

I.

(i) 加法定理を用いて

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4\sqrt{3} \cos x - 4 \sin x + 5 \\
 &= 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) + 5 \\
 &= 8 \left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} \right) + 5 \\
 &= 8 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 5
 \end{aligned}$$

と変形され, $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ より

$$x + \frac{\pi}{6} = 2\pi \text{ で最大, } x + \frac{\pi}{6} = \pi \text{ で最小}$$

となり,

$$x = \frac{\boxed{11}}{\boxed{6}} \pi \text{ で最大値 } \boxed{13}, \quad x = \frac{\boxed{5}}{\boxed{6}} \pi \text{ で最小値 } \boxed{-3}$$

(3) (4)(5) (6) (7) (8)(9)

をとる。

(ii) 点 (a_n, a_n^5) における曲線 $y = x^5$ の接線

$$y = 5a_n^4(x - a_n) + a_n^5$$

は点 $(a_{n+1}, 0)$ を通るから,

$$0 = 5a_n^4(a_{n+1} - a_n) + a_n^5$$

 $a_n \neq 0$ のとき

$$0 = 5(a_{n+1} - a_n) + a_n \quad \therefore a_{n+1} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}} a_n$$

(10) (11)

$a_1 = 1 \neq 0$ であるから, 数学的帰納法によりつねに $a_n \neq 0$ が示され, この式は任意の自然数 n で成り立つ。よって, $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 1$, 公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列で

あるから $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ であり,

$$a_n - a_{n+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{4}{5}\right) \leq \frac{1}{1000}$$

を満たす n を求めると,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{200}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} \geq 200$$

$$\log_{10} \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} \geq \log_{10} 200 \quad \therefore (n-1) \log_{10} \frac{5}{4} \geq \log_{10} 200$$

$$\log_{10} \frac{5}{4} > \log_{10} 1 = 0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} n - 1 &\geq \frac{\log_{10} 200}{\log_{10} \frac{5}{4}} = \frac{\log_{10} 2 \cdot 10^2}{\log_{10} \frac{10}{8}} \\ &= \frac{\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 10}{\log_{10} 10 - 3 \log_{10} 2} \\ &= \frac{0.3010 + 2 \times 1}{1 - 3 \times 0.3010} \\ &= 23.7 \dots \end{aligned}$$

n は自然数であるから

$$n - 1 \geq 24 \quad \therefore n \geq \boxed{25}$$

(12)(13)

II.

(i) $x > 0$ において, 限界費用

$$m(x) = x^2 - 8x + 17 = (x - 4)^2 + 1 \quad \dots\dots ①$$

が最小となる製造量 x_m は

$$x_m = \boxed{4} \quad (14)$$

 $c(0) = 0$, $c'(x) = m(x)$ より

$$\begin{aligned} c(x) &= c(0) + \int_0^x m(t) dt \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 17x \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

平均費用

$$a(x) = \frac{c(x)}{x} = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 17 = \frac{1}{3}(x - 6)^2 + 5$$

が最小となる製造量 x_a は

$$x_a = \boxed{6} \quad (15)$$

(ii) (i)より

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_a+1} |m(x) - a(x)| dx &= \int_4^7 \left| \frac{2}{3}x^2 - 4x \right| dx \\ &= \int_4^7 \frac{2}{3} |x(x - 6)| dx \\ &= \int_4^6 \left(-\frac{2}{3}x^2 + 4x \right) dx + \int_6^7 \left(\frac{2}{3}x^2 - 4x \right) dx \\ &= \left[-\frac{2}{9}x^3 + 2x^2 \right]_4^6 + \left[\frac{2}{9}x^3 - 2x^2 \right]_6^7 \\ &= (-48 + 72) \times 2 - \left(-\frac{128}{9} + 32 \right) + \frac{686}{9} - 98 \\ &= \frac{\boxed{76}}{\boxed{9}} \quad (16)(17) \\ &= \frac{\boxed{76}}{\boxed{9}} \quad (18) \end{aligned}$$

(iii) $a(x) = \frac{c(x)}{x}$ が減少関数ならば,

$$0 < x_1 < x_1 + x_2, \quad 0 < x_2 < x_1 + x_2$$

より

$$\begin{aligned} \frac{c(x_1)}{x_1} &> \frac{c(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2}, \quad \frac{c(x_2)}{x_2} > \frac{c(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \\ \therefore c(x_1) &> \frac{x_1}{x_1 + x_2} c(x_1 + x_2), \quad c(x_2) > \frac{x_2}{x_1 + x_2} c(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

辺々を加えると

$$c(x_1) + c(x_2) > \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2} c(x_1 + x_2) = c(x_1 + x_2)$$

(証明おわり)

