

1 (平行線の性質)

- (1) 平行線を横切る直線によってできる錯角は等しいことを証明せよ。
- (2) 錯角が等しいならば，同側内角は互いに補角となることを証明せよ。
- (3) 2直線を横切る直線に対して同側内角が互いに補角ならば，その2直線は平行であることを証明せよ。
- (4) 三角形の内角の和は 180° であることを証明せよ。

2 (平行線と比，中点連結定理)

- (1) $\triangle ABC$ において辺 AB 上に点 D ，辺 AC 上に点 E を $DE \parallel BC$ となるようにとるとき， $AD : DB = AE : EC$ であることを証明せよ。
- (2) 互いに平行な3つの直線 l_1, l_2, l_3 と直線 m がそれぞれ A, B, C で交わり，直線 n がそれぞれ D, E, F で交わるものとする。このとき， $AB : BC = DE : EF$ であることを証明せよ。
- (3) $\triangle ABC$ において辺 AB の中点を M ，辺 AC の中点を N とするとき，

$$MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}BC \quad (\text{中点連結定理})$$

が成り立つことを証明せよ。

[3] (二等辺三角形の性質)

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ を満たすものとする。

- (1) $\angle ABC = \angle ACB$ であることを証明せよ。
- (2) 辺 BC の中点を M とするとき, AM と BC は垂直であることを証明せよ。
- (3) 頂点 A から辺 BC におろした垂線の足を H とするとき, H は辺 BC の中点であることを証明せよ。

[4] (直角三角形の性質)

$\triangle ABC$ は $\angle C$ を直角とする直角三角形であり, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ であるとする。

- (1) 頂点 C から辺 AB におろした垂線の足を H とする。 $AH : BH$ を a , b , c で表せ。
- (2) $a^2 + b^2 = c^2$ (三平方の定理) が成り立つことを証明せよ。

5 (辺の長さ と 角の大きさ , 三角形の成立条件)

$\triangle ABC$ において ,

- (1) $AB > AC$ ならば $\angle ABC < \angle ACB$ であることを証明せよ。
- (2) $\angle ABC < \angle ACB$ ならば $AB > AC$ であることを証明せよ。
- (3) $AB + AC > BC$ が成り立つことを証明せよ。

6 (平行四辺形)

- (1) 平行四辺形 $ABCD$ に対して , 次が成り立つことを証明せよ。
 - (i) 2 組の対辺の長さが等しい。
 - (ii) 2 組の対角の大きさが等しい。
 - (iii) 1 組の対辺が平行で長さが等しい。
 - (iv) 対角線が互いに 2 等分する。
- (2) 対角線の長さが等しい平行四辺形は長方形であることを証明せよ。

7 (角の二等分線)

- (1) O を端点とする半直線 OX , OY を引き, $\angle XOY$ の内部に点 P をとるとき,
 P が OX , OY から等距離 $\iff \angle POX = \angle POY$

であることを証明せよ。

- (2) $\triangle ABC$ が $AB \neq AC$ のとき, $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D , $\angle BAC$ の外角の二等分線と直線 BC の交点を E とするとき,

$$BD : DC = AB : AC, \quad BE : EC = AB : AC$$

が成り立つことを証明せよ。

8 (内心・傍心)

$\triangle ABC$ は $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 4$ を満たし, 内心を I とする。

- (1) 直線 AI と辺 BC の交点を D とするとき, $AI : ID$ を求めよ。
(2) $\triangle ABC$ の傍心のうち $\angle A$ 内にあるものを J とするとき, $AI : IJ$ を求めよ。

9 (外心・垂心)

- (1) 三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わり, その点は3頂点から等距離にあることを証明せよ。
- (2) $\triangle ABC$ において, 辺 BC , CA , AB の中点をそれぞれ D , E , F とする。 $\triangle DEF$ の垂心は $\triangle ABC$ の外心に一致することを証明せよ。

10 (重心, 中線定理)

三角形 ABC において辺 BC の中点を M とする。

- (1) 三角形 ABC の3つの中線は1点 G で交わり, $AG : GM = 2 : 1$ であることを証明せよ。
- (2) $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ (中線定理) が成り立つことを証明せよ。

[11] (メネラウスの定理)

- (1) $\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB (端点を除く) またはその延長が, 三角形の頂点を通らない直線とそれぞれ点 P , Q , R で交わる時,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) $\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB (端点を除く) またはその延長上にそれぞれ点 P , Q , R があり, この 3 点のうち 1 つまたは 3 つが辺の延長上にあるとする。このとき,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

が成り立てば, 3 点 P , Q , R は同一直線上にあることを証明せよ。

[12] (チェバの定理)

- (1) $\triangle ABC$ の 3 頂点 A , B , C と, 三角形の辺上またはその延長上にない点 O とを結ぶ直線が, 直線 BC , CA , AB とそれぞれ点 P , Q , R で交わる時,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) $\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB (端点を除く) またはその延長上にそれぞれ点 P , Q , R があり, この 3 点のうち 1 つまたは 3 つが辺上にあるとする。 BQ と CR が (端点以外で) 交わり, かつ

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

が成り立つならば, 3 直線 AP , BQ , CR は 1 点で交わることを証明せよ。

13 (円周角)

- (1) O を中心とする円周上で弧 AB 外の点 P を任意にとるとき, $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ であることを証明せよ。
- (2) 平面上で異なる 2 定点 A, B からの距離の比が一定の比 $AP : BP = a : b$ ($a \neq b$) である点 P の軌跡は, AB を $a : b$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円であることを証明せよ。

14 (円の接線, 接弦定理)

- (1) O を中心とする円 C 上の任意の点 A に対して, A を通り OA に垂直な直線 l を引くとき, l は点 A における円 C の接線であることを証明せよ。
- (2) 円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しいことを証明せよ。
- (3) 点 A において, $\triangle ABC$ の外接円に接する直線上に点 P をとる。点 P が直線 AB に関して点 C と同じ側にあるとき,
- $$\angle PAC = \angle ABC$$
- であることを証明せよ。
- (4) 円 C の外部に点 P をとり, 点 P から円 C に点 T で接する直線および 2 点 A, B で交わる直線を引くとき, $PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つことを証明せよ。

15 (円に内接する四角形)

