PC^2 &= 2(PM^2 + AM^2) \\ PB^2 + PD^2 &= 2(PM^2 + BM^2) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2 &\iff AM = BM \\ &\iff AC = BD \end{aligned}$$



であるから、

四角形 $ABCD$ は長方形 (答)

である。

(注) (2)の解答は、そのまま逆にたどることができる。したがって、(四角形 $ABCD$ が平行四辺形のもとで)必要十分条件である。

2 確認：A(x₁, y₁), B(x₂, y₂) とし, m, n を正の数とする。

点 P が線分 AB 上において

$$AP : PB = m : n$$

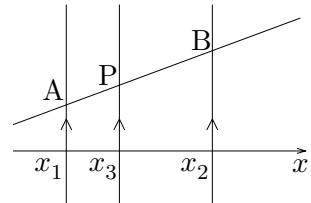
が成り立つとき, P は線分 AB を m : n (の比) に内分するといひ, 点 P を内分点という。特に, 中点は 1 : 1 に内分する点である。

P(x₃, y₃) とすると, 平行線 x = x₁, x = x₃, x = x₂ を横切る直線が切り取られる線分の長さの比は一定であるから,

$$(x_3 - x_1) : (x_2 - x_3) = AP : PB = m : n$$

$$n(x_3 - x_1) = m(x_2 - x_3)$$

$$\therefore x_3 = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$



y 座標についても同様であるから, 結局

$$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$$

点 Q が直線 AB 上線分 AB の外側において AQ : BQ = m : n が成り立つとき, Q は線分 AB を m : n (の比) に外分するといひ, 点 Q を外分点という。ただし, 1 : 1 に外分することはできない。点 Q の座標が

$$Q\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n}\right)$$

となることは, 各自で確かめておいてほしい。

三角形の内心とは内接円の中心, すなわち各辺から等距離にある三角形内部の点のことであるが, それは各頂角の二等分線の交点であることと同値であった。そこで, 次の定理を思い出そう。

△ABC において ∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を D,

∠BAC の外角の二等分線と直線 BC との交点を E とするとき,

$$BD : DC = AB : AC, \quad BE : EC = AB : AC$$

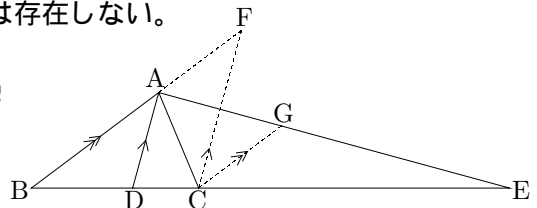
ただし, AB = AC のときは交点 E は存在しない。

証明は, 図のように補助線を引けば

$$BD : DC = BA : AF = AB : AC$$

$$BE : EC = AB : GC = AB : AC$$

が導かれるので, 各自でやってみよう。



三角形の重心は 3 中線の交点であるが,

中点連結定理を用いれば, 中線を頂点から対辺の中点に向かって 2 : 1 に内分する点が重心であることがわかる。(3) で考えたことを一般化すると, 次の公式が得られる。

A(a₁, a₂), B(b₁, b₂), C(c₁, c₂) とするとき,

△ABC の重心 G の座標は

$$G\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)$$

解答：

(1) 2点間の距離公式より

$$AB = BC = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$$

であるから，二等辺三角形の性質より $\angle ABC$ の二等分線 BD は中線となる。辺 AC の中点として点 D の座標は

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (4, 5) \quad (\text{答})$$

(2) AI は $\angle DAB$ の二等分線であるから，

$$\begin{aligned} DI : IB &= AD : AB \\ &= \sqrt{3^2 + 3^2} : \sqrt{7^2 + 1^2} \\ &= 3 : 5 \end{aligned}$$

内分点の公式より，内心 I の座標は

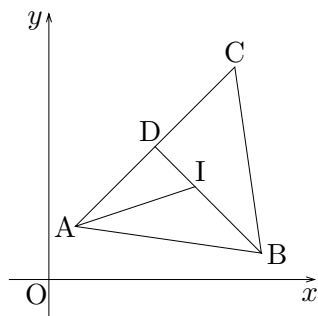
$$\left(\frac{5 \times 4 + 3 \times 8}{3 + 5}, \frac{5 \times 5 + 3 \times 1}{3 + 5}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right) \quad (\text{答})$$

(3) 重心 G は中線 DB を $1:2$ に内分するから，

$$G\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 8}{1 + 2}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 1}{1 + 2}\right) = \left(\frac{16}{3}, \frac{11}{3}\right) \quad (\text{答})$$

(注)

- 1° 本問では重心の座標の導き方を確認したが，結果は公式として覚えておくこと。
- 2° 内接円の半径は， $\triangle ABC$ の面積を2通りに表すか，点と直線の距離公式(→ 6)を用いることにより求められる。



3 確認：「まっすぐ」という図形の言葉は，数式では「比が一定」と表現される。 x 軸方向の変化量 1 に対する y 軸方向の変化量の比(比例定数)をその直線の傾きという。その考え方をもとに，点 (a, b) を通る傾き m の直線の方程式を立ててみると

$$(x - a) : (y - b) = 1 : m$$

$$\therefore y = m(x - a) + b$$

傾きの意味から，

$$y = mx + n \text{ と } y = px + q \text{ が平行} \iff m = p$$

であることが直ちにわかる。

また， $O(0, 0)$ ， $A(1, m)$ ， $B(-m, 1)$ ($m \neq 0$) を頂点とする三角形を考えると，

$OA = OB = \sqrt{m^2 + 1}$ ， $AB = \sqrt{(1 + m)^2 + (m - 1)^2} = \sqrt{2(m^2 + 1)}$ より $\triangle OAB$ は $\angle AOB = 90^\circ$ なる直角二等辺三角形であるから

$$y = mx + n \text{ と } y = px + q \text{ が垂直} \iff mp = -1 \left(p = -\frac{1}{m} \right)$$

