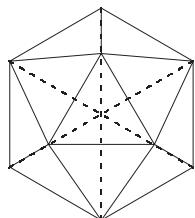


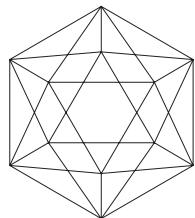
1

(1) 20枚の正三角形で多面体を作ると、1つの頂点には5面が集まることになる。

1つの面に注目すると、その面に辺で隣接する面が3つあり、その隣接面の間にもとの面と1点のみ共有する面が2つずつある。以上の10面を初めに注目した面を含む平面に正射影すると、(正六角形にも注目して)次図のようになる。



残りの10面は、正二十面体の外接球の中心に関して対称な位置にあるから、求める正射影図形 I' は次図のようになる。



(答)

(2) $n = 2$ のとき、 $F_1 = F_2$ となるのは、任意の F_1 に対して F_2 が F_1 と同じ面になるときと考えて、

$$P_0 = \frac{1}{20}$$

F_1 に対して辺で接する面は3つあるから、

$$P_1 = \frac{3}{20}$$

面の内部から面の内部へ2辺をまたぐのは、1点のみを共有する2面に限られるから、

$$P_2 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

任意の面 F_1 に対して、 $d(F_1, F) = 2$ となる面 F の隣接辺は $d(F_1, F) = 1, 2, 3$ となる面 F が1枚ずつあり、 $d(F_1, F) = 3$ となる面 F は $d(F_1, F) = 2$ となる面 F と同数であるから、 $P_3 = P_2$ である。

任意の面 F_1 に対して対面 F は $d(F_1, F) = 5$ を満たし、その対面の隣接辺 F' は $d(F_1, F') = 4$ を満たすから、

$$P_5 = \frac{1}{20}, \quad P_4 = \frac{3}{20}$$

以上をまとめて

$$P_0 = \frac{1}{20}, \quad P_1 = \frac{3}{20}, \quad P_2 = \frac{3}{10}, \quad P_3 = \frac{3}{10}, \quad P_4 = \frac{3}{20}, \quad P_5 = \frac{1}{20} \quad (\text{答})$$

(3) $n = 3$ のとき, $M \geq 3$ の余事象 :

$d(F_1, F_2) \leq 2$ かつ $d(F_1, F_3) \leq 2$ かつ $d(F_2, F_3) \leq 2$ を考慮することにする。 $d(F_1, F_2) \leq 2$, $d(F_1, F_3) \leq 2$ より,
 F_2 と F_3 は F_1 から見える側の面に限られる。

$F_1 = F_2$ のときは F_3 がこの10面のどの面でも $d(F_1, F_3) \leq 2$, $d(F_2, F_3) \leq 2$ を満たす。

$d(F_1, F_2) = 1$ を満たす F_2 に対して, $d(F_2, F_3) \leq 2$ となる面 F_3 は, F_1 の面, $d(F_1, F_3) = 1$ を満たす3枚すべて, および $d(F_1, F_3) = 2$ を満たす面が4枚ある。

$d(F_1, F_2) = 2$ を満たす F_2 に対して, $d(F_2, F_3) \leq 2$ となる面 F_3 は F_1 , および $d(F_1, F_3) = 1$ を満たす面は2枚,
 $d(F_1, F_3) = 2$ を満たす面は(自身を含めて)3枚ある。

よって,

$d(F_1, F_2) \leq 2$ かつ $d(F_1, F_3) \leq 2$ かつ $d(F_2, F_3) \leq 2$ となる確率は,

$$\begin{aligned} & P_0(P_0 + P_1 + P_2) + P_1 \times \frac{1+3+4}{20} + P_2 \times \frac{1+2+3}{20} \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{10}{20} + \frac{3}{20} \times \frac{8}{20} + \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} \\ &= \frac{10+24+36}{400} = \frac{7}{40} \end{aligned}$$

であり, $M \geq 3$ となる確率は

$$1 - \frac{7}{40} = \frac{33}{40} \quad (\text{答})$$

(4) $n \geq 3$ のとき, $m \geq 3$ であるとすれば $d(F_1, F_2) \geq 3$, $d(F_1, F_3) \geq 3$ であるから,
 F_2 と F_3 は F_1 から見えない側にある。

(i) $n = 3$ のとき, $m \geq 3$ となるのは,

• $d(F_1, F_2) = 4$ となる F_2 に対して, $d(F_1, F_3) = 3$ となる面 F_3 のうち2枚ある。

• $d(F_1, F_2) = 3$ となる F_2 に対して,

$d(F_1, F_3) = 4$, $d(F_2, F_3) = 3$ となる F_3 は1枚

$d(F_1, F_3) = 3$, $d(F_2, F_3) = 3$ となる F_3 は2枚

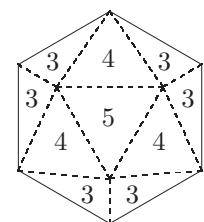
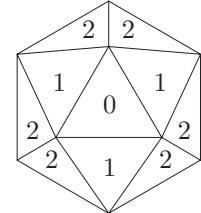
$d(F_1, F_3) = 3$, $d(F_2, F_3) = 4$ となる F_3 は1枚

