

1

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \vec{p} &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t), \frac{1}{2}(1-t), t\right) \\
 \vec{q} &= (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD} = \left(\frac{1}{2}(2s-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(2s-1), -1\right) \\
 |\vec{p}|^2 &= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)(1-t)^2 + t^2 = 2t^2 - 2t + 1 \\
 \therefore |\vec{p}| &= \sqrt{2t^2 - 2t + 1} \quad (\text{答}) \\
 |\vec{q}|^2 &= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)(2s-1)^2 + (-1)^2 = 4s^2 - 4s + 2 \\
 \therefore |\vec{q}| &= \sqrt{4s^2 - 4s + 2} \quad (\text{答}) \\
 \vec{p} \cdot \vec{q} &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)(1-t)(2s-1) + t \cdot (-1) = -t \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) $t = \frac{1}{2}$ のとき, $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}| \cos \frac{3}{4}\pi$ となる s を求めて

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4s^2 - 4s + 2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 \sqrt{4s^2 - 4s + 2} &= 1 \\
 4s^2 - 4s + 2 &= 1 \\
 (2s-1)^2 &= 0 \\
 \therefore s &= \frac{1}{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad |\vec{p} - \vec{q}|^2 &= |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \\
 &= (2t^2 - 2t + 1) - 2(-t) + 4s^2 - 4s + 2 \\
 &= (2s-1)^2 + 2t^2 + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{p} - \vec{q}| &= \sqrt{(2s-1)^2 + 2t^2 + 2} \text{ は} \\
 s = \frac{1}{2}, t = 0 \text{ のとき最小値 } \sqrt{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

をとる。

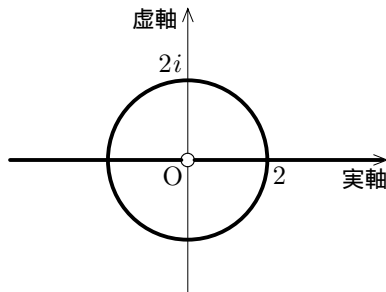
2

(1) $z + \frac{4}{z}$ が実数となることを式で表すと

$$\begin{aligned}\bar{z} + \frac{4}{z} &= z + \frac{4}{z} \\ \bar{z} - z + 4 \cdot \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} &= 0 \\ (\bar{z} - z) \left(1 - \frac{4}{z\bar{z}}\right) &= 0 \\ (\bar{z} - z) \frac{|z|^2 - 4}{|z|^2} &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \bar{z} = z \text{ または } |z| = 2$$

D を図示すると



(答)

(2)

$$k\left(z + \frac{4}{z} + 8\right) = i\left(z - \frac{4}{z}\right) \quad \dots\dots (*)$$

$\bar{z} = z$ のとき, (*) を満たすのは

$$z - \frac{4}{z} = 0$$

のときであり,

$$z^2 = 4 \quad \therefore z = \pm 2$$

よって, D の属する z で (*) を満たすものは, $|z| = 2$ のときだけ考えればよく,

$$z = 2(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\theta \text{ は実数})$$

と表される。

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$$

$$\frac{4}{z} = 2(\cos \theta - i \sin \theta)$$

であるから, (*) は

$$k(4 \cos \theta + 8) = i \cdot 4i \sin \theta$$

$$\therefore k(\cos \theta + 2) + \sin \theta = 0$$

座標平面上で、直線 $k(x+2)+y=0$ と円 $x^2+y^2=1$ が共有点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ をもつと考え、

$$\frac{|k(0+2)+0|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 1$$

$$2|k| \leq \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 \leq k^2+1$$

$$k^2 \leq \frac{1}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{答})$$

3

$$(1) \quad 1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 9(111a + 11b + c)$$

は9で割り切れるから、

$$\text{「 } 1000a + 100b + 10c + d \text{ が } 9 \text{ の倍数 } \text{」} \iff \text{「 } a + b + c + d \text{ が } 9 \text{ の倍数 } \text{」}$$

(証明おわり)

(注) 直接には、 $1000a + 100b + 10c + d$ と $a + b + c + d$ の9で割った余りが等しいことを示したことになる。

(2) n が9の倍数となるのは、4枚のカードの数字が

$$8, 8, 1, 1 \text{ または } 8, 8, 2, 0 \text{ または } 8, 1, 0, 0$$

の場合であるから、求める確率は

$$\frac{1 + 2 \times 2 + 2 \times 2}{{}_8C_4} = \frac{1 + 4 + 4}{70} = \frac{9}{70} \quad (\text{答})$$

(注) 4桁の自然数 n の全事象の場合の数は ${}_8P_4$ とするのが通常であるが、本問では4桁の並び方についての条件はないので、4枚のカードの選び方 ${}_8C_4$ 通りの各場合は同様に確からしくなる。