が導かれる。

今度は先に 1 次方程式 $y = mx + n$ が与えられたとする。任意の実数 x_0 に対して $y_0 = mx_0 + n$ により y_0 を定めると，2 式の差をとって

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

となるから，点 (x_0, y_0) を通る直線を表す。すなわち，

座標平面上の直線 \iff 1 次方程式で表される図形

と特徴づけられる。特に，2 点を通る直線はただ一つに定まるから，2 点の座標を満たすような 1 次方程式を見つけるといふ考え方が成り立ち，

$$x \text{ 切片が } a (\neq 0), y \text{ 切片が } b (\neq 0) \text{ である直線は } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{切片形})$$

と表されることも納得がいくであろう。

解答：

(1) $y = 2(x - 3) + 1 \quad \therefore y = 2x - 5$ (答)

(2) 傾きは $\frac{2-1}{5-3} = \frac{1}{2}$ であるから，求める直線の方程式は

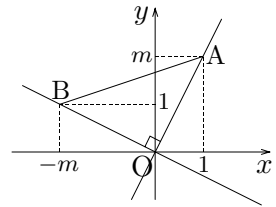
$$y = \frac{1}{2}(x - 3) + 1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(3) $y = 3x$ に垂直な直線の傾きは $-\frac{1}{3}$ であるから，求める直線の方程式は

$$y = -\frac{1}{3}(x - 3) + 1 \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad (\text{答})$$

(4) $\frac{a}{a} + \frac{0}{b} = 1$ ， $\frac{0}{a} + \frac{b}{b} = 1$ ， $(a, 0) \neq (0, b)$ より，求める直線の方程式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{答})$$



4 確認：3 では 1 次方程式が直線を表すことを確認したが，未知係数の場合や y の係数が 0 になる場合も想定すると，一般の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ で表す方が得策である。3 の議論を一般化すると，点 (x_0, y_0) を通る直線について

$$(x - x_0) : (y - y_0) = p : q \iff q(x - x_0) - p(y - y_0) = 0$$

であり， $O(0, 0)$ ， $P(p, q)$ ， $Q(q, -p)$ のとき， $OP \perp OQ$ はベクトルの内積を用いて

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = pq + q(-p) = 0$$

と表現できる。そこで，点 (x_0, y_0) を通る直線について

直線 $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ の法線ベクトルは (a, b) (に平行)

直線 $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ の方向ベクトルは $(b, -a)$ (に平行)

というふうにベクトルを通して見ると構造の把握は容易になり，

$$ax + by + c = 0 \text{ と } px + qy + r = 0 \text{ が平行} \iff a : b = p : q$$

$$ax + by + c = 0 \text{ と } px + qy + r = 0 \text{ が垂直} \iff ap + bq = 0$$

も自明に近くなる。

直線の集合を直線群というが，2 つの定直線 $ax + by + c = 0$ ， $px + qy + r = 0$ の一次結合

$$k(ax + by + c) + l(px + qy + r) = 0$$

で表される図形(直線)全体を特に直線束という。

解答：

交点 P を通る直線は，一般に

$$k(2x - y - 1) + l(3x + 2y - 3) = 0$$

と表される。

(1) 点 $(-1, 1)$ を通るから，

$$k(-2 - 1 - 1) + l(-3 + 2 - 3) = 0 \quad \therefore k = \frac{l}{-1}$$

よって，求める直線の方程式は

$$(2x - y - 1) - (3x + 2y - 3) = 0 \quad \therefore x + 3y - 2 = 0 \quad (\text{答})$$

(2) 平行条件より

$$(2k + 3l) : (-k + 2l) = 2 : (-3)$$

$$2(-k + 2l) = -3(2k + 3l) \quad \therefore \frac{k}{13} = \frac{l}{-4}$$

よって，求める直線の方程式は

$$13(2x - y - 1) - 4(3x + 2y - 3) = 0 \quad \therefore 14x - 21y - 1 = 0 \quad (\text{答})$$

(3) 垂直条件より

$$(2k + 3l) + 3(-k + 2l) = 0 \quad \therefore \frac{k}{9} = l$$

よって，求める直線の方程式は

$$9(2x - y - 1) + (3x + 2y - 3) = 0 \quad \therefore 21x - 7y - 12 = 0 \quad (\text{答})$$

5 確認：2点 A, A' が直線 ℓ に関して対称であるとは、直線 ℓ で折り返したときに2点が重なることであるが、式で表すには

「 AA' の中点が ℓ 上」かつ $AA' \perp \ell$

ととらえるのがよい。垂直条件はベクトル(の内積)を用いるとわかりやすい。

点 P が線分 AB 上にあるとき $AP + BP = AB$

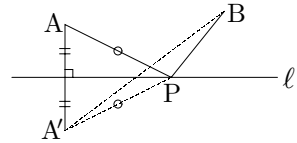
点 P が線分 AB 上にないとき $AP + BP > AB$

であるから、2点 A, B が直線 ℓ に関して反対側にある場合は、線分 AB と ℓ の交点が P であるとき $AP + BP$ は最小である。

2点 A, B が直線 ℓ が同じ側にあるときは、なんとか上の議論に持ち込むために一方を対称点に置き換えて考える。例えば、 A の対称点を A' とすると A' と B は ℓ に関して反対側にあり、

$$AP + BP = A'P + BP$$

は P が線分 $A'B$ と直線 ℓ の交点のとき最小となる。



解答：

(1) ℓ に関する $A(0, 6)$ の対称点を $A'(a, b)$ とする。

AA' の中点は ℓ 上にあるから

$$\frac{a+0}{2} + 2 \frac{b+6}{2} = 2 \quad \therefore a + 2b = -8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$AA' \perp \ell$ より

$$(a-0) : (b-6) = 1 : 2 \quad \therefore 2a - b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