- (1) 円に内接する四角形の対角は互いに補角であることを証明せよ。
 (2) 四角形 ABCD が 1 つの円に内接し、直線 AB と直線 CD が点 P で交わるとき

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

が成り立つことを証明せよ。

16 (方べきの定理)

- (1) 円 C の内部に点 P があり、点 P を通る円 C の弦を AB, DE とするとき、

$$AP \cdot BP = DP \cdot EP$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) 2 点で交わる 2 円 C_1, C_2 の共通弦 AB 上の点 P ($\neq A, B$) を任意にとり、 C_1 の弦 DE と C_2 の弦 FG が点 P で交わる (D, E, F, G が同一直線上にはないとする) とき、4 点 D, E, F, G は同一円周上にあることを証明せよ。
 (3) 異なる 2 点 A, B で交わる 2 円 C_1, C_2 があり、2 円の外部にある点 P から 2 円に引いた接線の長さは等しいものとする。このとき、点 P は直線 AB 上にあることを証明せよ。

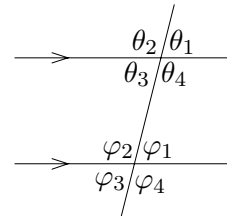
1 確認：数学Aの「平面図形」はいわゆる初等幾何である。この「初等」というのは、理論体系がないという意味であり、易しいという意味ではない。定石がないという点では基本解法確認演習の主旨に反するが、前提となる基礎知識の確認と論証力・図形的感覚を養う練習には役立つはずである。なお、ファイルを軽くするために、複雑でない場面では図を省略してあるので、適宜図を描いて補いながら解いてもらいたい。

ファイル名については、「平面図形」にすると「三角比」や「図形と方程式」まで含んでしまうような印象となるので、一般的な名称「初等幾何」を採用することにした。

同じ平面上にある2直線 l, l' が共有点をもたないとき、 l と l' は平行であるといい、 $l \parallel l'$ と表す。平行線の公理として、直線上にない1点を通ってもとの直線に平行な直線はただ1つ存在することを要請する。いわゆるユークリッドの第5公準であるが、通常の幾何を考える場合はこの公理を前提とする。この公理を前提として構築された幾何学をユークリッド幾何といい、そうでない幾何学を非ユークリッド幾何という。

平行線の性質として

- (i) 3直線 l, m, n に対して $l \parallel m, m \parallel n$ ならば、 $l \parallel n$ である
- (ii) 同位角が等しい (図において $\theta_1 = \varphi_1, \theta_2 = \varphi_2, \theta_3 = \varphi_3, \theta_4 = \varphi_4$)
- (iii) 錯角が等しい (図において $\theta_3 = \varphi_1, \theta_4 = \varphi_2$)
- (iv) 同側内角が互いに補角
(図において $\theta_3 + \varphi_2 = 180^\circ, \theta_4 + \varphi_1 = 180^\circ$)



が成り立つ。本問の(1)~(3)において、

平行 \implies (ii) \implies (iii) \implies 平行

が示され、結局

平行 \iff (ii) \iff (iii)

が成り立つ。対頂角が等しいことより、(i) \iff (ii) が成り立つこともわかるだろう。

なお、2つの角が(互いに)補角であるとは、2角の和が 180° になっていることをいう。2つの角の和が 90° であるとき、その2つの角は(互いに)余角であるという。初等幾何(平面幾何)の範囲では負の角度は出てこないが、一方の角が負でも補角・余角という用語は用いられるので注意する。

一般に、2つの平面図形が合同であるとは、同じ平面内で一方の図形を移動させて他方の図形に重ね合わせられることをいう。三角形の合同条件については、

- 2角とそのはさむ辺がそれぞれ等しい (2角挟辺相等)
- 2辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい (2辺挟角相等)
- 3辺がそれぞれ等しい (3辺相等)

のいずれかが成り立つときに2つの三角形は合同となる。このことは定義から証明することができるが、一般には証明なしに用いてよいのでここでは省略する。

解答：

(1) 平行な2直線を l, l' とし、直線 m がそれぞれ点 P, Q で交わっているものとする。

l 上に線分 AB を、 l' 上に線分 CD をそれぞれ P, Q が線分上にくるようにとる。

(ただし、 AB と CD は同じ向きにとる。)

$\angle APQ > \angle PQD$ とすると、点 P を通り l' に平行な (l' と共有点をもたない) 直線は l だけであるから、 l' 上に点 K を

$$\angle KPQ = \angle PQD$$

を満たすようにとることができる。

さらに、その補角どうしも大きさが等しいから、

KP の P の側の延長上に点 L を

$$\triangle KPQ \equiv \triangle LQP$$

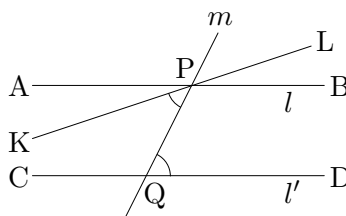
となるようにとることができる。ところが、K, P, L は同一直線上にあり、K, Q, L も同一直線上にあるから、直線 KL は直線 l' に一致し、平行な直線が点 P で交わることになるので矛盾である。よって、

$$\angle APQ \leq \angle PQD$$

同様に $\angle APQ \geq \angle PQD$ も示されるから、

$$\angle APQ = \angle PQD$$

が成り立つ。 $\angle BPQ = \angle PQC$ の証明も全く同様である。 (証明おわり)



(2) (1)の図において $\angle APQ = \angle PQD$ であるとすれば、

$$\angle APQ + \angle PQC = \angle APQ + (180^\circ - \angle PQD) = 180^\circ$$

が成り立つ。 $\angle BPQ + \angle PQD = 180^\circ$ についても同様である。 (証明おわり)

(3) 2直線 l, l' を横切る直線 m に対して同側内角の和は 180° であるとし、 m と l, l' の交点をそれぞれ P, Q とする。

2直線 l, l' が平行でないとするれば、 l と l' は交点 A をもつ。このとき、直線 PQ に関して点 A とは反対側の l' 上に $AP = BQ$ となる点 B をとると、

$$\angle APQ + (\angle BQP \text{ の外角}) = 180^\circ \quad \therefore \angle APQ = \angle BQP$$