(iv) ①を仮定すると, $c(x)$ は ②であり, 節約される費用は

$$\begin{aligned} & c(u_1) + c(u_2) - c(u_1 + u_2) \\ &= \frac{1}{3} \{u_1^3 + u_2^3 - (u_1 + u_2)^3\} - 4 \{u_1^2 + u_2^2 - (u_1 + u_2)^2\} \\ &\quad + 17 \{u_1 + u_2 - (u_1 + u_2)\} \\ &= \frac{1}{3} \{-3u_1u_2(u_1 + u_2)\} - 4(-2u_1u_2) + 0 \\ &= -u_1u_2(u_1 + u_2) + 8u_1u_2 \\ &= u_1u_2 \left(\frac{8 - u_1 - u_2}{\text{ㄠ}} \right) \end{aligned}$$

III.

(i) 連立方程式

$$\begin{cases} 1 - 2y + 3z + 1 = 0 & \dots\dots ① \\ 3 + 4y - 7z - 5 = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

を解くと, ① × 2 + ② より

$$-z + 2 = 0 \quad \therefore z = 2$$

①より

$$y = \frac{3}{2}z + 1 = 4 \quad \therefore \vec{p}_0 = \left(1, \boxed{4}, \boxed{2}\right)$$

(19) (20)

交線 l の方向ベクトルを

$$\vec{v} = (1, p, q)$$

とおくと, l が π_1 上にあることより

$$1 - 2p + 3q = 0 \quad \dots\dots ③$$

 l が π_2 上にあることより

$$3 + 4p - 7q = 0 \quad \dots\dots ④$$

③ × 2 + ④ より

$$5 - q = 0 \quad \therefore q = 5$$

③に代入して

$$p = \frac{3q + 1}{2} = 8 \quad \therefore \vec{v} = \left(1, \boxed{8}, \boxed{5}\right)$$

(21) (22)

(ii) 球面 S と直線 l が 1 点 H のみを共有するとき, l 上の点として

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= (1, 4, 2) + h(1, 8, 5) \quad (h \text{ は実数}) \\ &= (h + 1, 8h + 4, 5h + 2) \quad \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

と表され,

$$\begin{aligned} \vec{AH} &= \vec{OH} - \vec{OA} \\ &= (h + 1, 8h + 4, 5h + 2) - (2, -8, 3) \\ &= (h - 1, 8h + 12, 5h - 1) \quad \dots\dots ⑥ \end{aligned}$$

は l と垂直であるから,

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{AH} &= 1 \cdot (h - 1) + 8(8h + 12) + 5(5h - 1) = 90h + 90 = 0 \\ \therefore h &= -1 \end{aligned}$$

⑤より, 接点 H の座標は

$$\left(\boxed{0}, \boxed{-4}, \boxed{-3} \right)$$

(23) (24)(25) (26)(27)

⑥より

$$\begin{aligned} \vec{AH} &= (-2, 4, -6) = 2(-1, 2, -3) \\ |\vec{AH}| &= 2\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

 S と l が 2 点 Q, R で交わるとき, $\triangle AQR$ の面積について

$$\frac{1}{2} \cdot QR \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot 2\sqrt{14} = 24\sqrt{35}$$

$$\therefore QR = \frac{24\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = 12\sqrt{10}, \quad QH = RH = \frac{1}{2}QR = 6\sqrt{10}$$

直角三角形 AQH において, 三平方の定理より

$$\begin{aligned} (S \text{ の半径}) &= \sqrt{AH^2 + QH^2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{5})^2} \\ &= 4\sqrt{26} \end{aligned}$$

球面 S の方程式は

$$(x-2)^2 + (y+8)^2 + (z-3)^2 = (4\sqrt{26})^2$$

であり, 直線 l のベクトル方程式

$$(x, y, z) = (1, 4, 2) + t(1, 8, 5) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

と連立すると

$$(t-1)^2 + (8t+12)^2 + (5t-1)^2 = 416$$

$$90t^2 + 180t - 270 = 0$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -3, 1$$

⑦より, 交点 Q, R の座標は

$$\left(\boxed{-2}, \boxed{-20}, \boxed{-13} \right), \left(\boxed{2}, \boxed{12}, \boxed{7} \right)$$

(28)(29) (30)(31)(32) (33)(34)(35) (36) (37)(38) (39)

(iii)

$$x - 2y + 3z + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$3x + 4y - 7z - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑨ - ⑧ × 3 より x を消去して, 平面 π_3 の方程式は

$$10y - 16z - 8 = 0 \quad \therefore \boxed{5y - 8z - 4} = 0$$

(ウ)

⑧ × 2 + ⑨ より y を消去して, 平面 π_4 の方程式は

$$\boxed{5x - z - 3} = 0$$

(エ)

IV.