連立方程式 $\{\textcircled{1}, \textcircled{2}\}$ を解くと

$$a = -4, b = -2$$

であるから、 ℓ に関して A と対称な点 A' の座標は

$$A'(-4, -2) \quad (\text{答})$$

(2) 2点 A, B と直線 ℓ の位置関係を調べると、

$$0 + 2 \times 6 - 2 > 0, \quad 5 + 2 \times 4 - 2 > 0$$

より(特に同符号であるから)2点 A, B は直線 ℓ に関して同じ側にある。直線 ℓ 上の点 P は点 A と(1)で求めた対称点 A' から等距離にあるから

$$AP + BP = A'P + BP$$

であり、2点 A', B は直線 ℓ に関して反対側にあることに注意すると、

P が $A'B$ と ℓ の交点のとき $AP + BP$ は最小

となる。直線 $A'B$ の方程式は

$$y = \frac{4 - (-2)}{5 - (-4)}(x + 4) - 2 \quad \therefore y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

であり、直線 ℓ との交点を求めて

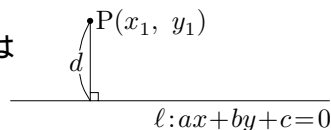
$$P\left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right) \quad (\text{答})$$

6 確認：一般に，図形 F と図形 G との距離とは，

「図形 F の点 P と図形 G の点 Q を結ぶ線分 PQ の長さの最小値」
 のことをいう。したがって，点 P と直線 ℓ の距離は，点 P から直線 ℓ におろした垂線の長さということになる。

点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $\ell: ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



であり，点と直線の距離公式または(2次元の)ヘッセの公式と呼ばれる。この公式は「円と直線」(→ 9)を考える上で重要な役割を果たすが，公式の証明自体も垂線の足を求める解法として重要である。

点 (x_1, y_1) を通り直線 $ax + by + c = 0$ に垂直な直線の方程式は

$$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0 \quad (\rightarrow 4)$$

となるから，これと ℓ の方程式を連立させれば垂線の足が求まる。ただ，実際計算する場合は，垂線の足の座標 (x_2, y_2) は求めないで $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ を求める方が見通しが良い。また，ベクトルを用いてもよいだろう。

いずれにせよ，直線 ℓ の係数に未知数が入っているので，傾きに注目する解法や線分の長さの最小値を求める解法は避ける方がよい。

(2)については，垂線の長さが最大・最小となる点 P の位置を図形的にとらえた上で，点と直線の距離公式を用いるとスマートに解ける。別解として，単位円 C 上の点 P は $(\cos \theta - 1, \sin \theta + 2)$ と表されるから，三角関数の問題として処理してもよい。

解答：

(1) 点 $P(x_1, y_1)$ を通り，直線 $ax + by + c = 0$ に垂直な直線は

$$(x - x_1) : (y - y_1) = a : b$$

と表されるから，点 P から直線 $ax + by + c = 0$ におろした垂線の足 Q の座標を (x_2, y_2) とすると，ある実数 t を用いて

$$x_2 - x_1 = at, \quad y_2 - y_1 = bt$$

と表される。点 Q が直線 $ax + by + c = 0$ 上にあることより t を求めると，

$$a(at + x_1) + b(bt + y_1) + c = 0$$

$$\therefore t = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

よって，点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$\begin{aligned} d = PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(at)^2 + (bt)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} |t| \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

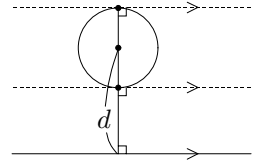
(おわり)

(2) 円 C の中心 $(-1, 2)$ と直線 $x + 3y + 5 = 0$ との距離 d は

$$d = \frac{|-1 + 3 \times 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$$

垂線の長さ h は, 点 P が中心 $(-1, 2)$ を通る垂線上にくるとき最大・最小となるから,

最大値は $\sqrt{10} + 1$, 最小値は $\sqrt{10} - 1$ (答)



(注) 参考までに別の計算技巧を記しておくが, 本質的には上の解答と同じである。

$$(1) \quad ax + by + c = 0 \iff a(x - x_1) + b(y - y_1) = -(ax_1 + by_1 + c) \quad \dots\dots ①$$

点 $P(x_1, y_1)$ を通り, 直線 $ax + by + c = 0$ に垂直な直線の方程式は

$$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0 \quad \dots\dots ②$$

① $\times a$ + ② $\times b$ より

$$(a^2 + b^2)(x - x_1) = -a(ax_1 + by_1 + c)$$

① $\times b$ - ② $\times a$ より

$$(a^2 + b^2)(y - y_1) = -b(ax_1 + by_1 + c)$$

この連立方程式の解 (x, y) は, 点 P から直線 $ax + by + c = 0$ におろした垂線の足の座標であり, 平方して加えると

$$(a^2 + b^2)^2 \{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\} = (a^2 + b^2)(ax_1 + by_1 + c)^2$$

となるから, 垂線の長さ d は

$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2) 円 C 上の点 P は

$$P(\cos \theta - 1, \sin \theta + 2)$$

と表されるから, 点と直線の距離公式と加法定理より

$$\begin{aligned} h &= \frac{|(\cos \theta - 1) + 3(\sin \theta + 2) + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|3 \sin \theta + \cos \theta + 10|}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{|\sqrt{10}(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) + 10|}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{|\sqrt{10} \sin(\theta + \alpha) + 10|}{\sqrt{10}} \\ &= \sin(\theta + \alpha) + \sqrt{10} \quad (> 0) \end{aligned}$$