2角挟辺相等により

$$\triangle APQ \equiv \triangle BPQ$$

よって、

$$\angle BPQ = \angle AQP = 180^\circ - \angle APQ$$

となって A, P, B は同一直線上となるが、A, Q, B も同一直線上であるから、2点 A, B を通る直線が一意に定まらず矛盾する。ゆえに、

$$l \parallel l' \quad (\text{証明おわり})$$

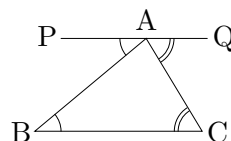
(4) $\triangle ABC$ に対して、点 A を通り辺 BC に平行な直線 PQ を引く。

平行線において錯角は等しいから、

$$\angle PAB = \angle ABC, \quad \angle QAC = \angle ACB$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC &= \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$



(証明おわり)

□2 確認：(2)で「平行線を横切る直線が切り取られる線分の長さの比は一定である」という定理を，(3)で中点連結定理を証明する。中学校で習った重要定理をここで思い出しておこう。

2つの図形 F, F' が相似の位置にあるとは

- (i) F 上の点 P と F' 上の点 P' が 1 対 1 に対応しており，直線 PP' が定点 O を通る
- (ii) 対応する 2 点 P, P' を F, F' のどこにとっても $OP : OP'$ は一定である

の 2 条件を満たすことである。このとき，定点 O を相似の中心といい，2つの図形を適当に移動させて相似の位置にできるとき，2つの図形は相似であるという。三角形の相似条件については，

- 2 角がそれぞれ等しい (2 角相等)
- 2 辺の比とそのはさむ角がそれぞれ等しい (2 辺挟角相似)
- 3 辺の比がそれぞれ等しい (3 辺相似)

のいずれかが成り立つとき 2つの三角形は相似となる。これらは □1 で確認した平行線の性質と面積比と考えることにより証明することができるが，実質的には(1)の証明により完了していることになる。

解答：

- (1) 底辺が共通の 2つの三角形の面積比は高さの比，高さが共通の 2つの三角形の面積比は底辺の長さの比になることに注意する。 $DE \parallel BC$ より

$$(\triangle BED \text{の面積}) = (\triangle CED \text{の面積})$$

であるから，

$$\begin{aligned} AD : DB &= (\triangle ADE \text{の面積}) : (\triangle BED \text{の面積}) \\ &= (\triangle ADE \text{の面積}) : (\triangle CED \text{の面積}) \\ &= AE : EC \end{aligned} \quad (\text{証明おわり})$$

- (2) 線分 AF と直線 l_2 の交点を G とする。 $\triangle ACF$ と $\triangle FDA$ に(1)の結果をあてはめると

$$AB : BC = AG : GF = DE : EF \quad (\text{証明おわり})$$

- (3) $\triangle AMN$ と $\triangle ABC$ について考える。 M, N はそれぞれ AB, AC の中点であるから，

$$AM : AB = AN : AC = 1 : 2,$$

であり， $\angle A$ は共通であるから，

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC$$

相似比を考えて，

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$$

$\angle AMN = \angle ABC$ (同位角が等しい)であるから，

$$MN \parallel BC \quad (\text{証明おわり})$$

3 確認：本問で証明する二等辺三角形の性質も既に中学校で習っているものの、高校でも重要なので再確認することにする。忘れていた人は、もう一度覚え直してもらいたい。これらの証明には、三角形の合同が用いられる。

点 P から直線 l におろした垂線の足とは、点 P を通り直線 l に垂直な直線と直線 l との交点をいう。よく使う言葉なので覚えておこう。

(3)の証明の内容から、二等辺三角形 ABC において

(i) 辺 BC の垂直二等分線は頂点 A と通る

(ii) 頂角 A の二等分線は辺 BC の中点を通る

という 2 つの重要な性質も導かれる。ここで、線分の垂直二等分線とは、線分の中点を通りその線分に垂直な直線のことである。垂直二等分線については、外心の考察 (→ 9) でも扱う。角の二等分線については 7 で確認する。

解答：

(1) $\triangle ABC$ とそれを裏返した $\triangle ACB$ を考える。

$$\angle BAC = \angle CAB \text{ (共通)}, AB = AC, AC = AB$$

であるから、2 辺挟角相等により

$$\triangle ABC \equiv \triangle ACB$$

となる。よって、 $\angle ABC = \angle ACB$ が成り立つ。

(証明おわり)

(2) $\triangle ABM$ と $\triangle ACM$ を考える。

$$AB = AC, BM = CM, AM = AM$$

であるから、3 辺相等により

$$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$$

となる。よって、 $\angle AMB = \angle AMC$, $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ が成り立つから、

$$\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$$

となり、AM と BC は垂直である。

(証明おわり)

(注) (2)で示した $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ を用いて(1)を導くこともできるが、3 辺相等により三角形が合同になることを示す際に(1)の結果 $\angle ABC = \angle ACB$ を用いるのが一般的なので、上の解答では循環論法を避けた。ただ、合同条件は公理のように扱われているので、入試では $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ を用いて $\angle ABC = \angle ACB$ を導いても差し支えないと思われる。

(3) $\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ を考える。

$$\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$$

であり、(1)より $\angle ABH = \angle ACH$ であるから、結局

$$\angle BAH = \angle CAH$$

も成り立つ。AH は共通であるから、2 角挟辺相等により

$$\triangle ABH \equiv \triangle ACH$$

であり、 $BH = CH$ すなわち H は BC の中点である。

(証明おわり)

4 確認：直角三角形の性質についても中学校で習っているが，相似三角形と三平方の定理の確認のため，演習として取り上げることにする。

直角三角形は，直角をはさむ2辺の長さを a, b とし，斜辺の長さを c とするとき，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ。この定理を三平方の定理(ピタゴラスの定理)という。(2)で証明する。

解答：

(1) $\triangle ACH$ と $\triangle ABC$ を考えると，

$$\angle CAH = \angle BAC \text{ (共通)}, \angle AHC = \angle ACB = 90^\circ$$

より

$$\triangle ACH \sim \triangle ABC$$

であるから，

$$AC : AH = AB : AC$$

$$b : AH = c : b \quad \therefore AH = \frac{b^2}{c}$$

同様にして， $\triangle BCH \sim \triangle BAC$ が成り立ち，

$$BH = \frac{a^2}{c}$$

が導かれるから，

$$AH : BH = b^2 : a^2 \text{ (答)}$$

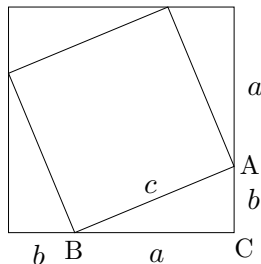
(2) (1)の考察より

$$c = AB = AH + BH = \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c}$$

であるから，

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{(証明おわり)}$$

別解1：直角三角形 ABC を4つ用意して，辺 AB を一辺とする正方形を囲むようにすると，



一辺の長さ $a + b$ の大きな正方形の面積を2通りに表すことにより

$$(a + b)^2 = c^2 + \frac{1}{2}ab \times 4 \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{(証明おわり)}$$

