

I.

(i)  $S_k$  の中心  $(x_k, 0, 0)$  は  $S_{k-1}$  上にあり,  $x_k > x_{k-1}$  であるから,

$$x_k - x_{k-1} = r_{k-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x_0 = 0, \quad r_0 = \sqrt{5} \text{ より}$$

$$S_0 : x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

①より

$$x_1 = x_0 + r_0 = \sqrt{5}$$

•  $r_1 = \sqrt{5}$  のとき $S_0$  と  $S_1$  の交円について

$$\text{半径は } \sqrt{5} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad \text{円周の長さは } 2\pi \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = \sqrt{\frac{15}{(1)(2)}} \pi$$

$$\begin{cases} S_{k-1} : (x - x_{k-1})^2 + y^2 + z^2 = r_{k-1}^2 \\ S_k : (x - x_k)^2 + y^2 + z^2 = r_k^2 \end{cases} \text{ より } y^2 + z^2 \text{ を消去すると}$$

$$2(x_k - x_{k-1})x + x_{k-1}^2 - x_k^2 = r_{k-1}^2 - r_k^2$$

①より

$$2r_{k-1}x + x_{k-1}^2 - (x_{k-1} + r_{k-1})^2 = r_{k-1}^2 - r_k^2$$

$$2r_{k-1}x = 2x_{k-1}r_{k-1} + 2r_{k-1}^2 - r_k^2$$

$$\therefore x = x_{k-1} + r_{k-1} - \frac{r_k^2}{2r_{k-1}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

•  $k = 1$  のとき

$$\text{交円を含む平面の } x \text{ 座標は } x_0 + r_0 - \frac{r_1^2}{2r_0} = \frac{10 - r_1^2}{2\sqrt{5}}$$

 $S_0$  と  $S_1$  の交円の半径を  $R_1$  とすると,

$$R_1^2 = 5 - \left( \frac{10 - r_1^2}{2\sqrt{5}} \right)^2$$

であるから,

$$r_1 = \sqrt{\frac{10}{(3)(4)}}$$

のとき  $R_1$  は最大となる。 $C_k(x_k, 0, 0)$  とおくと,  $S_0$  と  $S_1$  のいずれにも接する  $xy$  平面上の直線  $l$  が  $x$  軸と交わる点  $A$  は,  $C_0C_1$  を  $\sqrt{5} : \sqrt{10} = 1 : \sqrt{2}$  に外分するから,

$$x_A = \frac{\sqrt{5}}{1 - \sqrt{2}} = -\sqrt{5}(\sqrt{2} + 1) = -\sqrt{\frac{5}{(5)}} - \sqrt{\frac{10}{(6)(7)}}$$

•  $S_{k-1}$  と  $S_k$  の交円の半径を  $R_k$  とすると,

$$R_k^2 = r_{k-1}^2 - \left( x_{k-1} + r_{k-1} - \frac{r_k^2}{2r_{k-1}} - x_{k-1} \right)^2$$

$$= r_{k-1}^2 - \frac{1}{4r_{k-1}^2} (r_k^2 - 2r_{k-1}^2)^2$$

$r_{k-1}$  を固定して  $2\pi R_k$  が最大となるように  $r_k$  を定めるとき

$$r_k = \sqrt{2} r_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$\{r_k\}$  は初項  $r_0$ , 公比  $\sqrt{2}$  の等比数列であるから,

$$r_k = r_0(\sqrt{2})^k$$

$r_k$  が  $r_0$  の 100 倍以上になるとき

$$2^{\frac{k}{2}} \geq 100 \quad \therefore 2^k \geq 10000$$

$$2^{13} = 8192, \quad 2^{14} = 16384 \text{ より}$$

$$k \geq \boxed{14} \quad (8)(9)$$

$$(ii) \bullet |\overrightarrow{OA}|^2 = (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = \boxed{6} \quad (10)$$

$$|\overrightarrow{OB}|^2 = (3 + \sqrt{3})^2 + (3 - \sqrt{3})^2 = 2 \times (9 + 3) = \boxed{24} \quad (11)(12)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\sqrt{3}(3 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(3 - \sqrt{3}) = \boxed{-6} \quad (13)(14)$$