ただし, α は

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

を満たす定角である。よって,

$$\text{最大値は } 1 + \sqrt{10} \quad \text{最小値は } -1 + \sqrt{10}$$

7 確認：三角形の面積公式

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

は、融合問題や計算量の多い問題で真価を発揮する重要な公式である。三角形の頂点が原点にないときは、平行移動させて適用すればよい。

証明の方針としては、点 Q から直線 OP におろした垂線の長さ h をヘッセの公式（点と直線の距離公式）で求めて、

$$S = \frac{1}{2} \times OP \times h$$

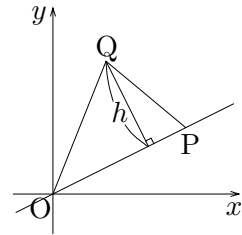
に代入するのが簡単である。別の方法として、面積公式

$$S = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ$$

に余弦定理から得られる式

$$\cos \angle POQ = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2OP \cdot OQ}$$

に代入しても導くことができる。



解答：

(1) 直線 OP の方程式は

$$x : y = a : b \quad \therefore bx - ay = 0$$

点 Q(c, d) と直線 OP の距離 h は

$$h = \frac{|bc - ad|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|ad - bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

よって、 $\triangle OPQ$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \frac{|ad - bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

(おわり)

(2) $\triangle ABC$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動すると、

$$A \rightarrow (0, 0), B \rightarrow (3, 9), C(-1, 2)$$

と移るから、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|3 \times 2 - 9 \times (-1)| = \frac{15}{2} \quad (\text{答})$$

8 確認：中学校で習ったように，

円とは定点から等距離にある点の軌跡

のことである。その定点を円の中心，一定の距離を半径という。円の中心を (a, b) ，半径を r として，円を式で表現すると

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

となるが，通常はこれと同値な式

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

を用いることにする。この式の形を標準形という。展開すると

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

となるので，円の方程式は一般に

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 - 4c^2 > 0)$$

と表すことができる。

円について考えるとき

三角形の外心は各辺の垂直二等分線の交点

$\angle APB = 90^\circ$ を満たす点 P の軌跡は AB を直径とする円

(厳密には 2 点 A, B を除いたもの)

であることも利用価値が高い。特に，AB を直径とする円は公式である。

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ とするとき，三平方の定理(ピタゴラスの定理)より

$$AP^2 + BP^2 = AB^2$$

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$$

であるから，整理すると

2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を直径の両端とする円の方程式は

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

である。ここで，

$$A = P \iff x - x_1 = y - y_1 = 0$$

$$B = P \iff x - x_2 = y - y_2 = 0$$

であるから，端点 A, B に関する場合分けは生じない。また，この公式はちょうど“ $\angle APB = 90^\circ$ または $P = A$ または $P = B$ ”をベクトルで表現した式

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

と合致する。

このほかにも，円の方程式を求める方法はいくつかあるが，それらについては

10, 12 で扱う。

解答：

- (1) 半径を r とすると、両座標軸に接する円の中心の x 座標、 y 座標はともに絶対値が r である。点 $(1, 2)$ を通るとすれば中心は第 1 象限にあり、方程式は

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

の形である。 $x = 1, y = 2$ を代入して

$$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5) = 0 \quad \therefore r = 1 \text{ または } r = 5$$

よって、求める円の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \quad (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad (\text{答})$$

- (2) 公式より

$$(x-3)(x-7) + (y-5)(y+1) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \quad (\text{答})$$

- (3) 題意の円は点 $A(1, 0)$ を通るから、方程式は

$$(x-1)^2 + y^2 + a(x-1) + by = 0$$

と表される。残りの 2 点 $B(4, 9), C(0, 2)$ を通ることより

$$\begin{cases} 3a + 9b + 90 = 0 \\ -a + 2b + 5 = 0 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = -9, \quad b = -7$$

よって、求める円の方程式は

$$(x-1)^2 + y^2 - 9(x-1) - 7y = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 11x - 7y + 10 = 0 \quad (\text{答})$$

(注)

1° (2) では、図形的に考えて、 AB の中点を中心とする半径 $\frac{1}{2}AB$ の円として求めてもよい。

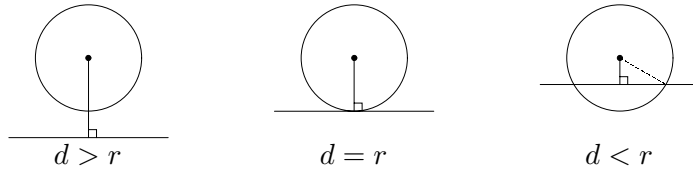
2° 上に述べた(3)の解答では、原点を通る円 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ で 2 点 $(3, 9), (-1, 2)$ を通るものを求めるのと実質的には同じであると見抜いて、未知数を減らす工夫をしている。

3° (3)の別解として、 AB の垂直二等分線と AC の垂直二等分線の交点として中心を求め、 A, B, C のいずれかとの距離として半径を求める方法も考えられる。また、直線 AC の方程式と AC を直径とする円の方程式をまず求め、 $\boxed{10}$ のように

$$x(x-1) + y(y-2) + k\left(x + \frac{y}{2} - 1\right) = 0$$

とおいて解いてもよい。

9 確認：円と直線の位置関係は，次図のように円の中心と直線の距離 d と円の半径 r を用いてとらえることができる。



ここで，中心と直線の距離は，ヘッセの公式 (→ [6]) で求められる。

この視点で考えると

- (i) 円の接線は，円の中心からの距離が半径に等しい直線として求められる
- (ii) 円と直線が 2 点で交わるときは，円の中心と弦の midpoint および端点を結んでできる直角三角形から何か条件が得られる

という発想が生まれる。

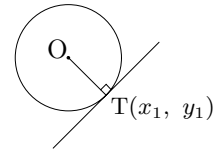
円の接線は，「接点に垂直ができる」ことから求められる。

円 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 上の点 (x_1, y_1) における接線は，2 点 $(0, 0)$, (x_1, y_1) を結ぶ線分と垂直であるから，[4] で確認したことを用いて方程式は

$$x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0$$

と求まる。 $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ に注意してまとめると

$$x_1x + y_1y = r^2$$



接線の方程式から接点の座標を求めるには，円の方程式と接線の方程式を連立させてもよいが，円の中心を通り接線に垂直な直線と接線の交点として求める方法を覚えておきたい。それは計算の見通しが良いということもあるが，図形的考察と数式処理を組み合わせるといふ発想は応用範囲が広いからである。