別解2：ABを一辺とする正方形ABPQ, BCを一辺とする正方形BCRS, CAを一辺とする正方形CATUをそれぞれ直角三角形ABCの外側にとる。また, Cから辺ABにおろした垂線の足をHとし, CHの延長とPQの交点をIとする。

$\triangle ABT$ と $\triangle AQC$ を考えると, 正方形についての仮定より

$$AB = AQ, AT = AC, \angle BAT = \angle BAC + 90^\circ = \angle QAC$$

であるから,

$$\triangle ABT \equiv \triangle AQC$$

AT//BUより

$$(\triangle ACT \text{の面積}) = (\triangle ABT \text{の面積})$$

AQ//CIより

$$(\triangle AQC \text{の面積}) = (\triangle AQH \text{の面積})$$

よって, $\triangle AQH$ と $\triangle ACT$ の面積は等しいから,

$\square AQIH$ と $\square ACUT$ の面積も等しい。

同様にして,

$$\triangle BCP \equiv \triangle BSA$$

$$(\triangle BHP \text{の面積}) = (\triangle BSC \text{の面積})$$

が示されるから, $\square BHIP$ と $\square BCSR$ の面積は等しい。

ゆえに,

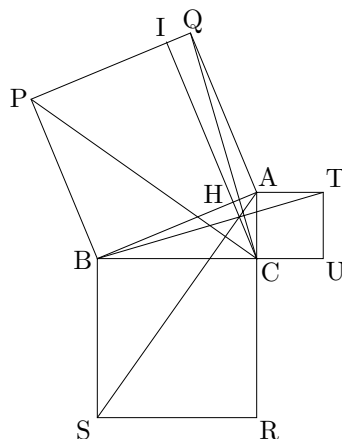
$$\begin{aligned} (\square ABPQ \text{の面積}) &= (\square BHIP \text{の面積}) + (\square AHIQ \text{の面積}) \\ &= (\square BCSR \text{の面積}) + (\square ACUT \text{の面積}) \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

である。

(証明おわり)



5 確認：三角形 ABC において，辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とするとき， a, b, c の大小と $\angle A, \angle B, \angle C$ の大小は順序が一致する。その証明過程が図形量の大小を論じる練習になるので，ここできちんと確認しておきたい。

中学で「2 辺の長さの和は他の 1 辺の長さより大きい」ことを学んだが，逆に

$$a + b > c \text{ かつ } b + c > a \text{ かつ } c + a > b$$

を満たす a, b, c を長さとする 3 線分で三角形を作ることができる。これらの不等式を三角不等式といい，三角不等式がすべて成り立つことを三角形の成立条件という。

三角形の成立条件(の連立不等式)は，ひとまとめにして

$$|a - b| < c < a + b$$

と表しても同値である。左の不等式については

$$\begin{aligned} a < b + c \text{ かつ } b < c + a &\iff a - b < c \text{ かつ } b - a < c \\ &\iff |a - b| = \max\{a - b, b - a\} < c \end{aligned}$$

と言い換えただけである。

解答：

(1) $AB > AC$ より，辺 AB 上に

$$AD = AC$$

となる点 D がとれる。二等辺三角形の性質より

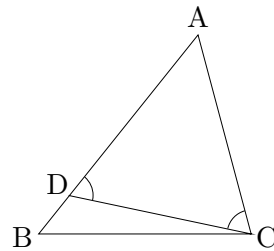
$$\angle ADC = \angle ACD$$

また， $\triangle BCD$ の内角の和は 180° であるから

$$\angle ABC + \angle BCD = \angle ADC$$

以上を考え合わせて，

$$\angle ABC < \angle ADC = \angle ACD < \angle ACB \quad (\text{証明おわり})$$



(2) (1)で証明したことには一般性があるので，(二等辺三角形の性質とあわせて)

$$AB \leq AC \implies \angle ABC \geq \angle ACB$$

も証明されたことになる。よって，この対偶をとると

$$\angle ABC < \angle ACB \implies AB < AC$$

が成り立つことがわかる。 (証明おわり)

(3) 辺 AB の A を越える延長上に $AD = AC$ となる点 D をとると，

$$AB + AC = AB + AD = BD \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$AC = AD$ より $\angle ACD = \angle ADC$ であるから，

$$\angle BCD > \angle ACD = \angle BDC$$

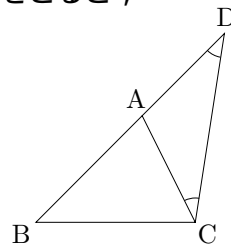
$\triangle BCD$ において(2)の結果をあてはめると

$$BD > BC \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② より

$$AB + AC > BC$$

(証明おわり)



6 確認：2組の対辺がそれぞれ平行な四角形を平行四辺形という。平行四辺形には (i) ~ (iv) で示す 4 つの性質があるが、それらは逆も成り立ち、実はいずれも平行四辺形であるための必要十分条件である。

長方形や正方形やひし形は平行四辺形の特別な場合である。4 つの角の大きさがすべて等しい四角形を長方形、4 つ辺の長さがすべて等しい四角形をひし形といい、長方形かつひし形である四角形を正方形という。