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{OC} &= -2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -2(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) - (3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}) \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ &= \left( \underbrace{\boxed{-3}}_{(15)(16)} + \sqrt{\underbrace{\boxed{3}}_{(17)}}, \underbrace{\boxed{-3}}_{(18)(19)} - \sqrt{\underbrace{\boxed{3}}_{(20)}} \right) \end{aligned}$$

$$\bullet \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BD} \text{ より} \quad \overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{OA} \quad (k \text{ は実数}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

と表され,  $\overrightarrow{OB}$  と  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$  は垂直であるから

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$|\overrightarrow{OB}|^2 + k\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$24 - 6k = 0 \quad \therefore k = 4$$

②に代入して

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \underbrace{\boxed{4}}_{(21)} \overrightarrow{OA}$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①を用いて

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} - (-2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} = \frac{\underbrace{\boxed{1}}_{(22)}}{\underbrace{\boxed{2}}_{(23)}} \overrightarrow{OC} + \frac{\underbrace{\boxed{1}}_{(24)}}{\underbrace{\boxed{2}}_{(25)}} \overrightarrow{OD} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

- 点 E は直線 OB 上にあるから

$$\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OB} \quad (t \text{ は実数}) \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

と表され, 直線 CD 上にもあるから, ①, ③を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= (1-u)\overrightarrow{OC} + u\overrightarrow{OD} \quad (u \text{ は実数}) \\ &= (1-u)(-2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + u(4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= (6u-2)\overrightarrow{OA} + (2u-1)\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

と表される。 $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  は 1 次独立であるから, ⑤, ⑥より

$$\begin{aligned} 6u-2 &= 0 \quad \text{かつ} \quad 2u-1 = t \\ \therefore u &= \frac{1}{3}, \quad t = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

⑤より

$$\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

であるから,

$$\frac{|\overrightarrow{OE}|}{|\overrightarrow{BE}|} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \quad \begin{matrix} (26) \\ (27) \end{matrix}$$

①, ③, ⑦より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - (4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -6\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}\overrightarrow{DC} \quad \begin{matrix} (28) \\ (29) \end{matrix} \end{aligned}$$

$\triangle OAC$  の面積  $S_1$  は

$$S_1 = \frac{1}{2} |-\sqrt{3}(-3-\sqrt{3}) - \sqrt{3}(-3+\sqrt{3})| = \boxed{3\sqrt{3}} \quad (\text{A})$$

⑦より

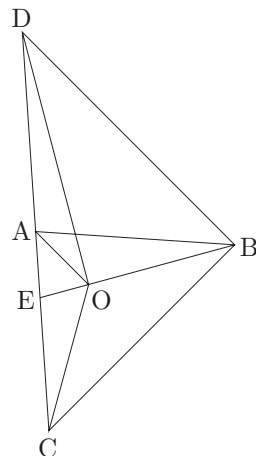
$$\triangle ABC = 4\triangle OAC,$$

④より

$$\triangle BCD = 2\triangle ABC$$

であるから,  $\triangle BCD$  の面積  $S_2$  は

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \times 4\triangle OAC \\ &= 8S_1 \\ &= \boxed{24\sqrt{3}} \quad (\text{B}) \end{aligned}$$



II.

$$\begin{aligned} g(x)f_n(x) &= \left(\frac{1}{3}x + 3\right)(x^2 + a_nx + b_n) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \left(\frac{1}{3}a_n + 3\right)x^2 + \left(3a_n + \frac{1}{3}b_n\right)x + 3b_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= x^2 + a_{n+1}x + b_{n+1} \\ &= \frac{d}{dx}g(x)f_n(x) \\ &= x^2 + \left(\frac{2}{3}a_n + 6\right)x^2 + 3a_n + \frac{1}{3}b_n \end{aligned}$$