解答：

(1) 直線 $x = 3$ は円 $x^2 + y^2 = 2$ に接しないから，求める接線は

$$m(x - 3) - y + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

おくことができる。円と接するための条件は円の中心からの距離が半径に等しくなることであるから，

$$\frac{|m(0 - 3) - 0 + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{2}$$

$$(-3m + 1)^2 = 2(m^2 + 1)$$

$$7m^2 - 6m - 1 = 0$$

$$(m - 1)(7m + 1) = 0$$

$$\therefore m = 1 \text{ または } m = -\frac{1}{7}$$

①に代入して，求める接線の方程式は

$$x - y - 2 = 0, \quad x + 7y - 10 = 0 \quad (\text{答})$$

円の中心 $(0, 0)$ を通り接線 $x - y - 2 = 0$ に垂直な直線の方程式は $x + y = 0$ であるから、連立方程式

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

を解いて、接点の座標は $(1, -1)$

円の中心 $(0, 0)$ を通り接線 $x + 7y - 10 = 0$ に垂直な直線の方程式は $7x - y = 0$ であるから、連立方程式

$$\begin{cases} x + 7y - 10 = 0 \\ 7x - y = 0 \end{cases}$$

を解いて、接点の座標は $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

以上まとめて、

$$\begin{cases} \text{接線 } x - y - 2 = 0 \text{ の接点の座標は } (1, -1) \\ \text{接線 } x + 7y - 10 = 0 \text{ の接点の座標は } (\frac{1}{5}, \frac{7}{5}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(2) 点 $(1, 2)$ における円 $x^2 + y^2 = 5$ の接線の方程式は、公式より

$$x + 2y = 5$$

であるから、この接線と平行な直線は

$$x + 2y + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

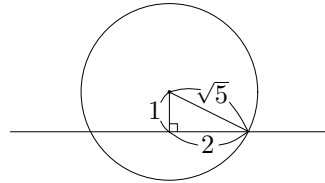
と表される。弦の長さが 4 であるから

$$\frac{|0 + 2 \times 0 + k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2}$$

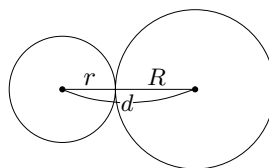
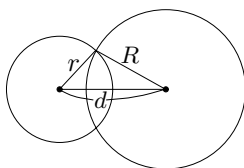
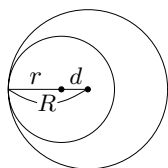
$$\therefore k = \pm\sqrt{5}$$

②に代入して、求める直線の方程式は

$$x + 2y \pm \sqrt{5} = 0 \quad (\text{答})$$



10 確認：2円の位置関係は，2円の半径 r, R と中心間距離 d でとらえられる。



内接： $d = |R - r|$ 交差： $|R - r| < d < R + r$ 外接： $d = R + r$

図からもわかるように，2点で交わるための条件は「三角形の成立条件」と同じであることに注意すると覚えやすい。

2つの円

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

が2点で交わるとき，交点の座標は連立方程式の実数解(の組)であるから，

$$k(x^2 + y^2 + ax + by + c) + l(x^2 + y^2 + px + qy + r) = 0$$

$$(k, l) \neq (0, 0)$$

で表される図形は2交点を通る。

(i) $k + l = 0$ のとき

2円が同一ではないので $(a, b) \neq (p, q)$ であるから，1次方程式すなわち直線を表す。2点を通る直線は一意に定まるから，2交点を通る直線の方程式となる。

(ii) $k + l \neq 0$ のとき

式の形は $x^2 + y^2 + \dots$ となるが，それだけでは円とは限らない。そこで，一般に方程式 $X^2 + Y^2 = k$ (k は定数) が表す図形(と実数解の個数)を考えると，

$$\begin{cases} k > 0 \text{ のとき} & X^2 + Y^2 = k \text{ は円を表し，実数解(点)は無数である} \\ k = 0 \text{ のとき} & X^2 + Y^2 = k \text{ は1点を表し，実数解(点)はただ一つである} \\ k < 0 \text{ のとき} & X^2 + Y^2 = k \text{ は空集合を表し，実数解(点)は存在しない} \end{cases}$$

となるから，2交点を通る場合は円になることがわかる。

このように，2つの定円を表す式の一次結合で表される図形全体を円束そくという。

以上では，2円が交わる場合で考えたが，2円の位置に関係なく

$$k(x^2 + y^2 + ax + by + c) + l(x^2 + y^2 + px + qy + r) = 0$$

は何かしらの図形を表しているはずである。2円の方程式を標準形で表して

$$C_1 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$$

$$C_2 : (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$$

とおくと， $k_1 > 0, k_2 > 0$ のとき

$$k_2 \{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2\} - k_1 \{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2\} = 0$$

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2} : \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2} = k_1 : k_2$$

であるから，2円に引いた接線の長さの比が一定である点の軌跡を表す。特に，接線の長さが等しい点の軌跡は直線(またはその一部)となり，2円の根軸という。

解答：

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(1) 2円の中心間距離 d は

$$d = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

円 C_1 の半径は 2, 円 C_2 の半径は 3 であり,

$$|2-3| < d < 2+3$$

であるから, 円 C_1 と円 C_2 は異なる 2 点で交わる。

(おわり)

(2) ① - ② より $6x - 4y - 2 = 0$

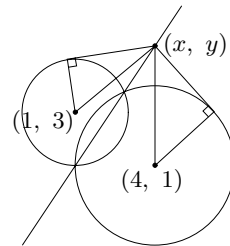
$$3x - 2y - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

ここで,

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \iff \textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{3}$$

