

1

(1) 余弦定理より

$$\cos \angle ACB = \frac{2 + (t-1)^2 - (t^2 + 1)}{2\sqrt{2}(t-1)} = \frac{-2t + 2}{2\sqrt{2}(t-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから,

$$\angle ACB = 135^\circ \quad (\text{答})$$

(2) $\triangle ABC$ の外心 O は辺 AB の垂直二等分線上にあるから, 直線 CO と直線 AB が垂直に交わるとき, 頂点 C は AB の垂直二等分線上にあり,

$$AC = BC$$

が成り立つ。よって,

$$\sqrt{2} = t - 1$$

$$\therefore t = 1 + \sqrt{2} \quad (\text{答})$$

2

$$(1) \quad f(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

は, $0 \leq x \leq 1$ において

$$-\frac{a}{2} \geq 1 \text{ のとき } x = 1 \text{ で最小}$$

$$0 \leq -\frac{a}{2} \leq 1 \text{ のとき } x = -\frac{a}{2} \text{ で最小}$$

$$-\frac{a}{2} \leq 0 \text{ のとき } x = 0 \text{ で最小}$$

となるから, 最小値 m は

$$m = \begin{cases} 1 + a + b & (a \leq -2) \\ -\frac{1}{4}a^2 + b & (-2 \leq a \leq 0) \\ b & (a \geq 0) \end{cases} \quad (\text{答})$$

(2) $b \leq \frac{2-a}{2}$ より, m が最大になるのは

$$b = \frac{2-a}{2}$$

として,

$$M = \begin{cases} 1 + a + \frac{2-a}{2} = \frac{1}{2}a + 2 & (a \leq -2) \\ -\frac{1}{4}a^2 + \frac{2-a}{2} = -\frac{1}{4}(a+1)^2 + \frac{5}{4} & (-2 \leq a \leq 0) \\ \frac{2-a}{2} = -\frac{1}{2}a + 1 & (a \geq 0) \end{cases}$$

が最大になるときであり,

$$a = -1, \quad b = \frac{3}{2} \quad (\text{答})$$

のとき, 最大値

$$m = \frac{5}{4} \quad (\text{答})$$

をとる。

3

(1)

$$s \geq 500 \iff R \geq 5, \quad t \geq 500 \iff B \geq 5, \quad u \geq 500 \iff Y \geq 5$$

であるから, s, t, u のうち少なくとも2つが500以上となるのは, 少なくとも2つのサイコロが5以上の目を出す場合であり, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \times 3 = \frac{1+6}{3^3} = \frac{7}{27} \quad (\text{答})$$

(2)

$$s > t \iff R > B \quad \text{または} \quad R = B > Y$$

$$t > u \iff B > Y \quad \text{または} \quad B = Y > R$$

であるから,

$$s > t > u \iff R > B > Y \quad \text{または} \quad R = B > Y$$

である。

$$R > B > Y \text{ となるのは } {}_6C_3 = 20 \text{ 通り}$$

$$R = B > Y \text{ となるのは } 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \text{ 通り}$$

であるから, $s > t > u$ となる確率は

$$\frac{20+15}{6^3} = \frac{35}{216} \quad (\text{答})$$

4

- (1) C_1 と C_2 は $x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつから, その x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると, 恒等式

$$\begin{aligned}(x^3 + px^2 + x) - x^2 &= x\{x^2 + (p-1)x + 1\} \\ &= x(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

が成り立ち, 係数を比べると

$$\alpha + \beta = 1 - p, \quad \alpha\beta = 1$$

α, β が相異なる正の実数であることより

$$\begin{cases} (\text{判別式}) = (p-1)^2 - 4 = (p+1)(p-3) > 0 \\ \alpha + \beta = 1 - p > 0 \\ \alpha\beta = 1 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore p < -1 \quad (\text{答})$$

- (2) $S_1 = S_2$ となる条件は

$$\begin{aligned}\int_0^\beta (x^3 + px^2 + x - x^2) dx &= 0 \\ \frac{1}{4}\beta^4 + \frac{p-1}{3}\beta^3 + \frac{1}{2}\beta^2 &= 0\end{aligned}$$

$\beta \neq 0$ より

$$\frac{1}{4}\beta^2 + \frac{p-1}{3}\beta + \frac{1}{2} = 0$$

$$\beta^2 + (p-1)\beta + 1 = 0, \quad \beta = \frac{-(p-1) + \sqrt{(p-1)^2 - 4}}{2} \text{ より}$$

$$\frac{1}{4}\{-(p-1)\beta - 1\} + \frac{p-1}{3}\beta + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{p-1}{12}\beta + \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{p-1}{12} \cdot \frac{-(p-1) + \sqrt{(p-1)^2 - 4}}{2} + \frac{1}{4} = 0$$

$$-(p-1)^2 + (p-1)\sqrt{(p-1)^2 - 4} + 6 = 0$$

$$(p-1)\sqrt{(p-1)^2 - 4} = (p-1)^2 - 6$$

$$(p-1)^2\{(p-1)^2 - 4\} = \{(p-1)^2 - 6\}^2$$

$$-4(p-1)^2 = -12(p-1)^2 + 36$$

$$(p-1)^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$p < -1$ より

$$p-1 = -\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \therefore p = 1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$