

1

(1) $n(n+1) + a = (n+k)^2$ が成り立つとき,

$$n + a = 2nk + k^2 \quad \therefore a = k^2 + n(2k - 1)$$

 $n \geq 1, 2k - 1 \geq 1$ より

$$a \geq k^2 + 1 \cdot (2k - 1) = k^2 + 2k - 1 \quad (\text{証明おわり})$$

(2) $n(n+1) + 14 = (n+k)^2$ となるとき, (1)より

$$k^2 + n(2k - 1) = 14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$k^2 + 2k - 1 \leq 14$$

$$\therefore (k+1)^2 \leq 16$$

 k が自然数であることより,

$$k = 1, 2, 3 \text{ が必要}$$

である。①より

$$k = 1 \text{ のとき } 1 + n = 14 \quad \therefore n = 13$$

$$k = 2 \text{ のとき } 4 + 3n = 14 \quad \therefore n = \frac{10}{3}$$

$$k = 3 \text{ のとき } 9 + 5n = 14 \quad \therefore n = 1$$

であるから, 求める自然数 n は

$$n = 1, 13 \quad (\text{答})$$

(別解) 上の解答では(1)を用いて解いたが, ふつうに解いてもよい。

$$n(n+1) + 14 = m^2 \quad (m \text{ は自然数})$$

を変形して,

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 14 = m^2$$

$$(2n+1)^2 + 55 = 4m^2$$

$$(2n+1)^2 - 4m^2 = -55$$

$$\therefore (2n+2m+1)(2n-2m+1) = -55$$

ここで,

$$2n-2m+1 = p, \quad 2n+2m+1 = q \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

とおくと,

$$p < q, \quad pq = -55$$

であるから,

$$(p, q) = (-55, 1), (-11, 5), (-5, 11), (-1, 55)$$

②を n, m について解くと

$$n = \frac{p+q-2}{4}, \quad m = \frac{q-p}{4}$$

 n, m がともに自然数となる場合を求めて,

$$(n, m) = (1, 4), (13, 14) \quad \therefore n = 1, 13 \quad (\text{答})$$

2

$$(1) \quad f'(x) = \cos x - \{1 \cdot \cos x + x(-\sin x)\} = x \sin x$$

$0 < x < 2\pi$ において, $f'(x)$ の符号変化は $\sin x$ と同じであるから, $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は

x	0	π	2π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	1	↗ 極大	↘ $1 - 2\pi$

よって, $0 \leq x \leq 2\pi$ において, $f(x)$ は

$$\text{最大値 } f(\pi) = 1 + \pi, \quad \text{最小値 } f(2\pi) = 1 - 2\pi \quad (\text{答})$$

をとる。

(2)

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= x - \cos x - x \sin x + \int 1 \cdot \sin x dx \\ &= x - 2 \cos x - x \sin x + C \quad (C \text{は積分定数}) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 + \sin \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi \cos \frac{3}{2}\pi = 0$$

であることと, (1)で調べた増減により

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \{-f(x)\} dx \\ &= \left[x - 2 \cos x - x \sin x \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} + \left[-x + 2 \cos x + x \sin x \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \\ &= 2\left(\frac{3}{2}\pi - 0 + \frac{3}{2}\pi\right) - (-2) - 2\pi + 2 \\ &= 4\pi + 4 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

3

(1) 外心 $P(\alpha\beta)$ は辺 OB の垂直二等分線上にあるから

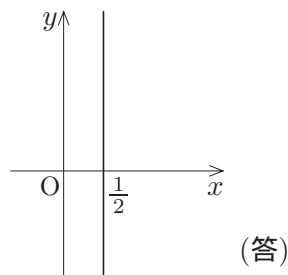
$$|\alpha\beta - 0| = |\alpha\beta - \beta|$$