であるから, 特に③で表される図形は 2 円 C_1, C_2 の交点を通る。また, 1 次方程式は直線を表すから, 求める直線の方程式は③であり

$$3x - 2y - 1 = 0 \quad (\text{答})$$



(3) (2)の変形過程を考えると

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \iff (x-1)^2 + (y-3)^2 - 2^2 \\ = (x-4)^2 + (y-1)^2 - 3^2 \end{aligned}$$

であるから, 直線③上の点から 2 円 C_1, C_2 に接線が引けるときの, この式は接線の長さが等しいことを表す。

(おわり)

(4) ① かつ ② \iff ① かつ ③

であることに注意すると, 2 円 C_1, C_2 の交点を通る円の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 - 4 + k(3x-2y-1) = 0 \quad (k \text{ は定数}) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

と表される。点 (3, 1) を通るとすれば,

$$(3-1)^2 + (1-3)^2 - 4 + k(3 \times 3 - 2 \times 1 - 1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3}$$

④に代入して, 求める円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 4x - \frac{14}{3}y + \frac{20}{3} = 0 \quad (\text{答})$$

(注) ④は 2 円の方程式を直接用いて

$$a\{(x-1)^2 + (y-3)^2 - 4\} + b\{(x-4)^2 + (y-1)^2 - 9\} = 0$$

と立式してもよいが, ④のように立式して k 一変数で処理する方が $a : b$ を求めるより計算しやすい。なお, a と b は一方が 0 となる場合もあり得るので, 何の説明もなしに

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 - 4 + k\{(x-4)^2 + (y-1)^2 - 9\} = 0$$

とおくことはできない。

11 確認：ここまでの議論で、直線は「比例関係(1次方程式)を満たす点の軌跡」、円は「定点(中心)から等距離にある点の軌跡」、もしくは「ピタゴラス方程式を満たす点の軌跡」ととらえてきた。つまり、この単元全体が「軌跡と領域」なのであって、

図形を「条件(式)を満たす点の集まり」ととらえる

ことが基本であった。あらためて軌跡を求める手順を述べると、

- 1° 軌跡の動点 P を (x, y) とおく。
- 2° (必要なら文字を追加して) 動点 P がもつ条件をすべて列挙する。
- 3° 余計な文字をすべて消去して、 x, y だけの条件式を導く。

点集合が線状の場合は軌跡、点集合が平面的な広がりをもつ場合は領域と呼ぶ。

解答：

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + k$ が異なる 2 点で交わることより、2 次方程式

$$x^2 - 2x - k = 0 \quad \dots\dots ①$$

は相異なる 2 実数解をもつから、

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = 1 + k > 0 \quad \dots\dots ②$$

②のもとで、①より

$$(P \text{ の } x \text{ 座標}) = 1 - \sqrt{1+k}, \quad (Q \text{ の } x \text{ 座標}) = 1 + \sqrt{1+k}$$

$R(x, y)$ とおくと、点 R は PQ を 1 : 2 に内分するから

$$x = \frac{2(1 - \sqrt{1+k}) + (1 + \sqrt{1+k})}{1+2} = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{k+1} \quad \dots\dots ③$$

$$y = 2x + k \quad \dots\dots ④$$

②かつ③かつ④を満たす点 $R(x, y)$ の集合が求める軌跡である。

②、③より k を消去すると

$$x < 1$$

③、④より k を消去すると

$$x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{1+(y-2x)}$$

$$(3x-3)^2 = 1+y-2x$$

$$\therefore y = 9x^2 - 16x + 8$$

よって、求める軌跡は

$$\text{放物線 } y = 9x^2 - 16x + 8 \text{ の } x < 1 \text{ の部分 (答)}$$

(注) 境界となる点 $(1, 1)$ は、傾き 2 の直線が放物線 $y = x^2$ に接するときの接点である。ちなみに、

$$y = 9x^2 - 16x + 8, \quad x > 1$$

は PQ を 2 : 1 に内分する点 R の軌跡となり、半直線

$$x = 1, \quad y > 1$$

は PQ の中点の軌跡となる。

12 確認：円のとらえ方については，8 以外にも

- (1) 2点からの距離の比が一定である点の軌跡
- (2) 頂角(円周角)が一定である点の軌跡

とみることができる。

(1) 2 定点 A, B に対して $AP : BP = m : n$ を満たす点 P の軌跡は

$m = n$ のとき AB の垂直二等分線

$m \neq n$ のとき AB の内分点と外分点を直径の両端とする円

となる。この円をアポロニウスの円という。本問ではこの定理の証明をすることになるが，8(2)を意識して変形すると見通しが良い。この定理は覚えておくこと。

(2) 2 定点 A, B に対して $\angle APB$ が一定である点 P の軌跡は，2 点 A, B を端点とするある円弧となる。円全体ではないので注意。実際に方程式を求める場面では，直角三角形を見い出すことがポイントである。

解答：

(1) $P(x, y)$ において $mBP = nAP$ の両辺を平方すると

$$m^2\{(x-b)^2 + y^2\} = n^2\{(x-a)^2 + y^2\}$$

$$m^2(x-b)^2 - n^2(x-a)^2 + m^2y^2 - n^2y^2 = 0$$

$$\{m(x-b) + n(x-a)\}\{m(x-b) - n(x-a)\} + (m+n)(m-n)y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{mb+na}{m+n}\right)\left(x - \frac{mb-na}{m-n}\right) + y^2 = 0$$

よって，点 P の軌跡は

$$2 \text{ 点 } \left(\frac{na+mb}{m+n}, 0\right), \left(\frac{-na+mb}{m-n}, 0\right) \text{ を直径の両端とする円 (答)}$$