解答：

(1) 平行四辺形 ABCD において $\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ を考える。

$$\angle ABD = \angle CDB, \angle ADB = \angle CBD \quad (\text{錯角})$$

$$BD = DB \quad (\text{共通})$$

であるから、2角挟辺相等により

$$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$$

よって、

$$AB = CD, AD = CB, \angle DAB = \angle BCD$$

が成り立つ。 $\angle ABC = \angle CDA$ についても同様であり、(i), (ii), (iii) は証明された。

対角線 AC, BD の交点を P とする。既に

$$AB = CD$$

が示されており、錯角が等しいことより

$$\angle ABP = \angle CDP, \angle BAP = \angle DCP$$

であるから、

$$\triangle ABP \equiv \triangle CDP$$

ゆえに、

$$AP = CP, BP = DP \quad (\text{証明おわり})$$

(2) 平行四辺形 ABCD が $AC = BD$ を満たすとする。

$\triangle ABD$ と $\triangle BAC$ を考えると、平行四辺形の対辺の長さは等しいから

$$AD = BC$$

であり、 $AB = BA$ (共通) であるから、3辺相等により

$$\triangle ABD \equiv \triangle BAC$$

よって、 $\angle BAD = \angle ABC$ となるが、同側内角の和は 180° であるから

$$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$$

平行四辺形の対角の大きさは等しく

$$\angle BAD = \angle BCD, \angle ABC = \angle ADC$$

であるから、四角形 ABCD の 4 つの内角の大きさはすべて等しくなり、四角形 ABCD は長方形である。 (証明おわり)

7 確認：(1)で示すように、角の二等分線は角をなす 2 直線から等距離にある点の軌跡となる。(2)で示す定理は重要なので覚えておくこと。AB = AC の場合は、等辺をはさむ角の二等分線は底辺の中点を通り、BD : DC = AB : AC は成り立つが、既に 3 で確認済である。

解答：

(1) P から OX におろした垂線の足を A, P から OY におろした垂線の足を B とし、 $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ を考える。

\Rightarrow PA = PB ならば、OP = OP (共通)、 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ であるから、三平方の定理より

$$OA = OB$$

が成り立ち、3 辺相等により

$$\triangle OAP \equiv \triangle OBP$$

よって、 $\angle POA = \angle POB$ が成り立つ。

\Leftarrow $\angle POA = \angle POB$ ならば、 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ であるから、結局

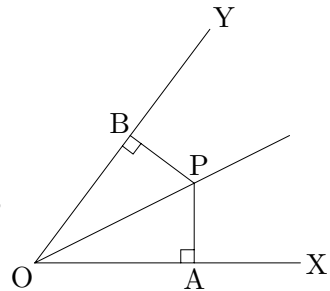
$$\angle OPA = \angle OPB$$

も成り立ち、辺 OP は共通であるから、2 角挟辺相等により

$$\triangle OAP \equiv \triangle OBP$$

よって、PA = PB が成り立つ。

(証明おわり)



(2) 必要ならば裏返した三角形を考えることで、はじめから $AB > AC$ としてよい。

C から AD に平行に引いた直線と直線 AB の交点を F とする。

平行線において錯角は等しいから

$$\angle CAD = \angle ACF$$

平行線において同位角は等しいから

$$\angle BAD = \angle AFC$$

AD は $\angle BAC$ の角の二等分線であるから、

$$\angle ACF = \angle AFC$$

$$\therefore AC = AF$$

平行線を横切る直線が切り取られる線分の長さの比は一定 (\rightarrow 2) であることより

$$BD : DC = BA : AF = AB : AC$$

角を二等分していることより $\angle DAE = 90^\circ$ であり、 $AE \perp CF$ となる。

AE 上に $AC = CG$ となるようにとると、二等辺三角形の性質より

$$\angle ACF = \angle GCF \quad \therefore \angle BAC = \angle ACG$$

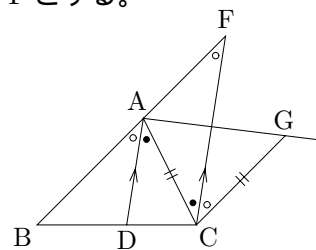
よって、錯角が等しいことより $AB \parallel GC$ であり、

$$\triangle ABE \quad \triangle GCE$$

となるから、

$$BE : CE = AB : GC = AB : AC$$

(証明おわり)



8 確認：三角形 ABC において， $\angle A$ の二等分線は 2 辺 CA, AB から等距離にあり， $\angle B$ の二等分線は 2 辺 AB, BC から等距離にある。(→ 7(1)) したがって，この 2 直線の交点 I は 3 辺から等距離にあり，点 I を中心に三角形 ABC の各辺に接する円が描ける。この円を三角形 ABC の内接円といい，内接円の中心 I を三角形 ABC の内心という。以上の議論から，内接円および内心はただ一つに定まることがわかり，3 つの内角の二等分線は内心で交わることもわかる。

内接円が 3 辺と接するのに対し，三角形の 1 辺に接し 2 辺の延長と接する円を傍接円といい，傍接円の中心を傍心という。三角形 ABC において，辺 BC に接し辺 AB, AC の延長と接する傍接円の中心は $\angle A$ 内の傍心と呼び， $\angle A$ の二等分線と $\angle B, \angle C$ の外角の二等分線の交点である。

図形量の関係については，7(2)で確認した定理を用いればよい。

解答：

(1) AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから，

$$BD : DC = AB : AC = 5 : 4$$

BC = 6 であるから，

$$BD = \frac{5}{5+4} \times 6 = \frac{10}{3}$$

BI は $\angle ABD$ の二等分線であるから，

$$\begin{aligned} AI : ID &= BA : BD \\ &= 5 : \frac{10}{3} = 3 : 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) AJ は $\angle BAC$ の二等分線であるから，点 J は直線 AI 上にある。BJ は $\angle ABD$ の外角の二等分線であるから，

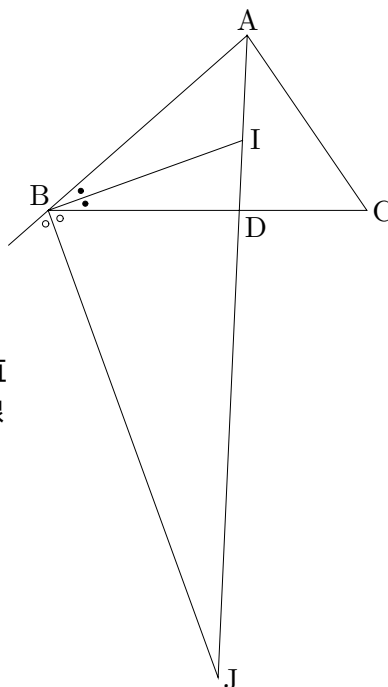
$$AJ : DJ = BA : BD = 3 : 2 \quad (\text{外分})$$

$$\therefore AD : DJ = 1 : 2 = 5 : 10$$

AI : ID = 3 : 2 より

$$AI : ID : DJ = 3 : 2 : 10$$

$$\therefore AI : IJ = 3 : (2 + 10) = 1 : 4 \quad (\text{答})$$



9 確認：(1)で示すように，三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わり，その点は3頂点から等距離にある。したがって，その点を中心として三角形の3頂点を通る円が描ける。この円を外接円といい，外接円の中心を外心という。