$$|\alpha||\beta| = |\beta||\alpha - 1|$$

 $\beta \neq 0$ より

$$|\alpha| = |\alpha - 1| \quad (\text{答})$$

点 $A(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示すると、右図のようになる。



(2) (1)より

$$\alpha = \frac{1}{2} + ai \quad (a \text{ は実数})$$

と表され、同様に

$$\beta = \frac{1}{2} + bi \quad (b \text{ は実数})$$

と表される。

$$z = \alpha\beta = x + yi \quad (x, y \text{ は実数})$$

とおき、実部と虚部をそれぞれ比べると

$$x = \frac{1}{4} - ab, \quad y = \frac{a+b}{2} \quad \therefore a+b = 2y, \quad ab = \frac{1}{4} - x$$

 a, b を 2 解とする 2 次方程式

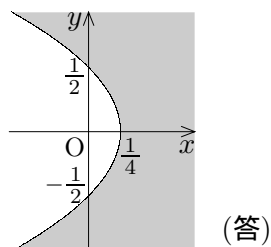
$$X^2 - 2yX + \left(\frac{1}{4} - x\right) = 0$$

が相異なる 2 実数解をもつと考えると、

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = y^2 - \left(\frac{1}{4} - x\right) > 0$$

$$\therefore x > -y^2 + \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$

x 軸を実軸、 y 軸を虚軸として複素数平面上に図示すると、次図の網目部分(境界を含まない)となる。



4

(1) 10回目の試行でゲームが終了するのは、

9回目までの目の和が9以下で、10回目までの目の和が10以上の
場合であるが、それは

9回目まですべて1の目が(出て、10回目は任意の目が出る
場合に限られるから、

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(証明おわり)

(2) 9回目で終了するのは、

- 8回目まですべて1の目、9回目に2以上の目が出る
- 8回目まで2の目が1回、1の目が7回出る

のいずれかの場合であるから、求める確率は

$$p_9 = \left(\frac{1}{6}\right)^9 \times (5 + 8 \times 6) = \frac{53}{6^9} = \frac{53}{10077696} \quad (\text{答})$$

(注) (1)において $p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$ と表記しているので、 6^9 を計算しなくても正解とみなされる可能性もあるが、ここでは原則的な答え方をした。

(3) 3回目で終了するのは、

2回目までの目の和が k ($4 \leq k \leq 9$), 3回目に $10 - k$ 以上の目が出る
場合であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 3 + 6 \times 4 + 5 \times 5 + 4 \times 6}{6^3} \\ &= \frac{3 + 8 + 15 + 24 + 25 + 24}{6^3} \\ &= \frac{99}{6^3} \\ &= \frac{11}{24} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

5 $P(x, y)$ とおくと,

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= (x-1)^2 + y^2 + (x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 12x - 6y + 19 \\ &= 3(x-2)^2 + 3(y-1)^2 + 4 \end{aligned}$$

であるから, D を表す不等式は

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq \frac{a-4}{3}$$

(1) D が点 P を含むための条件は

$$\frac{a-4}{3} \geq 0 \quad \therefore a \geq 4 \quad (\text{答})$$

(2) D が 2 点以上を含むとき,

D は円の周および内部

を表し, 特に凸図形であるから, D が T を含むための必要十分条件は

「 D が 3 点 A, B, C を含む」

ことである。

$$(1-2)^2 + (0-1)^2 \leq \frac{a-4}{3}$$

$$(3-2)^2 + (1-1)^2 \leq \frac{a-4}{3}$$

$$(2-2)^2 + (2-1)^2 \leq \frac{a-4}{3}$$

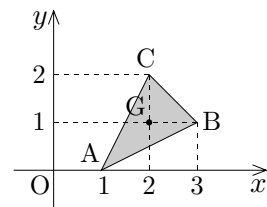
を同時に満たすことにより

$$\frac{a-4}{3} \geq 2 \quad \therefore a \geq 10 \quad (\text{答})$$

(3) 点 $G(2, 1)$ から辺 AB , 辺 AC までの距離は等しく, その距離を h として $\triangle ABG$ の面積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

$$\therefore h = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



点 $G(2, 1)$ と辺 BC との距離は $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(> \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ であるから, D が T に含まれるための条件は

$$0 \leq \frac{a-4}{3} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 \quad \therefore 4 \leq a \leq \frac{23}{5} \quad (\text{答})$$