

1 自然数の2乗となる数を平方数という。

(1) 自然数  $a, n, k$  に対して,  $n(n+1)+a=(n+k)^2$  が成り立つとき,

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ。

(2)  $n(n+1)+7$  が平方数となるような自然数  $n$  をすべて求めよ。

2 平面上の点  $O$  を中心とする半径1の円を  $C$  とする。円  $C$  の内部に点  $A$  がある。円  $C$  の周上に2点  $P, Q$  が条件  $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$  を満たしながら動く。線分  $PQ$  の中点を  $R$  とする。また,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $|\vec{a}| = r$ ,  $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ,  $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$  とする。ただし,  $0 < r < 1$  とする。

(1)  $|\overrightarrow{AR}|^2$  を内積  $\vec{p} \cdot \vec{q}$  を用いて表せ。

(2) 直線  $OA$  上の点  $B$  で,  $|\overrightarrow{BR}|^2$  が2点  $P, Q$  の位置によらず一定であるものを求めよ。また, このときの  $|\overrightarrow{BR}|^2$  の値を  $r$  を用いて表せ。

**3** 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は、1 秒ごとに、隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率  $\frac{a}{3}$  で移るか、もとの頂点に確率  $1 - a$  で留まる。初め頂点 A にいた点 P が、 $n$  秒後に頂点 A にいる確率を  $p_n$  とする。ただし、 $0 < a < 1$  とし、 $n$  は自然数とする。

(1) 数列  $\{p_n\}$  の漸化式を求めよ。

(2) 確率  $p_n$  を求めよ。

**4**  $a, b$  を実数とし、関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

を満たすとする。

(1)  $f(0)$  の値を  $a$  を用いて表せ。

(2) 関数  $f(x)$  が  $x > 1$  の範囲で極大値を持つとする。このような  $a, b$  が満たす条件を求めよ。また、点  $P(a, b)$  の存在範囲を座標平面上に図示せよ。