であるから, $m \geq 3$ となる確率は

$$\frac{3 \times 2 + 6 \times (1+2+1)}{20^2} = \frac{30}{20^2} = \frac{3}{40}$$

(ii) $n = 4$ のとき, $m \geq 3$ となるのは, $d(F_1, F_2) = d(F_1, F_3) = d(F_1, F_4) = 3$ を満たす (F_2, F_3, F_4) の2組が条件を満たし, その順序も考えて, 確率は

$$\frac{3! \times 2}{20^3} = \frac{3}{2000}$$



(iii) $n \geq 5$ のとき, $m \geq 3$ を満たさない。

以上をまとめて, $m \geq 3$ となる確率は

$$n = 3 \text{ のとき } \frac{3}{40}, \quad n = 4 \text{ のとき } \frac{3}{2000}, \quad n \geq 5 \text{ のとき } 0 \quad (\text{答})$$

(5) $m \geq 1$ となるのは, F_1, F_2, \dots, F_n が相異なるときである。

$M \leq 4$ となるのは, $d(F_i, F_j) = 5$ となる面 F_i, F_j が存在しないときであり, F_1, F_2, \dots, F_n の中に正二十面体の対面となる 2 面を含まないときである。

$n = 10$ のとき $1 \leq m \leq M \leq 4$ となるのは, F_1, F_2, \dots, F_n が 10 組の対面の一方ずつとなる場合であるから, その確率は

$$\frac{2^{10} \times 10!}{20^{10}} = \frac{9!}{10^9} = \frac{3 \times 3 \times 7 \times 9}{2^2 \times 5^8} = \frac{567}{1562500}$$

である。

$n \geq 11$ のとき, F_1, F_2, \dots, F_n の中に少なくとも 1 組正二十面体の対面を含むから, $1 \leq m \leq M \leq 4$ とはならない。

よって, $n \geq 10$ において $1 \leq m \leq M \leq 4$ となる確率は

$$n = 10 \text{ のとき } \frac{567}{1562500}, \quad n \geq 11 \text{ のとき } 0 \quad (\text{答})$$

である。

となるのは、

$$x + y = a, \quad x - y = b \text{ がともに整数}$$

になるときであり、

$$x = \frac{a - b}{2}, \quad y = \frac{a + b}{2} \quad (a, b \text{ は整数})$$

このように表される点 $Q(x, y)$ の中で

$$|x| \leq 1 \text{ かつ } |y| \leq 1$$

であるものを求めると、

$$|a - b| \leq 2 \text{ かつ } |a + b| \leq 2 \quad (a, b \text{ は整数})$$

より

$$(a, b) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 2, 0), (0, \pm 2)$$

であり、 M に属する点 $Q(x, y)$ のうち $|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 1$ を満たすものは

$$(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), (\pm 1, \pm 1) \quad (\text{複号任意})$$

(答)

3

(1) $x = t$ における C_1 の接線

$$y = a^t \log a(x - t) + a^t$$

が原点 O を通るとすれば ,

$$0 = a^t \log a(0 - t) + a^t$$

を満たし , $a^t > 0$ より

$$0 = -t \log a + 1$$

$$\log a^t = 1 = \log e \quad \therefore a^t = e \quad \left(t = \frac{1}{\log a} \right)$$

よって , 原点から C_1 に引いた接線の方程式および接点の座標は

$$y = (e \log a)x, \quad \left(\frac{1}{\log a}, e \right) \quad (\text{答})$$

 $k = e \log a$ のとき

$$\log a = \frac{k}{e} \quad \therefore a = e^{\frac{k}{e}} \quad (\text{答})$$

(2) C_1 と C_2 は直線 $y = x$ に関して対称であるから , (1) より , 原点から C_2 に引いた接線の接点の座標は

$$\left(e, \frac{1}{\log a} \right) \quad (\text{答})$$

(3) $\triangle OPQ$ が正三角形となるのは ,

$$OP = OQ \text{ かつ } \angle POQ = 60^\circ$$

であることと同値であり , このとき P と Q は直線 $y = x$ に関して対称であるから , 直線 OP, OQ の傾きは

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} \pm \tan \frac{\pi}{6}}{1 \mp \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \quad (\text{複号同順}) \\ &= \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 \mp 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3} \mp 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{3 - 1} \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\ell : y = (2 - \sqrt{3})x, \quad m : y = (2 + \sqrt{3})x$ とおくと , ℓ と m , C_1 と C_2 はそれぞれ直線 $y = x$ に関して対称であることに注意すれば , $\triangle OPQ$ が正三角形となる P, Q の組の個数は C_1 と ℓ, m との共有点の個数に等しいことがわかる。その個数を原点から C_1 に引いた接線の傾き k で分類すると ,

$$\begin{cases} 0 < k < 2 - \sqrt{3} のとき & 4 個 \\ k = 2 - \sqrt{3} のとき & 3 個 \\ 2 - \sqrt{3} < k < 2 + \sqrt{3} のとき & 2 個 \\ k = 2 + \sqrt{3} のとき & 1 個 \\ k > 2 + \sqrt{3} のとき & 0 個 \end{cases}$$

(1) より $a = e^{\frac{k}{e}}$ であるから, $\triangle OPQ$ が正三角形となるような P, Q の組の個数は

$$\begin{cases} 1 < a < e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} のとき & 4 個 \\ a = e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} のとき & 3 個 \\ e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} < a < e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} のとき & 2 個 \\ a = e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} のとき & 1 個 \\ a > e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} のとき & 0 個 \end{cases}$$

(答)