

[ I ]

(1) 真数条件より

$$x > 0 \text{ (かつ } x + 2a > 0)$$

$$\begin{aligned} \log_a(x+2a) - \log_{\frac{1}{a}} \frac{x}{4} &= \log_a(x+2a) - \frac{\log_a \frac{x}{4}}{\log_a a^{-1}} \\ &= \log_a(x+2a) + \log_a \frac{x}{4} \\ &= \log_a \frac{x}{4}(x+2a) < 2 = \log_a a^2 \end{aligned}$$

 $a > 1$  より,  $x > 0$  のもとで

$$\begin{aligned} \frac{x}{4}(x+2a) &< a^2 \\ x^2 + 2ax - 4a^2 &< 0 \\ (x+a)^2 - 5a^2 &< 0 \\ -\sqrt{5}a < x+a < \sqrt{5}a &\text{ かつ } x > 0 \\ \therefore 0 < x < (-1 + \sqrt{5})a \end{aligned}$$

$A(a) = \{x \mid 0 < x < (-1 + \sqrt{5})a\} \subset (-\infty, 4)$  となるための条件は  
 $(-1 + \sqrt{5})a \leq 4$

$$a \leq \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \sqrt{5} + 1$$

$$\therefore \boxed{1 < a \leq \sqrt{5} - 1} \text{ (あ)}$$

$$(2) \quad 2\vec{a} + 3\vec{b} = -4\vec{c}$$

の両辺の大きさの平方を考えて,

$$4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 16|\vec{c}|^2$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \text{ より}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\frac{1}{4}} \text{ (い)}$$

次に,

$$\vec{a} + \vec{b} + t\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} - \frac{t}{4}(2\vec{a} + 3\vec{b})$$

は点 A( $\vec{a} + \vec{b}$ )を通り,  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ に平行な直線上の点を表すから,

$$\left\{ \vec{a} + \vec{b} - \frac{t}{4}(2\vec{a} + 3\vec{b}) \right\} \perp (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

のとき  $|\vec{a} + \vec{b} + t\vec{c}| = \left| \vec{a} + \vec{b} - \frac{t}{4}(2\vec{a} + 3\vec{b}) \right|$  は最小である。このとき,

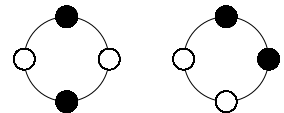
$$\left\{ \vec{a} + \vec{b} - \frac{t}{4}(2\vec{a} + 3\vec{b}) \right\} \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) - \frac{t}{4} |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= 0 \\
 2|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2 - t \left( |\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{4} |\vec{b}|^2 \right) &= 0 \\
 2 \times 1^2 + 5 \times \frac{1}{4} + 3 \times 1^2 - t \times \left( 1^2 + 3 \times \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \times 1^2 \right) &= 0 \\
 -4t + \frac{25}{4} &= 0 \\
 \therefore t &= \boxed{\frac{25}{16}} \quad (\text{㉓})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{a} + \vec{b} + t\vec{c}| &= \left| \vec{a} + \vec{b} - \frac{t}{4}(2\vec{a} + 3\vec{b}) \right| \text{ の最小値は} \\
 \left| \vec{a} + \vec{b} - \frac{25}{64}(2\vec{a} + 3\vec{b}) \right| & \\
 &= \frac{1}{64} |14\vec{a} - 11\vec{b}| \\
 &= \frac{1}{64} \sqrt{14^2 |\vec{a}|^2 - 2 \times 14 \times 11 \times \vec{a} \cdot \vec{b} + 11^2 |\vec{b}|^2} \\
 &= \frac{1}{64} \sqrt{14^2 \times 1^2 - 2 \times 14 \times 11 \times \frac{1}{4} + 11^2 \times 1^2} \\
 &= \frac{\sqrt{240}}{64} \\
 &= \boxed{\frac{\sqrt{15}}{16}} \quad (\text{㉔})
 \end{aligned}$$