三角形において，3頂点から対辺(を含む直線)におろした垂線は1点で交わる。この交点を垂心という。実際にこの3直線が交わり，垂心が存在することについては，(2)により外心の存在から示される。

解答：

(1) 二等辺三角形の性質(→ 3)より，辺 AB の垂直二等分線は A, B から等距離にある点の軌跡である。辺 BC の垂直二等分線も B, C から等距離にある点の軌跡であるから，この2つの垂直二等分線の交点を O とすると，

$$OA = OB = OC$$

このとき $OA = OC$ であるから，O は辺 AC の垂直二等分線上にあり，3つの垂直二等分線は1点で交わる。(証明おわり)

(2) $\triangle DEF$ の垂心を H とすると，定義より

$$DH \perp EF$$

$\triangle ABC$ において中点連結定理より

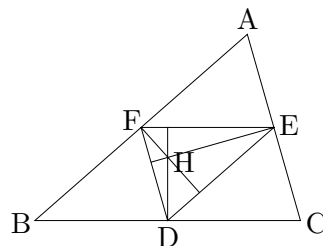
$$EF \parallel BC$$

であるから，

$$DH \perp BC$$

であり，D は BC の中点であるから，直線 DH は辺 BC の垂直二等分線である。

同様に，直線 EH は辺 CA の垂直二等分線，直線 FH は辺 AB の垂直二等分線であるから， $\triangle DEF$ の垂心 H は $\triangle ABC$ の外心である。(証明おわり)



10 確認：三角形の頂点と対辺の中点を結ぶ線分を中線という。(1)で示すように、3つの中線は1点で交わり、その交点を重心という。8, 9で確認した外心、内心、垂心、傍心とあわせて、三角形の五心という。

(2)で確認する中線定理はベクトルの内積を用いても示されるが、ここでは初等幾何で証明する。ベクトルの計算で導けるが、覚えておく方が望ましい。

解答：

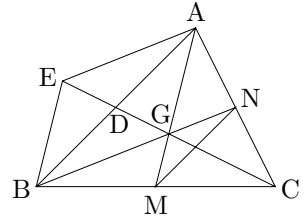
(1) 辺CAの中点をNとし、中線AMと中線BNの交点をGとすると、直線CGと辺ABの交点Dが辺ABの中点であることをまず示す。

直線CG上にCG = GEとなる点Eをとると、

$$CG : GE = CN : NA = 1 : 1 \text{ より } AE \parallel NB$$

$$CG : GE = CM : MB = 1 : 1 \text{ より } AM \parallel EB$$

であるから、AEBGは平行四辺形である。その対角線は互いに二等分するから、Dは辺ABの中点であり、3つの中線は1点で交わる。



$\triangle ABG$ と $\triangle MNG$ を考える。中点連結定理より $AB \parallel MN$ であるから、

$$\angle ABG = \angle MNG, \angle BAG = \angle NMG$$

となって、2角相等により

$$\triangle ABG \cong \triangle MNG$$

中点連結定理より $MN = \frac{1}{2}AB$ であるから相似比は2 : 1であり、

$$AG : MG = AB : MN = 2 : 1$$

(証明おわり)

(2) $AB \geq AC$ のときに証明すれば十分である。

B, Cから直線AMにおろした垂線の足をそれぞれP, Qとすると、

$$\angle BPM = \angle CQM = 90^\circ$$

$$\angle BMP = \angle CMQ \text{ (対頂角)}$$

$$BM = CM \text{ (Mは中点)}$$

であるから、2角挟辺相等により

$$\triangle BPM \cong \triangle CQM$$

そこで、 $PM = QM = d$ とおく。

直角三角形ABPと直角三角形ACQに三平方の定理をあてはめると

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 = (AM + d)^2 + BP^2$$

$$AC^2 = AQ^2 + CQ^2 = (AM - d)^2 + CQ^2$$

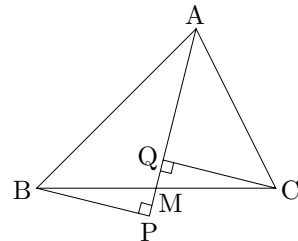
2式を加えると、 $BP = CQ$ および三平方の定理に注意して

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2d^2 + BP^2 + CQ^2$$

$$= 2(AM^2 + d^2 + BP^2)$$

$$= 2(AM^2 + BM^2)$$

(証明おわり)



11 確認：教科書によってはメネラウスの定理は扱われてないが，現在では指導要領は最低基準とされているため，メネラウスの定理も範囲内と受け止めておく方が無難である。実際，メネラウスの定理は応用範囲が広く，知らないと損である。証明に出てくる平行な補助線の引き方とあわせて，発想も覚えておきたい。

解答：

- (1) Cを通り直線PQに平行な直線を引き，直線ABと交わる点をMとする。
 平行線を横切る直線が切り取られる線分の長さの比は一定であるから，

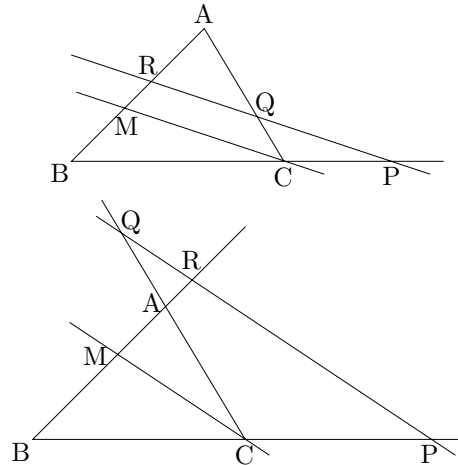
$$\frac{BP}{PC} = \frac{BR}{MR}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{MR}{AR}$$

であるから，

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

(証明おわり)

- (注) $\triangle ABC$ の各頂点から直線PQにおろした垂線の長さの比を考えてもよい。



- (2) 直線PQと直線ABの交点をR'とすると，メネラウスの定理より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR'}{R'B} = 1$$