(2) 動点 P が $y > 0$ の部分にある場合を考えると，

$$\angle APB = 30^\circ$$

であるから，点 P の軌跡は点 $C(\sqrt{3}, 6)$ を通る。

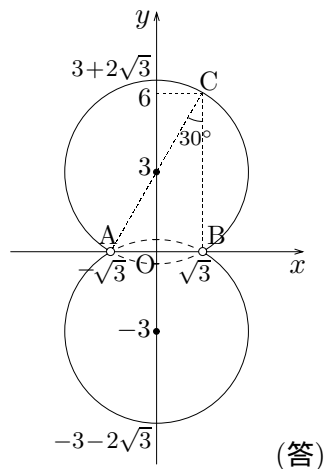
$\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ なる直角三角形であるから，円周角の性質を考えると，点 P の軌跡は AC を直径とする円周上で A, B を端点として点 C と同じ側にある部分である。

$y < 0$ の部分は， $y > 0$ の部分と x 軸に関して対称である。

以上をあわせて，点 P の軌跡は

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{3})^2 & (y > 0) \\ x^2 + (y+3)^2 = (2\sqrt{3})^2 & (y < 0) \end{cases}$$

であり，図示すると右図のようになる。



(答)

13 確認：円 $C: x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) と定点 $P(x_1, y_1)$ に対して、直線

$$x_1x + y_1y = r^2$$

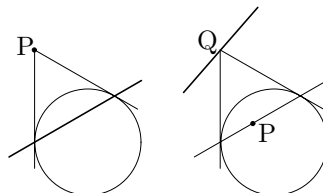
を円 C の点 P に関する極線という。9 で確認したように、定点 P が円 C 上にあるときは、 P に関する極線は P における接線となる。その他の場合については、

P が C の外部にあるときは、

P から C に引いた 2 接線の接点を通る直線

P が C の内部にあるときは、

その極線上に P があるような点 Q の軌跡となる。円だけでなく、放物線など 2 次方程式で表される一般の曲線についても極線が考えられる。



以上のことを公式として試験場で用いるわけにはいかないが、軌跡の方程式を求める特別な場合と考えられる。基本解法としては、

条件さえ満たせばそれで OK

という発想で図形を求める考え方が重要である。解答を読めばやさしいのだが、

図形とは条件を満たす点の集まり

という基本概念があやしいと意外と手こずる。

接線の公式の扱い方として、まず接線の式を立ててから点を通るなどの条件をあてはめる、という手順をしっかりと覚えておこう。

解答：

円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 $(b, \sqrt{a^2 - b^2})$ における接線の方程式は

$$bx + \sqrt{a^2 - b^2}y = a^2$$

$y = 0$ のときの x を求めることにより

$$P\left(\frac{a^2}{b}, 0\right)$$

点 $Q(q_1, q_2)$, $R(r_1, r_2)$ における円 $x^2 + y^2 = a^2$ の接線はそれぞれ

$$q_1x + q_2y = a^2, \quad r_1x + r_2y = a^2$$

と表され、ともに点 (b, c) を通るから、

$$q_1b + q_2c = a^2, \quad r_1b + r_2c = a^2$$

よって、2 点 Q, R の座標は $bx + cy = a^2$ を満たすが、 Q と R は異なる点であるから直線はただ一つに定まり、

$$bx + cy = a^2$$

が直線 QR の方程式となる。

$$b \times \frac{a^2}{b} + c \times 0 = a^2$$

であるから、2 点 Q, R を通る直線は点 P を通る。

(おわり)

14 確認：不等式の表す領域も基本原理は同じであるが、実際の解法としては

- 1° 不等号を等号に置き換えた式，(分母) = 0 の表す曲線が領域の境界線
- 2° 境界線に関して同じ側にある点は同じ不等式を満たす
- 3° 境界線を越えると，満たすべき不等式の不等号が逆向きになる
- 4° 境界線が関数のグラフのときは， x 軸に垂直な半直線の通過領域とみる

本質的なのは 2°，3° であるが，厳密に言えば実数の連続性の話になるので，高校では公理として認めて用いられる。

一般には，整式の不等式に同値変形してから考えればよいが，境界線を描くのに微分が必要などという場面を想定すると，関数表示のまま考える 4° の方法(いわゆる「上か下か」の議論)も重要である。その場合，漠然とどちら側かと考えるのではなく，つねに x 軸に垂直な方向のみで考えるという注意が必要である。

解答：

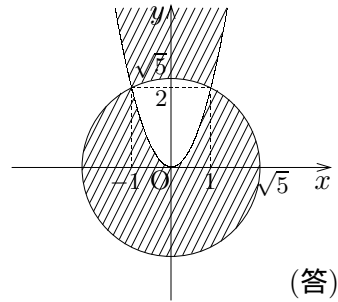
(1) 境界線は $(2x^2 - y)(x^2 + y^2 - 5) = 0$ すなわち

$$\text{放物線 } y = 2x^2 \text{ と円 } x^2 + y^2 = 5$$

であり，境界線上にない点 $(1, 0)$ について

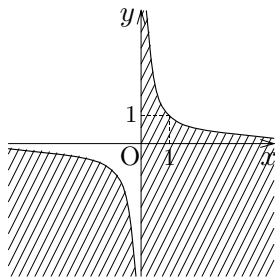
$$(2 \times 1^2 - 0)(1^2 + 0^2 - 5) = -8 < 0$$

であるから，不等式 $(2x^2 - y)(x^2 + y^2 - 5) < 0$ の表す領域は右図の斜線部分(境界を含まない)である。



(答)

(2) 半直線 $x = t$, $y < \frac{1}{t}$ が掃く領域を図示することにより，次図の斜線部分(境界を含まない)となる。



(答)