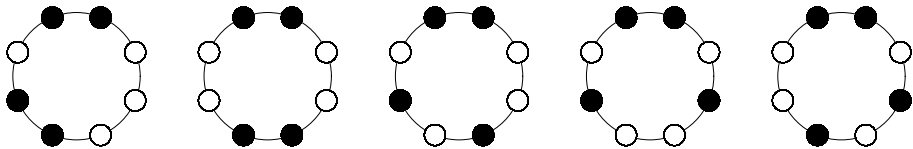
(3)(i)  $N_1$  は赤玉 2 個，白玉 2 個を円周上に等間隔に並べる場合の数であるから，

$$N_1 = \boxed{2} \quad (\text{あ})$$



(ii) 赤玉 4 個，白玉 4 個を円周上に等間隔に並べるとき

- 赤玉 4 個が連続するのは，1 通りである。
- 赤玉 3 個が連続するのは，残り 1 個の赤玉の置き場所を考えて，3 通りである。
- 赤玉が最大 2 個連続するのは，5 通りである。



- 赤玉と白玉が交互になるのは，1 通りである。

$$N_2 = 1 + 3 + 5 + 1 = \boxed{10} \quad (\text{い})$$

(iii) 赤玉 6 個, 白玉 6 個を円周上に等間隔に並べるとき

- 赤玉が 6 個連続するのは, 1 通りである。
- 赤玉が 5 個連続するのは, 5 通りである。
- 赤玉が 4 個連続するのは, 残り 2 個の赤玉が隣り合う場合とそうでない場合に分け,

$$5 + {}_5C_2 = 5 + 10 = 15 \text{ 通り}$$

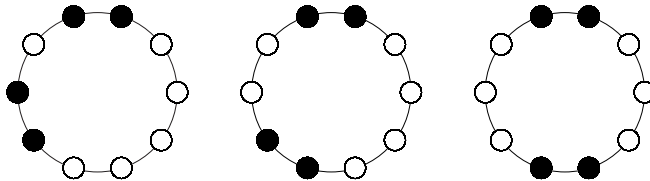
- 赤玉が最大 3 個連続するのは,  
残り 3 個の赤玉も連続するのが, 3 通りである。  
残り 3 個の赤玉が 2 個と 1 個に分かれるのが,

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20 \text{ 通り}$$

残り 3 個の赤玉が 1 個ずつに分かれるのが,

$${}_5C_3 = 10 \text{ 通り}$$

- 赤玉が最大 2 個連続するのは,  
残り 4 個の赤玉が 2 個ずつ隣り合うのが, 4 通りである。  
残り 4 個の赤玉 2 個, 1 個, 1 個と分かれるとき,



の各場合に赤玉を 1 個ずつ 2ヶ所に入れるのを数えて,

$${}_4C_2 + ({}_3C_1 + {}_3C_2) + 4 = 16 \text{ 通り}$$

残り 4 個の赤玉が 1 個ずつ分かれるのが

$${}_5C_4 = 5 \text{ 通り}$$

- 赤玉と白玉が交互になるのは, 1 通りである。

以上を集計して,

$$N_3 = 1 + 5 + 15 + (3 + 20 + 10) + (4 + 16 + 5) + 1 = \boxed{80} \text{ (き)}$$

[ II ]

(1) 袋 B の中にカードが 3 枚あるとき, 操作 T を行なったあとにまた 3 枚あるのは, 取り出した 2 枚のカードがともに 1 または 2 である場合の余事象であるから,

$$a_1(k) = 1 - \frac{1}{k} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{3k-2}{3k}$$

$n \geq 2$  のとき

$$a_n(k) = \boxed{\frac{3k-2}{3k}} a_{n-1}(k) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(あ)

袋 B の中にカードが 2 枚入っているのは,

- 袋 B の中にカードが 3 枚あるとき, 袋 A と袋 B から同じ数字の 2 枚のカードを取り出す
- 袋 B の中にカードが 2 枚あるとき, 袋 A と袋 B から同じ数字の 2 枚のカードを取り出さない

のいずれかの場合であるから,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} b_n(k) &= a_{n-1}(k) \times \frac{1}{k} \times \frac{1}{3} \times 2 + b_{n-1}(k) \times \left(1 - \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{2}{3k}} a_{n-1}(k) + \boxed{\frac{2k+1}{2k+2}} b_{n-1}(k) \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

(い) (え)