仮定より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

であるから，

$$\frac{AR'}{R'B} = \frac{AR}{RB}$$

したがって，RとR'は内分点か外分点の違いしかないが，仮定からP, Qの位置によりRが辺ABの内分点か外分点かは一意に定まるので，

$$R' = R$$

となり，3点P, Q, Rは同一直線上にある。

(証明おわり)

12 確認：チェバの定理も載せていない教科書があるが，知っておく方が良い。証明の中に出てくる面積比に注目する発想は，チェバの定理以外でもよく用いられる。

解答：

(1) $\triangle OAB$ と $\triangle OCA$ の面積比は， OA を共通の底辺とみると高さの比に等しいから，

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OCA} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

他の比についても同様に，

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\triangle OCA}{\triangle OBC} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①，②，③を掛け合わせると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

(証明おわり)

(2) BQ と CR の交点を O とし，直線 OA と辺 BC の交点を P' とすると，チェバの定理より

$$\frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

仮定より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

であるから，

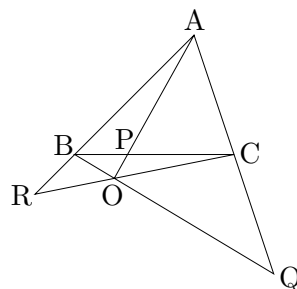
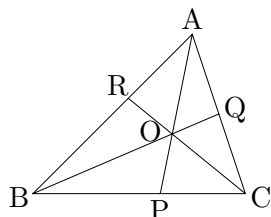
$$\frac{BP'}{P'C} = \frac{BP}{PC}$$

P も P' も辺 BC 上の点であるから

$$P' = P$$

であり，3 直線 AP ， BQ ， CR は 1 点で交わる。

(証明おわり)



13 確認：円周上の1点Pから引いた2つの弦PA, PBが作る角 $\angle APB$ を点Pを含まない弦ABに対する円周角という。(1)で示されるように, 1つの弧に対する円周角は一定であり, その弧に対する中心角の半分である。

3, 9で扱ったように, 2点から等距離にある点の軌跡はその2点を結ぶ線分の垂直二等分線になるが, 一般には2点からの距離の比が一定である点の軌跡は円となる。この円をアポロニウスの円という。射影幾何学の世界では, 直線も半径無限大の円として統一的に扱えるが, 高校の範囲では垂直二等分線の場合は分けて考える。

解答：

(1) (i) 中心Oが線分AP上にあるとき

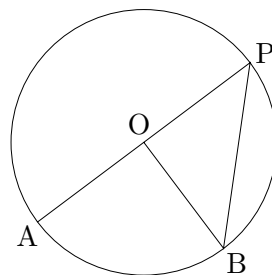
OB = OP より

$$\angle OBP = \angle APB$$

であるから, 三角形の外角がそれと隣り合わない2つの内角の和と等しいことより

$$\angle AOB = \angle OBP + \angle APB = 2\angle APB$$

中心Oが線分BP上にあるときも同様である。



(ii) 中心Oが $\angle APB$ 内にあるとき

OPの延長と円の交点をQとすると, (i)より

$$\angle AOQ = 2\angle APQ$$

$$\angle BOQ = 2\angle BPQ$$

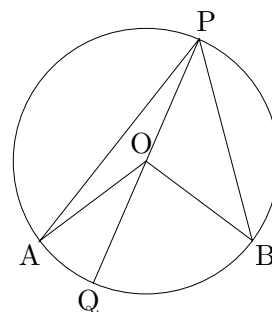
が成り立ち,

$$\angle AOQ + \angle BOQ = \angle AOB$$

$$\angle APQ + \angle BPQ = \angle APB$$

であるから,

$$\angle AOB = 2\angle APB$$



(iii) 中心Oが $\angle APB$ 外にあるとき

APがOBと交わるとして証明すれば十分(BPがOAと交わる場合も同様)である。

OPの延長と円の交点をQとすると, (i)より

$$\angle AOQ = 2\angle APQ$$

$$\angle BOQ = 2\angle BPQ$$

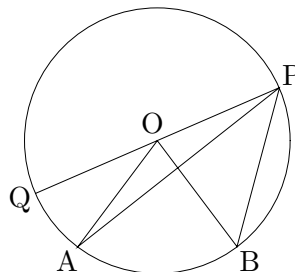
が成り立ち,

$$\angle BOQ - \angle AOQ = \angle AOB$$

$$\angle BPQ - \angle APQ = \angle APB$$

であるから,

$$\angle AOB = 2\angle APB$$



(2) AB を $a : b$ に内分する点を D, 外分する点を E とおく。P が直線 AB 上にあるときは, $P = D$ または $P = E$ である。

点 P が直線 AB 上にないとき,

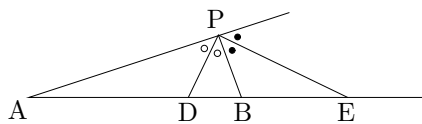
$$AD : DB = AP : BP = a : b$$

$$AE : EB = AP : BP = a : b$$

であるから, PD は $\angle APB$ の二等分線, PE は $\angle APB$ の外角の二等分線であり,

$$\angle DPE = 90^\circ$$

中心角 180° に対する円周角は 90° であるから, 点 P は線分 DE を直径とする円周を描く。(証明おわり)



14 確認：円と直線がただ1つの共有点をもつとき，円と直線は接するといい，その直線を円の接線，ただ1つの共有点を接点という。中学校で習ったように，円の接線の性質としては(1)，(2)が重要である。

(3)で示すように，円の接線とその接点を端点とする弦で作る角は，その角内の弧に対する円周角に等しいという性質が成り立つ。これを接弦定理(または接弦角の定理)という。この定理を用いると，ある三角形の相似関係から(4)のような興味深い関係式が得られる。これは，16で確認する方べきの定理の一部である。

解答：

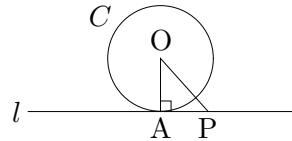
(1) 直線 l 上に A と異なる任意の点 P をとる。

円は「中心から等距離にある点の軌跡」であり，

$$\angle OPA < 90^\circ = \angle OAP \text{ より } OA < OP$$

が成り立つから，点 P は円 C の外部にある。

ゆえに，直線 l は A 以外の点がすべて円 C の外部にあり， l と C とは点 A のみを共有するから，直線 l は円 C の接線である。(証明おわり)



