

入試 de 微積の計算練習

2002 年の入試問題(一部 2001 年)から，微分積分(数学Ⅲ)の計算だけで完結している問題を集めてみました。計算だけで入試問題が成立すること自体，数学Ⅲは計算が重要であることを物語っています。このファイルを計算力アップに役立てて下さい。(計算方法は基本解法確認演習で復習して下さい。)

1 計算せよ。

(i) $\frac{d}{dx} 2^x$

(ii) $\frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 1}$

(02 東海大 理・工)

2 次の関数を x について微分しなさい。

(a) $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{b}{x}\right)^a + \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0)$

(b) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

(02 東京理大 工)

3

(1) 次の関数の導関数を求めよ。 $\sqrt[3]{1 - 2x}$ (02 広島市大)

(2) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2 + a^2}$ の導関数は、 $f'(x) = \square$ となる。
(02 静岡理工科大)

(3) 関数 $f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
(02 東京電機大 理工)

(4) 関数 $f(x) = x^{x+1}$ ($x > 0$) を微分せよ。
(02 山形大 工)

4 m, n を正の整数とする。次の場合に分けて $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ を計算せよ。

- (1) $m \neq n$ の場合。
 (2) $m = n$ の場合。

(02 工学院大)

5

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin x} \, dx = \frac{\boxed{}}{3} + \frac{\boxed{}}{3} \sqrt{2}$ である。

(02 明治大 理工)

(2) 定積分 $\int_1^2 x\sqrt{x-1} \, dx$ の値を求めよ。

(02 東京電機大)

(3) $\int_0^1 \frac{x^2+2}{x+2} \, dx$ の値を求めよ。

(01 信州大 工)

(4) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} \, dx = \log \boxed{}$

(02 拓殖大 工)

6

(1) 不定積分 $\int xe^{3x^2} \, dx$ を求めよ。

(02 山形大 工)

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

(02 青山学院大 理工)

(3) 定積分 $\int_0^1 \frac{1}{2+3e^x+e^{2x}} \, dx$ を求めなさい。

(02 東京理大 工)

(4) 次の定積分を求めよ。 $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2+1}$

(02 広島市大)

7

$$(1) \frac{1}{(u^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\boxed{}}{(u+1)^2} + \frac{\boxed{}}{(u-1)^2} + \frac{\boxed{}}{u+1} + \frac{\boxed{}}{u-1} \right\}$$

(2) 定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$ に対し, 置換積分を用いると (1) の結果が利用でき

$$I = \boxed{} + \frac{1}{4} \log \boxed{} \text{ となることわかる。}$$

(01 明治大 理工)

8

分数関数 $f(x) = \frac{10}{16x^4 + 24x^2 + 25}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = \frac{ax+b}{4x^2+4x+5} + \frac{cx+d}{4x^2-4x+5}$ を満たす定数 a, b, c, d を求めよ。

(2) 定積分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ を求めよ。

(01 静岡大 理)

9

関数 $y = f(x)$ は媒介変数 t を用いて, $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t} \sin^2 t$ と表されている。

(1) $\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を求めよ。

(2) $\frac{dy}{dx} = 0$ となる t の値を $t \geq 0$ において求めよ。

(3) $\int_1^{e^{2\pi}} f(x) dx$ の値を求めよ。

(02 室蘭工大)

10

(i) 定積分を計算すると, $\int_0^\pi \cos^2 x \sin x dx = \square$ である。

(ii) $t = \pi - x$ において置換積分したものと合わせて考えることにより,
 $\int_0^\pi x \cos^2 x \sin x dx = \square$ である。

(02 東海大 理・工)

11 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^a \log(a^2 + x^2) dx$ (a は正の定数)

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta$

(02 横浜国大 工)

12

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} \sin x dx$ を求めると, \square となる。

(02 静岡理工科大)

(2) $\int_1^2 x^3 \log x dx = \square$

(02 愛知工大)

(3) 定積分 $\int_0^1 \log(1 + x^2) dx$ を求めよ。

(02 福島県医大)