(2) ①より,  $\{a_n(k)\}$  は初項  $a_1(k) = \frac{3k-2}{3k}$ , 公比  $\frac{3k-2}{3k}$  の等比数列であるから,

$$a_n(k) = \boxed{\left(\frac{3k-2}{3k}\right)^n} \quad (\text{え})$$

自然対数の底  $e$  の定義より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3k}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{3k}\right)^{-\frac{3k}{2}} \right\}^{-\frac{2}{3}} = \boxed{e^{-\frac{2}{3}}} \quad (\text{お})$$

(3)  $k=3$  のとき, (2)より

$$a_n(3) = \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

②より

$$b_n(3) = \frac{7}{8} b_{n-1}(3) + \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

ここで,

$$\alpha \left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{7}{8} \alpha \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \quad (\alpha \text{ は定数})$$

とおくと,

$$\frac{7}{9}\alpha = \frac{7}{8}\alpha + \frac{2}{9}$$

$$-\frac{7}{72}\alpha = \frac{2}{9}$$

$$\therefore \alpha = -\frac{16}{7}$$

これを代入して

$$-\frac{16}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{7}{8} \cdot \left(-\frac{16}{7}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

③ - ④ より

$$b_n(3) + \frac{16}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{7}{8}\left\{b_{n-1}(3) + \frac{16}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}\right\}$$

$\left\{b_n(3) + \frac{16}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n\right\}$  は初項  $b_1(3) + \frac{16}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{16}{9} = 2$ , 公比  $\frac{7}{8}$  の等比数列

であるから,

$$b_n(3) + \frac{16}{7}\left(\frac{7}{9}\right)^n = 2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = \frac{16}{7}\left(\frac{7}{8}\right)^n$$

$$\therefore b_n(3) = \underbrace{\left[\frac{16}{7}\right]}_{(か)} \left(\underbrace{\left[\frac{7}{8}\right]}_{(き)}\right)^n \left\{1 - \left(\underbrace{\left[\frac{8}{9}\right]}_{(く)}\right)^n\right\}$$

[III]

(1) 加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\sin x \sin 3x &= \frac{1}{2} \{ \cos(3x - x) - \cos(3x + x) \} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin x \sin 2x \sin 3x \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2x \cos 2x - \sin 2x \cos 4x) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin 2x) \right\} \\ &= \boxed{\frac{1}{4}} \sin 2x + \boxed{\frac{1}{4}} \sin 4x + \boxed{-\frac{1}{4}} \sin 6x \\ &\quad \text{(あ)} \qquad \text{(い)} \qquad \text{(う)}\end{aligned}$$

 $f(x) = 0$  のとき

$$x = \frac{m\pi}{2} \text{ または } \frac{n\pi}{3} \quad (m, n \text{ は整数})$$

であるから, 最小正の数  $p$  は

$$p = \frac{\pi}{3}$$

 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  において曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  は

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{6} \cos 6x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{1}{8} \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) - \frac{1}{16} \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) + \frac{1}{24} \times 0 \\ &= \boxed{\frac{9}{32}} \quad \text{(え)}\end{aligned}$$

(2) (1)と同様にして

$$\begin{aligned}g(x) &= -\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x - \sin 3x \sin x \\ &= \frac{1}{2} (\cos 3x - \cos x) + \frac{1}{2} (\cos x - \cos 5x) + \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 2x) \\ &= \boxed{-\frac{1}{2}} (\cos 2x + \cos 5x) + \boxed{\frac{1}{2}} \cos 3x + \boxed{\frac{1}{2}} \cos 4x \\ &\quad \text{(お)} \qquad \text{(か)} \qquad \text{(き)}\end{aligned}$$

補角の公式より

$$g\left(\frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \left( \cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{5}{7}\pi \right) + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{3}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \left( \cos \frac{2}{7}\pi - \cos \frac{2}{7}\pi \right) + \frac{1}{2} \left( \cos \frac{3}{7}\pi - \cos \frac{3}{7}\pi \right) \\
&= \boxed{0} \quad (\text{ク})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad A^2 &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha) \\
&= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \frac{1 - \cos 2\gamma}{2} + 2C \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}B + 2C \\
\therefore C &= \boxed{\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4}B - \frac{3}{4}} \quad (\text{ケ})
\end{aligned}$$

$$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \text{ とおくと, } z \neq 1 \text{ であり,}$$

$$z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

であるから,

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^7 z^k = z \sum_{k=1}^7 z^{k-1} = \boxed{0} \quad (\text{ク})$$