であるから,

$$a_{n+1} = \frac{\overset{(30)}{2}}{\underset{(31)}{3}} a_n + \frac{\overset{(32)}{6}}{\underset{(32)}{3}} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$b_{n+1} = \frac{\overset{(32)}{1}}{\underset{(33)}{3}} b_n + \frac{\overset{(35)}{3}}{\underset{(35)}{3}} a_n \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

 $c = \frac{2}{3}c + 6$  を満たす  $c$  を求めると

$$18 = \frac{2}{3} \times 18 + 6 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

④ - ⑥ より

$$a_{n+1} - 18 = \frac{2}{3}(a_n - 18)$$

 $\{a_n - 18\}$  は初項  $a_1 - 18$ , 公比  $\frac{2}{3}$  の等比数列であるから

$$a_n - 18 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (a_1 - 18) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

したがって,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} (a_1 - 18) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (a_1 - 18) > 0 \end{aligned}$$

がすべての自然数  $n$  について成り立つのは,

$$a_1 > \boxed{18} \quad (36)(37)$$

のときである。

放物線  $y = f_1(x)$  と直線  $y = g(x)$  が  $x = t$  で接するとすれば,

$$\begin{cases} t^2 + a_1 t + b_1 = \frac{1}{3}t + 3 \\ 2t + a_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$t$  を消去して

$$\frac{1}{4}\left(-a_1 + \frac{1}{3}\right)^2 + a_1 \cdot \frac{1}{2}\left(-a_1 + \frac{1}{3}\right) + b_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(-a_1 + \frac{1}{3}\right) + 3$$

$$b_1 = \frac{1}{4}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3$$

$$= \frac{1}{4}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)^2 + 3$$

$$> \frac{1}{4}\left(18 - \frac{1}{3}\right)^2 + 3 = \frac{18^2 - 12}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3$$

$$= 81 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$b_1$  が 4 の整数倍で,  $a_1$  が最小となるのは

$$b_1 = \boxed{84}_{(41)(42)} = \frac{1}{4}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)^2 + 3$$

のときであり,

$$\frac{1}{4}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = 81$$

$a_1 > 18$  より

$$a_1 - \frac{1}{3} = 2 \times 9 \quad \therefore a_1 = 18 + \frac{1}{3} = \boxed{55}_{(38)(39)}_{\boxed{3}_{(40)}}$$

このとき, ⑦より

$$a_n = \boxed{18 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} \quad (C)$$

$a_n - [a_n] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < 0.001$  となるとき,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < \frac{3}{10^3}$$

$$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < \log_{10} \frac{3}{10^3}$$

$$(n-1)(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) < \log_{10} 3 - 3$$

$$(n-1)(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) > 3 - \log_{10} 3$$

$$n > 1 + \frac{3 - \log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} = 1 + \frac{3 - 0.477}{0.477 - 0.301}$$

$$= 1 + \frac{2.523}{0.176} = \frac{2699}{176} = 15.3 \dots$$

最小の  $n$  は  $\boxed{16}$  (43)(44)

$a_1 = \frac{55}{3}$ ,  $b_1 = 84$  のとき, (C) を ⑤ に代入して

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + 54 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

ここで,

$$\alpha + \beta\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left\{\alpha + \beta\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\} + 54 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

とおくと,

$$\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 54 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

任意の自然数  $n$  に対して成り立つとすれば,

$$\frac{2}{3}\alpha = 54 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{3}\beta = 1 \quad \therefore \alpha = 81, \beta = 3$$

$$\therefore 81 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left\{81 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\} + 54 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑧ - ⑨ より

$$b_{n+1} - 81 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left\{b_n - 81 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

であり,  $\left\{b_n - 81 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$  は初項

$$b_1 - 81 - 3 = 0$$

の等比数列であるから,

$$b_n = \boxed{81 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} \quad \text{(D)}$$

である。

(注) 問題文には「実数  $b_1$  が 4 の倍数」とあるが, 実数の範囲では

$$b_1 = 4 \times \frac{b_1}{4} \quad \left(\frac{b_1}{4} \text{ は実数}\right)$$

と表されるから, 条件は任意ということになる。それでは問題が意味を失ってしまうので, 上の解答では

「 $b_1$  は 4 の整数倍」

と解釈して答案をまとめた。

III.