(i) 太郎が1個の玉を獲得するのは、太郎と花子が同じ数の玉を取り出す場合であるから、その確率は

$$\frac{3 \cdot {}_3P_2 + 1 \cdot 2!}{{}_{12}P_2} = \frac{3 \times 6 + 2}{12 \times 11} = \frac{\boxed{5}^{(40)}}{\boxed{33}^{(41)(42)}}$$

太郎が2個の玉を獲得する確率と花子が2個の玉を獲得する確率が等しく、その確率 p は

$$p = \left(1 - \frac{5}{33}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\boxed{14}^{(43)(44)}}{\boxed{33}^{(45)(46)}} = \frac{56}{132}$$

太郎が取り出した玉に書かれた数を a 、花子が取り出した玉に書かれた数を b とするとき、 $b - a = 1$ となるのは

$$(a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$$

のときであるから、 $b - a = 1$ となる確率 q_1 は

$$q_1 = \frac{3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1}{{}_{12}P_2} = \frac{26}{132}$$

以下同様にして、 $b - a = n$ となる確率を q_n ($n = 2, 3, 4$) とすると、

$$q_2 = \frac{3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1}{{}_{12}P_2} = \frac{18}{132}$$

$$q_3 = \frac{3 \times 2 + 3 \times 1}{{}_{12}P_2} = \frac{9}{132}$$

$$q_4 = \frac{3 \times 1}{{}_{12}P_2} = \frac{3}{132}$$

よって、花子が2個の玉を獲得したとき、玉に書かれた数の差(の絶対値)が n である条件付き確率を p_n とすると、

$$p_1 = \frac{q_1}{p} = \frac{26}{56}, \quad p_2 = \frac{q_2}{p} = \frac{18}{56}, \quad p_3 = \frac{q_3}{p} = \frac{9}{56}, \quad p_4 = \frac{q_4}{p} = \frac{3}{56}$$

であり、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^4 np_n &= 1 \times \frac{26}{56} + 2 \times \frac{18}{56} + 3 \times \frac{9}{56} + 4 \times \frac{3}{56} \\ &= \frac{26 + 36 + 27 + 12}{56} \\ &= \frac{\boxed{101}^{(47)(48)(49)}}{\boxed{56}^{(50)(51)}} \end{aligned}$$

(ii) 太郎が赤玉を獲得するのは、

- 太郎と花子が同じ数が書かれた玉を取り出し、太郎が赤玉である
- 太郎が花子より大きい数の玉を取り出し、太郎が赤玉である
- 太郎が花子より大きい数の玉を取り出し、太郎が青玉または白玉、花子が赤玉である

のいずれかの場合であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{3 \times 2 + 1 \times 1}{{}_{12}P_2} + \frac{11 + 9 + 6 + 3}{{}_{12}P_2} + \frac{3 + 2 \times 2 + 2 \times 1}{{}_{12}P_2} \\ &= \frac{7 + 29 + 9}{12 \times 11} \\ &= \frac{45}{132} \\ &= \frac{\boxed{15}}{\boxed{44}} \quad (52)(53) \\ &= \frac{\boxed{15}}{\boxed{44}} \quad (54)(55) \end{aligned}$$

(iii) このゲームを 2 回繰り返すとき、太郎と花子が取り出した玉を順に並べると、

太郎が 2 回とも赤玉を取り出す順列は ${}_5P_2 \times {}_{10}P_2$ 通り

太郎が 2 回とも青玉を取り出す順列は ${}_4P_2 \times {}_{10}P_2$ 通り

太郎が 2 回とも白玉を取り出す順列は ${}_3P_2 \times {}_{10}P_2$ 通り

であるから、太郎が 2 回とも同色の玉を取り出す確率は

$$\frac{({}_5P_2 + {}_4P_2 + {}_3P_2) \times {}_{10}P_2}{{}_{12}P_4} = \frac{20 + 12 + 6}{12 \times 11} = \frac{\boxed{19}}{\boxed{66}} \quad (56)(57)$$

(58)(59)

2 回のゲームで 3 個の玉を獲得したときの玉に書かれた数の和の最大値は

$$5 + 4 + 3 = 12$$

であるから、和が 15 となるには、2 回とも 2 個の玉を獲得することが必要である。和が 15 となる 4 数の組は

$$5 + 4 + 4 + 2, \quad 5 + 4 + 3 + 3$$

に限られ、花子が獲得した玉に書かれた数の和が 15 となるのは、

$$4524, \quad 2445, \quad 3534, \quad 3435$$

のいずれかの順に取り出す場合であるから、その確率は

$$\begin{aligned} & \frac{(2 \times 3) \times 2 + (2 \times {}_3P_2) \times 2}{{}_{12}P_4} = \frac{12 + 24}{12 \times 11 \times 10 \times 9} \\ &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{330}} \quad (60) \\ &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{330}} \quad (61)(62)(63) \end{aligned}$$