(\*)の両辺を  $z^3$  で割ると

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0$$

$$\left( z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1 = 0$$

$$\left( z + \frac{1}{z} \right)^3 - 3z \cdot \frac{1}{z} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2z \cdot \frac{1}{z} + \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1 = 0$$

$$\therefore \left( z + \frac{1}{z} \right)^3 + \left( z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 \left( z + \frac{1}{z} \right) - 1 = 0$$

この方程式は

$$z = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 6)$$

に対して成り立つから,

$$\left( 2 \cos \frac{2k\pi}{7} \right)^3 + \left( 2 \cos \frac{2k\pi}{7} \right)^2 - 2 \cdot 2 \cos \frac{2k\pi}{7} - 1 = 0$$

$$\therefore \cos^3 \frac{2k\pi}{7} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{2k\pi}{7} - \frac{1}{2} \cos \frac{2k\pi}{7} - \frac{1}{8} = 0$$

$$0 < \frac{2\pi}{7} < \frac{4\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} < \pi \text{ より}$$

$$\cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{2\pi}{7}$$

であるから,  $\cos 2\alpha = \cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos 2\beta = \cos \frac{4\pi}{7}$ ,  $\cos 2\gamma = \cos \frac{6\pi}{7}$  は 3 次方程式

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$$

の 3 解であり, 解と係数の関係より

$$B = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \boxed{-\frac{1}{2}} \quad (\text{㉟})$$

$\alpha = \frac{\pi}{7}$ ,  $\beta = -\frac{2\pi}{7}$ ,  $\gamma = -\frac{3\pi}{7}$  のとき, (け), (く) より

$$\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = C = g\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0$$

であるから,

$$A^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

ここで,

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \\ &= \sin \frac{\pi}{7} - 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \left( \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right) - \sin \frac{3\pi}{7} < 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$A = \boxed{-\frac{\sqrt{7}}{2}} \quad (\text{㊱})$$

補角の公式と負角の公式を用いて

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{7} + \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{7} - \frac{1}{4} \sin \frac{6\pi}{7} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{7} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi}{7} - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{7} \\ &= -\frac{1}{4} \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{7} \\ &= -\frac{1}{4} (\sin \beta + \sin \gamma + \sin \alpha) \\ &= -\frac{1}{4} A \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{7}}{8}} \quad (\text{㊲}) \end{aligned}$$



[IV]

(1)  $-\pi < \theta < \pi$  において

$$g'(\theta) = 1 + \cos \theta \neq 0 \text{ かつ } h'(\theta) = \sin \theta = 0$$

を満たすのは,

$$\theta = 0$$

のときであり, 曲線  $C$  は  $(g(0), h(0))$  すなわち  $(\boxed{0}, \boxed{0})$  (あ) (い) において  $x$  軸に接する。

$\theta$	$(-\pi)$	$0$	$(\pi)$
$g'(\theta)$	+		+
$h'(\theta)$	-	0	+
$C$	$(-\pi, 2)$	$\swarrow \searrow$ $(0, 0)$	$\nwarrow \nearrow$ $(\pi, 2)$

曲線  $C$  の範囲は

$$\boxed{-\pi} < x < \boxed{\pi}, \quad \boxed{0} \leq y < \boxed{2}$$

(う) (え) (お) (か)

(2)  $-\pi < \theta < \pi$  において

$$g'(\theta) = 1 + \cos \theta > 0$$

であるから,  $x = g(\theta)$  は狭義単調増加であり,  $\theta$  と  $x$  は 1 対 1 に対応する。したがって,  $-\pi < x < \pi$  を満たす任意の  $x$  に対して,  $C$  上の点  $P(x, y)$  はただ 1 つ決まる。

$$f'(x) = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta (1 + \cos \theta) - \sin \theta \cdot (-\sin \theta)}{(1 + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{(1 + \cos \theta)^3} \\ &= \frac{1}{(1 + \cos \theta)^2} > 0 \end{aligned}$$