(2) O を中心とする円の外部の点 P からこの円に引いた接線の接点を A, B とする。

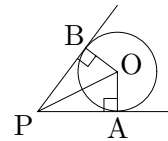
$$OA = OB = (\text{円の半径})$$

$$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$$

であるから，三平方の定理より

$$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{OP^2 - OB^2} = PB$$

が成り立つ。



(証明おわり)

(3) $\triangle ABC$ の外接円上に $\angle PAQ = 90^\circ$ となる点 $Q (\neq A)$ をとる。円の接線の性質より， AQ は円の直径となるから

$$\angle ACQ = 90^\circ$$

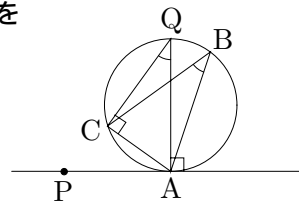
円周角の性質より

$$\angle ABC = \angle AQC$$

であるから，

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle CAQ = \angle PAC$$

(証明おわり)



(4) A, B のうち P に近い方を A として一般性を失わない。

接弦定理により

$$\angle PTA = \angle PBT$$

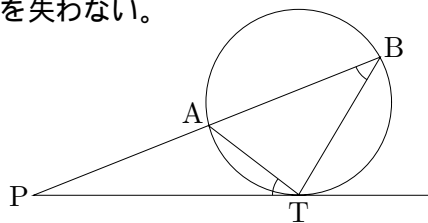
であるから，

$$\triangle PAT \sim \triangle PBT$$

対応する辺の長さの比を考えて

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \quad \therefore PA \cdot PB = PT^2$$

(証明おわり)



15 確認：円に内接する四角形の性質は既に中学校で習っているが、重要なので再確認しておく。(2)は中学では練習問題として済ませたが、高校では方べきの定理(→ 16)として結果も重要視する。

解答：

(1) O を中心とする円に四角形 ABCD が内接しているとして、

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

が成り立つことを証明すればよい。(頂点の名付け方に任意性があるので、もう1組の対角についても同様に証明されたことになる。)

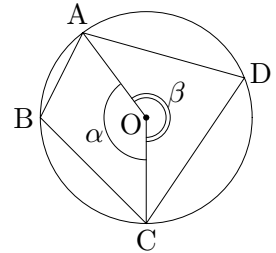
線分 OA と線分 OC によりできる角について、 $\angle ABC$ の側にある角度を α 、 $\angle ADC$ の側にある角度を β とすると、円周角の性質より

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\beta, \quad \angle ADC = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\alpha + \beta = 360^\circ \text{ より}$$

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

が成り立つ。



(証明おわり)

(2) 交点 P が AB の B の側への延長上、CD の C の側への延長上にあるとして証明すれば十分である。

$\triangle PDA$ と $\triangle PBC$ について考えると、(1)より

$$\angle PDA = \angle PBC$$

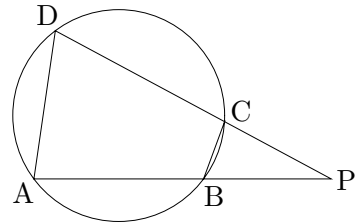
$$\angle PAD = \angle PCB$$

であるから、

$$\triangle PDA \sim \triangle PBC$$

対応する辺の長さの比を考えて、

$$\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP} \quad \therefore AP \cdot BP = CP \cdot DP$$



(証明おわり)

16 確認：定点 P を通る直線が定円 C と (P と異なる) 2 点 A, B で交わるとき, $PA \cdot PB$ の値は P を通る直線に依らず一定である。この $PA \cdot PB$ の値を点 P に関する円 C の方べきといい, 方べきが直線に依存しない(で定点と円だけで定まる)性質をもつことを方べきの定理という。方べきの定理は $A = B$ のときも成立し, そのとき直線 AP は円 C の接線である。(1)では, 定点 P が円の内部にある場合に方べきの定理を証明するが, 定点 P が円の外部にある場合は, 14(4) と 15(2) で既に証明した。

方べきの定理は逆も成り立つ。その証明には, メネラウスの定理の逆 (\rightarrow 11(2)) や チェバの定理の逆 (\rightarrow 12(2)) を示したのと同様の論法が用いられるが, ここでは省略するので各自で確かめてほしい。(2)では, 方べきの定理の逆を用いて, 4 点が同一円周上にあることを証明する。また, (3)では, 方べきの定理の逆を示すのと同様の論法で, 3 点が同一直線上にあることを証明する。

解答：

(1) 弧 AE に対する円周角を考えて

$$\angle ADP = \angle EBP$$

弧 BD に対する円周角を考えて

$$\angle DAP = \angle BEP$$

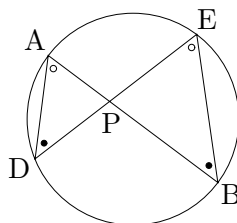
であるから,

$$\triangle ADP \sim \triangle EBP$$

対応する辺の長さの比を考えて

$$\frac{AP}{DP} = \frac{EP}{BP} \quad \therefore AP \cdot BP = DP \cdot EP$$

(証明おわり)



(2) 円 C_1 および円 C_2 において, それぞれ方べきの定理を適用すると

$$DP \cdot EP = AP \cdot BP, \quad FP \cdot GP = AP \cdot BP$$

となるから,

$$DP \cdot EP = FP \cdot GP$$

方べきの定理の逆より, 4 点 D, E, F, G は同一円周上にある。 (証明おわり)

(3) P から 2 円 C_1, C_2 に引いた接線の接点をそれぞれ T_1, T_2 とすると, 仮定より

$$PT_1 = PT_2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

直線 AP と 2 円 C_1, C_2 との (A と異なる) 交点をそれぞれ Q_1, Q_2 とすると, 方べきの定理より

$$PA \cdot PQ_1 = PT_1^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$PA \cdot PQ_2 = PT_2^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より $PQ_1 = PQ_2$ であるから $Q_1 = Q_2$ となるが, Q_1 は C_1 上, Q_2 は C_2 上にあるから

$$Q_1 = Q_2 = B$$

であり, 3 点 P, A, B は同一直線上にある。 (証明おわり)

