

- 1 座標空間の4点 $A(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $B(0, 0, 1)$,
 $C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$, $D(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$ に対し,

$$\vec{p} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}, \quad \vec{q} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD}$$

とおく。ただし、 O は原点、 s と t は実数とする。

- (1) $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を s , t で表せ。
- (2) $t = \frac{1}{2}$ のとき、ベクトル \vec{p} と \vec{q} のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ。
- (3) s と t が実数を動くとき、 $|\vec{p} - \vec{q}|$ の最小値を求めよ。

- 2 $z + \frac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

- (1) D を複素数平面上に図示せよ。
- (2) k を実数とする。 D に属する z で方程式

$$k\left(z + \frac{4}{z} + 8\right) = i\left(z - \frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし、 i は虚数単位を表す。

3 数字の2が書かれたカードが2枚、同様に、数字の0, 1, 8が書かれたカードがそれぞれ2枚、あわせて8枚のカードがある。これらから4枚を取り出し、横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし、0のカードが左から1枚または2枚現れる場合は、 n は3桁または2桁の自然数とそれぞれ考える。例えば、左から順に0, 0, 1, 1の数字のカードが並ぶ場合の n は11である。

- (1) a, b, c, d は整数とする。 $1000a + 100b + 10c + d$ が9の倍数になるとと $a + b + c + d$ が9の倍数になることは同値であることを示せ。
- (2) n が9の倍数である確率を求めよ。
- (3) n が偶数であったとき、 n が9の倍数である確率を求めよ。

4 座標平面上に3点 $O(0, 0)$, $A(-\frac{15}{2}, 0)$, $B(11, 11)$ がある。条件

$$BQ \geq OQ \geq 2AQ$$

を満たす点 $Q(x, y)$ の全体を D とする。

- (1) D を座標平面上に図示せよ。また、 $BQ = OQ = 2AQ$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。
- (2) $0 < p \leq 11$ とし、 P を点 $(p, 11)$ とする。条件 $OQ \geq PQ$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。

5 2つの関数

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある。

- (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、不等式 $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ が成り立つことを示せ。
- (2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、不等式 $g(x) \leq f(x)$ が成り立つことを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において、2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積を求めよ。