(3) n が偶数であるのは、1の位が0, 2, 8のいずれかの場合であるから、 n が偶数である事象を A とすると

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$

n が偶数かつ9の倍数であるのは、

$$8, 8, 1, 1 \text{ または } 8, 8, 2, 0 \text{ または } 8, 1, 0, 0$$

の4枚であり、1の位が偶数

の場合であるから、 n が9の倍数である事象を B とすると

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1 \times 2 \times 3! + 4 \times 4! + 4 \times 3 \times 3!}{8 \times 7 \times 6 \times 5} \\ &= \frac{2 + 16 + 12}{8 \times 7 \times 5} \\ &= \frac{3}{28} \end{aligned}$$

n が偶数であったとき、 n が9の倍数である確率 $P_B(A)$ は

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \quad (\text{答})$$

4

(1) $BQ \geq OQ$ より

$$(x-11)^2 + (y-11)^2 \geq x^2 + y^2$$

$$-22x - 22y + 242 \geq 0$$

$$\therefore x + y \leq 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

 $OQ \geq 2AQ$ より

$$x^2 + y^2 \geq 4 \left\{ \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 + y^2 \right\} = (2x-15)^2 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 60x + 225 \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 20x + 75 \leq 0$$

$$\therefore (x-10)^2 + y^2 \leq 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ (x-10)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \text{ を解くと, } y \text{ を消去して}$$

$$(x-10)^2 + (11-x)^2 = 25$$

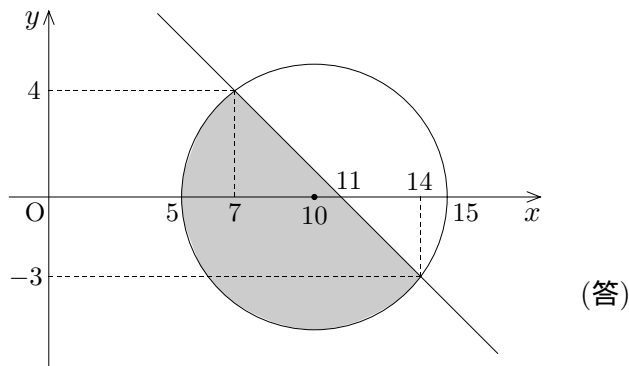
$$2x^2 - 42x + 196 = 0$$

$$x^2 - 21x + 98 = 0$$

$$(x-7)(x-14) = 0$$

$$\therefore (x, y) = (7, 4), (14, -3)$$

D は ①かつ②で表される領域であり, 次図の網目部分(境界を含む)となる。



$BQ = OQ = 2AQ$ となる点 Q は

$$(7, 4), (14, -3) \quad (\text{答})$$

(3) $OQ \geq PQ$ を x, y の式で表すと

$$x^2 + y^2 \geq (x-p)^2 + (y-11)^2$$

$$2px + 22y \geq p^2 + 121$$

$$\therefore y \geq -\frac{p}{11}x + \frac{p^2 + 121}{22}$$

$0 < p \leq 11$ より

$$-1 \leq -\frac{p}{11} < 0$$

であることに注意して (1) の図を考えると, $OQ \geq PQ$ を満たす D の点が存在するための条件は, 点 $(7, 4)$ が $OQ \geq PQ$ を満たすことであり,

$$2p \times 7 + 22 \times 4 \geq p^2 + 121$$

$$p^2 - 14p + 33 \leq 0$$

$$(p-3)(p-11) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq p \leq 11 \quad (\text{答})$$

5

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において

$$(\sin x)'' = -\sin x < 0$$

であるから, 関数 $y = \sin x$ のグラフは $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において上に凸であり, 2点

$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ を通るから,

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \frac{2}{\pi}x \leq \sin x$$

である。

(証明おわり)

(2)

$$h(x) = \left(\cos x + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi^2}{2} - x^2\right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2\left(\cos x + \frac{\pi}{2}\right)(-\sin x) + 2x \\ &= -2\sin x \cos x + \pi\left(\frac{2}{\pi}x - \sin x\right) \leq 0 \end{aligned}$$

であるから, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $h(x)$ は単調減少であり,

$$h(x) \geq h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0 + \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore \left(\cos x + \frac{\pi}{2}\right)^2 \geq \frac{\pi^2}{2} - x^2$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $\cos x + \frac{\pi}{2} > 0$, $\frac{\pi^2}{2} - x^2 \geq 0$ であるから,

$$\cos x + \frac{\pi}{2} \geq \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} \quad \therefore f(x) \geq g(x)$$

(証明おわり)

(3) (2)より, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} dx + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2}{4} = 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{16} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$