より,  $f(x)$  のグラフは下に凸である。

(証明おわり)

$$(3) \quad g'(\theta)^2 + h'(\theta)^2 = (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 2 + 2 \cos \theta = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

曲線の長さの公式より

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{g'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\
&= \int_0^t 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \left[ 2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^t = \boxed{4 \sin \frac{t}{2}} \\
&\hspace{15em} \text{(き)}
\end{aligned}$$

(4) 接線  $l_t$  の方程式は

$$(\sin t)(x - t - \sin t) - (1 + \cos t)(y - 1 + \cos t) = 0$$

$$(\sin t)(x - t) - \sin^2 t - (1 + \cos t)y + 1 - \cos^2 t = 0$$

$$\therefore (\sin t)(x - t) - (1 + \cos t)y = 0$$

$l_t$  と  $x$  軸との交点は  $Q_t(\boxed{t}, 0)$  である。  
(く)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Q_t P_t} &= \overrightarrow{O P_t} - \overrightarrow{O Q_t} \\
&= (t + \sin t, 1 - \cos t) - (t, 0) \\
&= (\sin t, 1 - \cos t) \\
&= \left( 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}, 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \\
&= 2 \sin \frac{t}{2} \left( \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \right)
\end{aligned}$$

の方向角は  $\boxed{\frac{t}{2}}$  ラジアンである。  
(け)

(5) 原点  $O$  から接線  $l_t$  におろした垂線の足を  $H_t$  とすると,  $\overrightarrow{O H_t} \perp \overrightarrow{Q_t P_t}$  より

$$H_t \left( k \sin \frac{t}{2}, -k \cos \frac{t}{2} \right) \quad (k \text{ は実数})$$

と表され,  $l_t$  の式に代入すると

$$2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \left( k \sin \frac{t}{2} - t \right) - 2 \cos^2 \frac{t}{2} \left( -k \cos \frac{t}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{t}{2} \left( k \sin \frac{t}{2} - t \right) + k \cos^2 \frac{t}{2} = 0$$

$$\therefore k = O H_t = t \sin \frac{t}{2}$$

$O P_t^2$  を計算すると

$$\begin{aligned}
O P_t^2 &= (t + \sin t)^2 + (1 - \cos t)^2 \\
&= t^2 + 2t \sin t + 2 - 2 \cos t \\
&= t^2 + 4t \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 4 \sin^2 \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

であるから, 三平方の定理より

$$H_t P_t^2 = O P_t^2 - O H_t^2$$

$$\begin{aligned}
 &= t^2 \left( 1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right) + 4t \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 4 \sin^2 \frac{t}{2} \\
 &= \left( t \cos \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \\
 \therefore H_t P_t &= t \cos \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

$R_t(a(t), b(t))$  とするとき,

$$a(t) = 4 \sin \frac{t}{2} - H_t P_t = \boxed{2 \sin \frac{t}{2} - t \cos \frac{t}{2}} \quad (\text{㉜})$$

$$b(t) = OH_t = \boxed{t \sin \frac{t}{2}} \quad (\text{㉝})$$

$$(6) \quad a'(t) = \cos \frac{t}{2} - 1 \cdot \cos \frac{t}{2} - t \left( -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \right) = \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}$$

は  $0 < t < \pi$  でつねに正であるから, (2) と同様に考え, 点  $R_t$  の軌跡はある関数  $y = F(x)$  のグラフとみなせる。 $y = F(x)$  と  $x$  軸, および直線  $x = \alpha$  で囲まれた部分の面積  $S$  は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^\alpha F(x) dx \\
 &= \int_0^\pi F(a(t)) \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_0^\pi b(t) a'(t) dt \\
 &= \int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi t^2 (1 - \cos t) dt \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{t^3}{3} - t^2 \sin t \right]_0^\pi + \frac{1}{4} \int_0^\pi 2t \sin t dt \\
 &= \frac{\pi^3}{12} + \frac{1}{2} \left[ t(-\cos t) \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos t) dt \\
 &= \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[ \sin t \right]_0^\pi \\
 &= \boxed{\frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi}{2}} \quad (\text{㉞})
 \end{aligned}$$