(i) 客2の手続きの終了時刻は

客1 客2の手続き	終了時刻
AA	10:15
AB	10:25
BA	10:20
BB	10:30

であり、客3は10:20に到着するから

$$W(3, \underset{(45)}{\boxed{0}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2}$$

$$W(3, \underset{(46)}{\boxed{5}}) = W(3, \underset{(47)(48)}{\boxed{10}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

客3の手続きの終了時刻は

客1 客2 客3の手続き	終了時刻
AAA	10:25
BAA	10:25
ABA	10:30
AAB	10:35
BBA	10:35
BAB	10:35
ABB	10:40
BBB	10:45

であり、客4は10:30に到着するから

$$W(4, \underset{(49)}{\boxed{0}}) = W(4, \underset{(50)}{\boxed{5}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3 = \frac{\underset{(51)}{\boxed{3}}}{\underset{(52)}{\boxed{8}}}$$

$$W(4, \underset{(53)(54)}{\boxed{10}}) = W(4, \underset{(55)(56)}{\boxed{15}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\underset{(57)}{\boxed{1}}}{\underset{(58)}{\boxed{8}}}$$

 $n \geq 2$ ,  $0 \leq t \leq n-1$  ならば,

$$W(n, 5t) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot {}_{n-1}C_{\frac{n+t-1}{2}} & (n+t \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{2^{n-1}} \cdot {}_{n-1}C_{\frac{n+t}{2}} & (n+t \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \dots \textcircled{4}$$

が成り立つことを  $n$  に関する数学的帰納法で証明する。

(ii)  $n = 2$  のとき,

$$W(2, 0) = W(2, 5) = \frac{1}{2}$$

であるから, ④は  $t = 0, 1$  に対して成り立つ。

以降,  $k \geq 2$  とし,  $n = k$  のときに  $0 \leq t \leq n - 1$  ならば ④が成り立つと仮定し,  $n = k + 1$  のときを考える。

$W(k + 1, 5k)$  は客  $k$  が  $5(k - 1)$  分待った後に B の手続きを行なう確率と等しいので,

$$\begin{aligned} W(k + 1, 5k) &= W(k, 5(k - 1)) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{\boxed{k-1}}} \cdot {}_{k-1}C_{\frac{\boxed{k-1}-1}{2}} \times \frac{1}{2} \\ &\quad \boxed{3} \quad (59) \quad \boxed{3} \quad (60) \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot {}_{k-1}C_{k-1} \\ &= \frac{1}{2^{\boxed{k}}} \cdot {}_kC_{\boxed{k}} \quad \boxed{2} \quad (62) \\ &\quad \boxed{2} \quad (61) \end{aligned}$$

となり, ④は  $t = k$  のとき成り立つ。同様に,

$$\begin{aligned} W(k + 1, 5(k - 1)) &= W(k, 5(\boxed{k-2})) \times \frac{1}{2} \\ &\quad \boxed{4} \quad (63) \\ &= \frac{1}{2^{\boxed{k-1}}} \cdot {}_{k-1}C_{\frac{\boxed{k-2}}{2}} \times \frac{1}{2} \\ &\quad \boxed{4} \quad (64) \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot {}_kC_{\boxed{k}} \quad \boxed{2} \quad (65) \end{aligned}$$

となり, ④は  $t = k - 1$  のとき成り立つ。

$1 \leq t \leq k - 2$  のとき,  $W(k + 1, 5t)$  は

客  $k$  が  $5(\boxed{t+1})$  分待った後に A の手続き  
または  $\boxed{5}$  (66)

客  $k$  が  $5(\boxed{t-1})$  分待った後に B の手続き  
 $\boxed{7}$  (67)