(注) 境界線 $xy = 1$ は反比例のグラフである。(2)も整式の不等式に同値変形すれば，(1)と同様に考えることができる。

$$y < \frac{1}{x} \iff x^2 y < x \iff x(xy - 1) < 0$$

15 確認：存在範囲の求め方は軌跡の求め方と同様であるが，図形を特徴づける条件は，方程式または不等式の実数解の存在条件として処理する。

a, b がともに実数である条件を

$$x \text{ の 2 次方程式 } x^2 - (a+b)x + ab = 0 \text{ が実数解をもつ}$$

とする考え方は重要である。

解答：

(1) 直線 $y = ax - a^2$ が通過する範囲内にある点 (x, y) に対して，

$$y = ax - a^2 \text{ かつ } a \geq 0$$

を満たす実数 a が存在する。

$$f(a) = a^2 - xa + y = \left(a - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} + y$$

とおいて， ab 平面上の $a \geq 0$ で $b = f(a)$ と $b = 0$ が共有点をもつ条件を求めると

(i) $f(0) = y \leq 0$ のとき

a が十分大きいと $f(a) > 0$ となるから条件を満たす。

(ii) $f(0) \geq 0$ のとき

共有点がすべて $a \geq 0$ の範囲にある条件を求めることになり，

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{4} + y \leq 0 \text{ かつ } f(0) = y \geq 0 \text{ かつ } \frac{x}{2} \geq 0$$

(i) または (ii) を整理して

$$x \leq 0 \text{ のとき } y \leq 0, \quad x \geq 0 \text{ のとき } y \leq \frac{x^2}{4} \quad (\text{答})$$

(2) $x = a + b, y = ab$ とおくと， a, b を 2 解とする t の 2 次方程式

$$t^2 - xt + y = 0$$

が実数解をもつことより

$$(\text{判別式}) = x^2 - 4y \geq 0$$

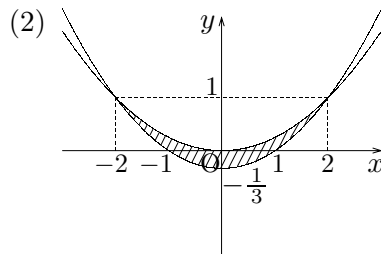
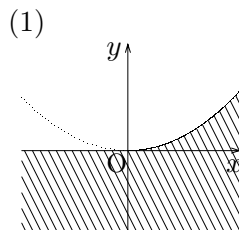
$$a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab \leq 1 \text{ より}$$

$$x^2 - 3y \leq 1$$

よって，点 $(a+b, ab)$ の存在範囲は

$$\frac{x^2 - 1}{3} \leq y \leq \frac{x^2}{4} \quad (\text{答})$$

(注) (1), (2) の答を図示すると，次のようになる。



16 確認：2変数関数 $f(x, y)$ の最大・最小を直接考えるのは一般的には難しいが， $f(x, y) = k$ とでもおいて

$f(x, y) = k$ を満たす点の集まり(図形)が存在すると解釈することで，仮定を表す領域と共有点をもつ条件を求めることに帰着できる。

実際に解答する場面では，

動直線と領域の境界線との傾きの大小を比べる

ことにより，最大・最小となるとききの図形的状態を確定する。一般の曲線の場合は，理論的には傾きを端点での微分係数(接線の傾き)におきかえて議論すれば直線の場合と同様であるが，実践的には範囲を気にしないで接する条件を求め，

接点の位置を調べることで最終判断をする

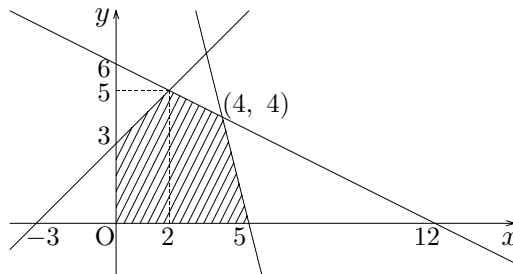
方がわかりやすい。

直線(境界線)の図示には切片形(→ 3)を用いるのが効果的である。仮定の領域を図示するには，14で確認したように適当な点と同じ側かどうかを考えるか，関数のグラフとの上下関係を考える。

解答：

(1) 領域 $D : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{12} + \frac{y}{6} \leq 1, \frac{x}{5} + \frac{y}{20} \leq 1, \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} \leq 1$

を図示すると，次図の斜線部分(境界を含む)となる。



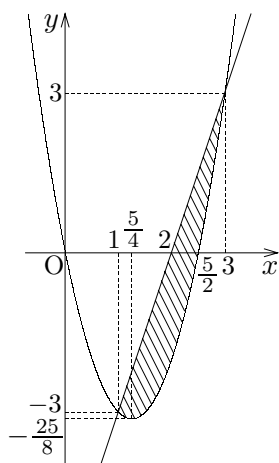
$-3x + 4y = k$ とおくと，

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{k}{4}$$

は傾き $\frac{3}{4}$ ， y 切片 $\frac{k}{4}$ の直線を表すから，領域 D と共有点をもつ条件のもとで，点 $(2, 5)$ を通るとき y 切片は最大となる。よって，

$(x, y) = (2, 5)$ のとき $-3x + 4y$ の最大値 14 (答)

(2) 領域 $2x^2 - 5x \leq y \leq 3x - 6$ を図示すると、次図の斜線部分(境界を含む)となる。



$x + 2y = k$ とおくと

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$$

となり、傾き $\frac{1}{2}$ 、 y 切片 $\frac{k}{2}$ の直線を表す。

放物線 $y = 2x^2 - 5x$ と接するときの k の値を求めると、 x の 2 次方程式

$$2x^2 - 5x - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}\right) = 0$$

が重解をもつことより、

$$(\text{判別式}) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{k}{2}\right) = 0 \quad \therefore k = -\frac{81}{16}$$

このとき、接点の x 座標(重解)は $x = \frac{9}{8}$ であり、接点は領域内の点であるから、この k の値は求める最小値となる。

図より、直線 $x + 2y = k$ が点 $(3, 3)$ を通るとき k は最大となる。

以上の考察より

$$x + 2y \text{ の最大値は } 9, \text{ 最小値は } -\frac{81}{16} \quad (\text{答})$$