

1

(1)  $n(n+1) + a = (n+k)^2$  が成り立つとき,

$$n+a = 2nk + k^2 \quad \therefore a = k^2 + n(2k-1)$$

$$n \geq 1, \quad 2k-1 \geq 1 \text{ より}$$

$$a \geq k^2 + 1 \cdot (2k-1) = k^2 + 2k - 1 \quad (\text{証明おわり})$$

(2)  $n(n+1) + 7 = (n+k)^2$  となるとき, (1)より

$$k^2 + n(2k-1) = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$k^2 + 2k - 1 \leq 7$$

$$\therefore (k+1)^2 \leq 9$$

 $k$  が自然数であることより,

$$k = 1, 2 \text{ が必要}$$

である。①より

$$k = 1 \text{ のとき } 1 + n = 7 \quad \therefore n = 6$$

$$k = 2 \text{ のとき } 4 + 3n = 7 \quad \therefore n = 1$$

であるから十分であり, 求める自然数  $n$  は

$$n = 1, 6 \quad (\text{答})$$

(別解) 上の解答では(1)を用いて解いたが, ふつうに解いてもよい。

$$n(n+1) + 7 = m^2 \quad (m \text{ は自然数})$$

を変形して,

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 7 = m^2$$

$$(2n+1)^2 + 27 = 4m^2$$

$$(2n+1)^2 - 4m^2 = -27$$

$$\therefore (2n+2m+1)(2n-2m+1) = -27$$

ここで,

$$2n-2m+1 = p, \quad 2n+2m+1 = q \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

とおくと,

$$p < q, \quad pq = -27$$

であるから,

$$(p, q) = (-27, 1), (-9, 3), (-3, 9), (-1, 27)$$

②を  $n, m$  について解くと

$$n = \frac{p+q-2}{4}, \quad m = \frac{q-p}{4}$$

 $n, m$  がともに自然数となる場合を求めて,

$$(n, m) = (1, 3), (6, 7) \quad \therefore n = 1, 6 \quad (\text{答})$$

2

(1)  $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$  より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{a}) = 0 \\ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} - \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) + |\overrightarrow{a}|^2 &= 0 \\ \therefore \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{a}|^2 &= \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q})\end{aligned}$$

RはPQの中点であるから

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q})$$

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) - \overrightarrow{a}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AR}|^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}|^2 - \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) + |\overrightarrow{a}|^2 \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{p}|^2 + 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2) - \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) + |\overrightarrow{a}|^2 \\ &= \frac{1}{4}(1^2 + 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + 1^2) - (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{a}|^2) + |\overrightarrow{a}|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) Bは直線OA上の点であるから

$$\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{a} \quad (k \text{ は実数})$$

と表される。(1)と同様に

$$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) - k\overrightarrow{a}$$

の大きさの平方を計算して、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BR}|^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}|^2 - k\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}) + k^2|\overrightarrow{a}|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}) - k(\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{a}|^2) + k^2|\overrightarrow{a}|^2 \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - k\right)\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + (k^2 - k)|\overrightarrow{a}|^2\end{aligned}$$

がP, Qの位置によらないとき

$$\frac{1}{2} - k = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

よって、題意の条件を満たす点Bは

OAの中点 (答)

であり、このとき

$$|\overrightarrow{BR}|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}r^2 \quad (\text{答})$$

3

(1)  $n+1$  秒後に動点 P が頂点 A にいるのは,

- $n$  秒後に A にいて, 確率  $1-a$  で留まる
- $n$  秒後に A 以外にいて, 確率  $\frac{a}{3}$  で A に移る

のいずれかの場合であるから,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times (1-a) + (1-p_n) \times \frac{a}{3} \\ &= \left(1 - \frac{4}{3}a\right)p_n + \frac{a}{3} \quad (\text{答}) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(2)  $\alpha = \left(1 - \frac{4}{3}a\right)\alpha + \frac{a}{3}$  ( $\alpha$  は定数) とおくと,

$$\frac{4}{3}a\alpha = \frac{a}{3}$$

 $a \neq 0$  より

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4} \\ \therefore \frac{1}{4} &= \left(1 - \frac{4}{3}a\right) \times \frac{1}{4} + \frac{a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① - ② より

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right)\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

$\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$  は初項  $p_0 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ , 公比  $1 - \frac{4}{3}a$  の等比数列であるから,

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^n \\ \therefore p_n &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{4}{3}a\right)^n \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

4

(1)  $f(0)$  は  $f(x)$  の定数項であり, 偶関数・奇関数の性質を用いると

$$f(0) = \int_{-1}^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 \{-at^2 + f(0)\} dt = 2 \left\{ -\frac{a}{3} + f(0) \right\}$$

$$\therefore f(0) = \frac{2}{3}a \quad (\text{答})$$

(2) (1)より

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \frac{2}{3}a$$

$$f'(x) = x^2 - 2ax + (a^2 - b) = (x - a)^2 - b$$

 $f(x)$  が極値を持つための条件は  $b > 0$  であり, そのとき

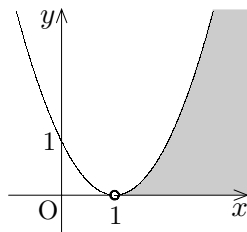
$x$	$a - \sqrt{b}$	$a + \sqrt{b}$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

 $f(x)$  が  $x > 1$  の範囲で極大値を持つための条件は

$$-b < 0 \quad \text{かつ} \quad a - \sqrt{b} > 1$$

$$b > 0 \quad \text{かつ} \quad a - 1 > \sqrt{b}$$

$$\therefore a > 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < b < (a - 1)^2 \quad (\text{答})$$

 $ab$  平面上に図示すると, 次図の網目部分(境界を含まない)となる。

(答)