を行なう確率の和であるから,

$$W(k + 1, 5t) = W(k, 5(t + 1)) \times \frac{1}{2} + W(k, 5(t - 1)) \times \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{5}$$



$k + 1 + t$  が奇数のとき ,

$$W(k, 5(t+1)) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot {}^{k-1}C_{\frac{k+t+1}{2}-1} \quad \boxed{5} \quad (68)$$

$$W(k, 5(t-1)) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot {}^{k-1}C_{\frac{k+t-1}{2}-1} \quad \boxed{7} \quad (69)$$

であるから , ⑤より

$$W(k+1, 5t) = \frac{1}{2^k} \left( {}^{k-1}C_{\frac{k+t}{2}} + {}^{k-1}C_{\frac{k+t}{2}-1} \right) \quad \boxed{6} \quad (70)$$

$$= \frac{1}{2^k} \cdot \boxed{k} C_{\frac{k+t}{2}} \quad \boxed{2} \quad \boxed{6} \quad (71) \quad (72)$$

$k + 1 + t$  が偶数のとき ,

$$W(k, 5(t+1)) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot {}^{k-1}C_{\frac{k+t+1}{2}} \quad \boxed{5} \quad (73)$$

$$W(k, 5(t-1)) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot {}^{k-1}C_{\frac{k+t-1}{2}} \quad \boxed{7} \quad (74)$$

であるから , ⑤より

$$W(k+1, 5t) = \frac{1}{2^k} \left( {}^{k-1}C_{\frac{k+t+1}{2}} + {}^{k-1}C_{\frac{k+t+1}{2}-1} \right) \quad \boxed{5} \quad (75)$$

$$= \frac{1}{2^k} \cdot \boxed{k} C_{\frac{k+t+1}{2}} \quad \boxed{2} \quad \boxed{5} \quad (76) \quad (77)$$

(iii) 最後に ,  $t = 0$  のときを調べる。

$W(k+1, 0)$  は , 客  $k$  が 5 分待った後に A の手続きを行なう確率と , 客  $k$  が待ち時間なく A の手続きを行なう確率の和なので ,

$$W(k+1, 0) = W(k, 5) \times \frac{1}{2} + W(k, 0) \times \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。

$k + 1$  が奇数のとき , ④より

$$W(k, 5) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \boxed{k-1} C_{\boxed{\frac{k}{2}}} \quad (\text{イ})$$

$$W(k, 0) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot {}^{k-1}C_{\boxed{\frac{k}{2}}} \quad (\text{ウ})$$

であるが、一般に  $p \geq q \geq 0$  を満たす整数  $p, q$  に対して  ${}_p C_q = {}_p C_{\boxed{\frac{p-q}{2}}}$  が成り立つことに注意すると、⑥より

$$W(k+1, 0) = \frac{1}{2^k} \left( {}_{k-1} C_{\boxed{\frac{k}{2}}} + {}_{k-1} C_{\frac{k}{2}-1} \right) = \frac{1}{2^k} \cdot \boxed{\frac{k}{2}} C_{\boxed{\frac{k}{2}}}$$

となる。

$k+1$  が偶数のとき、④より

$$W(k, 5) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot {}_{k-1} C_{\boxed{\frac{k+1}{2}}}$$

$$W(k, 0) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot {}_{k-1} C_{\boxed{\frac{k-1}{2}}}$$

であるから、⑥より

$$W(k+1, 0) = \frac{1}{2^k} \left( {}_{k-1} C_{\boxed{\frac{k+1}{2}}} + {}_{k-1} C_{\frac{k+1}{2}-1} \right) = \frac{1}{2^k} \cdot k C_{\boxed{\frac{k+1}{2}}}$$

となる。したがって、④は  $\boxed{t=0}$  のとき成り立つ。

(注) 途中の式変形において、 $k-1 \geq m \geq 1$  を満たす整数  $k, m$  に対して

$${}_{k-1} C_m + {}_{k-1} C_{m-1} = {}_k C_m$$

が成り立つことを用いた。