13 次の積分を求めよ。

(i) $\int_0^1 x 2^x dx = \boxed{}$

(ii) $\int \frac{\log(\log x)}{x} dx = \boxed{}$

(02 会津大)

14 次の定積分を計算せよ。

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x^3} dx$$

(02 東京女子医大)

15 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \left| \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} (\cos x - \sin x)e^x dx \right|$ で定義する。このとき、
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ の値を求めよ。

(02 青山学院大 理工)

16 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2} \log \frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n^2} \log \frac{n+2}{n} + \cdots + \frac{n+n}{n^2} \log \frac{n+n}{n} \right)$
 を求めよ。

(02 日本女大理)

1

(i) $\frac{d}{dx} 2^x = 2^x \log 2$ (答)

(ii) $\frac{d}{dx} \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} (\sqrt{x^2+1})' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (答)

2

(a) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \log \frac{a}{b} + a \left(\frac{b}{x}\right)^{a-1} \left(-\frac{b}{x^2}\right) + b \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \cdot \frac{1}{a}$
 $= \left(\frac{a}{b}\right)^x \log \frac{a}{b} - \frac{a}{x} \left(\frac{b}{x}\right)^a + \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{b-1}$ (答)

(b) $y' = \frac{-(\sin x)\sqrt{x} - (\cos x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{2x \sin x + \cos x}{2x\sqrt{x}}$ (答)

3

(1) $(\sqrt[3]{1-2x})' = \frac{d}{dx} (1-2x)^{\frac{1}{3}} = -2 \cdot \frac{1}{3} (1-2x)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$ (答)

(2) $f'(x) = \sqrt{x^2+a^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}} \cdot (x^2+a^2)'$
 $= \sqrt{x^2+a^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}$
 $= \frac{(x^2+a^2) + x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$
 $= \frac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (答)

(3) $f'(x) = \cos \frac{x-1}{x+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$
 $= \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)' \cos \frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2} \cos \frac{x-1}{x+1}$ (答)

(4) $\log f(x) = (x+1) \log x$ の両辺を微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \log x + (x+1) \frac{1}{x} = \frac{x \log x + x + 1}{x}$$

 $\therefore f'(x) = x^{x+1} \cdot \frac{x \log x + x + 1}{x} = x^x (x \log x + x + 1)$ (答)

4

(1) $m \neq n$ の場合

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $m = n$ の場合

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right]_0^{2\pi} = \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

5

(1) 2倍角の公式と加法定理(積和の公式)より

$$\begin{aligned} \sin 4x &= 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x \cos 2x \\ &= 2 \sin x (\cos 3x + \cos x) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin x} \, dx &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x + \cos x) \, dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} \sin 3x + \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - 2 \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{4}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(注) $\sin 4x = 4 \sin x \cos x \cos 2x = 4 \sin x (1 - 2 \sin^2 x)(\sin x)'$ と変形して,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin x} \, dx = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \sin^2 x)(\sin x)' \, dx = 4 \left[\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

と計算してもよい。

$$\begin{aligned} (2) \int_1^2 x \sqrt{x-1} \, dx &= \int_1^2 \left\{ (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} \right\} \, dx \\ &= \left[\frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_0^1 \frac{x^2+2}{x+2} dx &= \int_0^1 \frac{x^2-4+6}{x+2} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x-2 + \frac{6}{x+2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 \log(x+2) \right]_0^1 = 6 \log \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx \\
 &= \left[\log(x+1) + \log(x+2) \right]_0^1 = \log 3 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{注}) \quad \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx &= \int_0^1 \frac{(x^2+3x+2)'}{x^2+3x+2} dx = \left[\log(x^2+3x+2) \right]_0^1 \\
 &\text{と計算してもよい。}
 \end{aligned}$$

6

$$(1) \quad \int x e^{3x^2} dx = \frac{1}{6} \int e^{3x^2} (3x^2)' dx = \frac{1}{6} e^{3x^2} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) (\sin x)' dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_0^1 \frac{1}{2+3e^x+e^{2x}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)(e^x+2)} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2e^{-x})'}{1+2e^{-x}} - \frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \log(1+2e^{-x}) - \log(1+e^{-x}) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\log \frac{1+2e^{-1}}{(1+e^{-1})^2} - \log \frac{3}{2^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{4e(e+2)}{3(e+1)^2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(4) $3x = \tan \theta$ により置換すると,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2 + 1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \left(\frac{1}{3} \tan \theta\right)' d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

7

(1) 部分分数分解をくり返して

$$\begin{aligned} \frac{1}{(u^2 - 1)^2} &= \left(\frac{1}{(u - 1)(u + 1)} \right)^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1} \right) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(u - 1)^2} + \frac{1}{(u + 1)^2} - \frac{2}{(u - 1)(u + 1)} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(u + 1)^2} + \frac{1}{(u - 1)^2} + \frac{1}{u + 1} - \frac{1}{u - 1} \right\} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin \theta)'}{(1 - \sin^2 \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ \frac{1}{(\sin \theta + 1)^2} + \frac{1}{(\sin \theta - 1)^2} + \frac{1}{\sin \theta + 1} - \frac{1}{\sin \theta - 1} \right\} (\sin \theta)' d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{\sin \theta + 1} - \frac{1}{\sin \theta - 1} + \log \left| \frac{\sin \theta + 1}{\sin \theta - 1} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{2}{3} + 2 + \log 3 \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \log 3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

8

$$(1) \quad 16x^4 + 24x^2 + 25 = (4x^2 + 5)^2 - 16x^2 = (4x^2 + 4x + 5)(4x^2 - 4x + 5)$$

に注意して, $f(x) = \frac{ax + b}{4x^2 + 4x + 5} + \frac{cx + d}{4x^2 - 4x + 5}$ より

$$\begin{aligned} 10 &= (ax + b)(4x^2 - 4x + 5) + (cx + d)(4x^2 + 4x + 5) \\ &= 4(a + c)x^3 + 4(-a + b + c + d)x^2 + (5a - 4b + 5c + 4d)x + 5(b + d) \end{aligned}$$

係数を比べて

$$\begin{cases} 4(a + c) = 0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ 4(-a + b + c + d) = 0 & \dots\dots \textcircled{2} \\ 5a - 4b + 5c + 4d = 0 & \dots\dots \textcircled{3} \\ 5(b + d) = 10 & \dots\dots \textcircled{4} \end{cases}$$

①より $c = -a$, ④より $d = 2 - b$ であるから, ②, ③より

$$-2a + 2 = 0, \quad -4b + 4(2 - b) = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1, \quad d = 1 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x + 1}{4x^2 + 4x + 5} dx &= \frac{1}{8} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{8x + 4}{4x^2 + 4x + 5} dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2x + 1)^2 + 4} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(4x^2 + 4x + 5)'}{4x^2 + 4x + 5} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan \theta - \frac{1}{2})'}{(2 \tan \theta)^2 + 4} d\theta \\ &= \frac{1}{8} \left[\log(4x^2 + 4x + 5) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} d\theta \\ &= \frac{\log 8 - \log 4}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} \log 2 + \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-x + 1}{4x^2 - 4x + 5} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{t + 1}{4t^2 + 4t + 5} (-t)' dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t + 1}{4t^2 + 4t + 5} dt = \frac{1}{8} \log 2 + \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

であるから, (1) および定積分の線形性より

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2 \left(\frac{1}{8} \log 2 + \frac{\pi}{32} \right) = \frac{1}{4} \log 2 + \frac{\pi}{16} \quad (\text{答})$$

9

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = 2e^{2t} \quad (\text{答})$$

$$\frac{dy}{dt} = -2e^{-2t} \sin^2 t + e^{-2t} \cdot 2 \sin t (\sin t)' = 2e^{-2t} \sin t (\cos t - \sin t) \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} \iff \sin t = 0 \quad \text{または} \quad \cos t = \sin t$$

であるから, $t \geq 0$ を考えて

$$t = n\pi \quad \text{または} \quad t = \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = 2e^{2t} > 0 \quad \text{より } t \mapsto x \text{ は } 1 \text{ 対 } 1 \text{ の関数であることに注意すると,}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{2\pi}} f(x) dx &= \int_0^\pi e^{-2t} \sin^2 t \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^\pi 2 \sin^2 t dt \\ &= \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt = \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^\pi = \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

10

$$(i) \quad \int_0^\pi \cos^2 x \sin x dx = - \int_0^\pi \cos^2 x (\cos x)' dx = - \left[\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^\pi = \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

(ii) $t = \pi - x$ すなわち $x = \pi - t$ により置換すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos^2 x \sin x dx &= \int_\pi^0 (\pi - t) \cos^2(\pi - t) \sin(\pi - t) (\pi - t)' dt \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) \cos^2 t \sin t dt \\ &= \pi \int_0^\pi \cos^2 t \sin t dt - \int_0^\pi t \cos^2 t \sin t dt \end{aligned}$$

となるから, (1) とあわせて

$$\int_0^\pi x \cos^2 x \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos^2 x \sin x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2} \quad (\text{答})$$

11

$$\begin{aligned}
(1) \int_0^a \log(a^2 + x^2) dx &= \left[x \log(x^2 + a^2) \right]_0^a - \int_0^a x \cdot \frac{2x}{x^2 + a^2} dx \\
&= a \log 2a^2 - 2 \int_0^a \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right) dx \\
&= a \log 2a^2 - 2a + 2 \int_0^a \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx \\
&= a \log 2a^2 - 2a + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} (a \tan \theta)' d\theta \\
&= a \log 2a^2 - 2a + 2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&= a \left(\log 2a^2 - 2 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(2) $\theta = \frac{\pi}{2} - t$ により置換すると,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)' dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt
\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

12

$$\begin{aligned}
(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} \sin x dx &= \left[\frac{x}{2} (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)' \cos x dx \\
&= 0 + \frac{1}{2} \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \int_1^2 x^3 \log x dx &= \left[\frac{1}{4} x^4 \log x \right]_1^2 - \frac{1}{4} \int_1^2 x^4 \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= 4 \log 2 - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^2 = 4 \log 2 - \frac{15}{16} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \int_0^1 \log(1+x^2) dx &= \left[x \log(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= \log 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \log 2 - 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} (\tan \theta)' d\theta \\
&= \log 2 - 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&= \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned}
(i) \int_0^1 x 2^x dx &= \left[x \cdot \frac{2^x}{\log 2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2^x}{\log 2} dx \\
&= \frac{2}{\log 2} - \left[\frac{2^x}{(\log 2)^2} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{(\log 2)^2} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \int \frac{\log(\log x)}{x} dx &= \int \log(\log x)(\log x)' dx \\
&= \log x \{ \log(\log x) - 1 \} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x^3} dx &= \left[-\frac{1}{2x^2} \cdot (\log x)^2 \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{2x^2} \cdot 2(\log x) \frac{1}{x} dx \\
&= -\frac{1}{2e^2} + \left[-\frac{1}{2x^2} \cdot \log x \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2e^2} + \left[-\frac{1}{4x^2} \right]_1^e \\
&= \frac{1}{4} - \frac{5}{4e^2} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

$$\boxed{15} \quad I = \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} e^x \cos x \, dx, \quad J = \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} e^x \sin x \, dx \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} I &= \left[e^x \cos x \right]_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} - \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} e^x (-\sin x) \, dx \\ &= (-e^{-\pi})^n - (-e^{-\pi})^{n+1} + J \end{aligned}$$

$$J = \left[e^x \sin x \right]_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} - \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi} e^x \cos x \, dx = -I$$

となるから,

$$a_n = |I - J| = |(-e^{-\pi})^n - (-e^{-\pi})^{n+1}| = (1 + e^{-\pi})(-e^{-\pi})^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + e^{-\pi})\{1 - (e^{-\pi})^{n+1}\}}{1 - e^{-\pi}} \\ &= \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\boxed{16} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2} \log \frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n^2} \log \frac{n+2}{n} + \cdots + \frac{n+n}{n^2} \log \frac{n+n}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2} \log \frac{n+k}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{k}{n}\right) \log \left(1 + \frac{k}{n}\right) \\ &= \int_1^2 x \log x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= 2 \log 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\ &= 2 \log 2 - \frac{3}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$