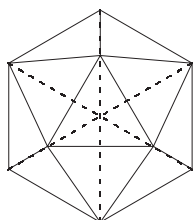
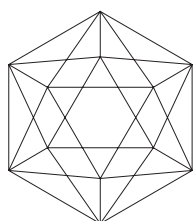


1

- (1) 20 枚の正三角形で多面体を作ると、1 つの頂点には 5 面が集まることになる。  
 1 つの面に注目すると、その面に辺で隣接する面が 3 つあり、その隣接面の間にもとの面と 1 点のみ共有する面が 2 つずつある。以上の 10 面を初めに注目した面を含む平面に正射影すると、(正六角形にも注目して) 次図のようになる。



残りの 10 面は、正二十面体の外接球の中心に関して対称な位置にあるから、求める正射影図形  $I'$  は次図のようになる。



(答)

- (2)  $n = 2$  のとき、 $F_1 = F_2$  となるのは、任意の  $F_1$  に対して  $F_2$  が  $F_1$  と同じ面になるときと考えて、

$$P_0 = \frac{1}{20}$$

$F_1$  に対して辺で接する面は 3 つあるから、

$$P_1 = \frac{3}{20}$$

面の内部から面の内部へ 2 辺をまたぐのは、1 点のみを共有する 2 面に限られるから、

$$P_2 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

任意の面  $F_1$  に対して、 $d(F_1, F) = 2$  となる面  $F$  の隣接辺は  $d(F_1, F) = 1, 2, 3$  となる面  $F$  が 1 枚ずつあり、 $d(F_1, F) = 3$  となる面  $F$  は  $d(F_1, F) = 2$  となる面  $F$  と同数であるから、 $P_3 = P_2$  である。

任意の面  $F_1$  に対して対面  $F$  は  $d(F_1, F) = 5$  を満たし、その対面の隣接辺  $F'$  は  $d(F_1, F') = 4$  を満たすから、

$$P_5 = \frac{1}{20}, \quad P_4 = \frac{3}{20}$$

以上をまとめて

$$P_0 = \frac{1}{20}, \quad P_1 = \frac{3}{20}, \quad P_2 = \frac{3}{10}, \quad P_3 = \frac{3}{10}, \quad P_4 = \frac{3}{20}, \quad P_5 = \frac{1}{20} \quad (\text{答})$$

(3)  $n = 3$  のとき,  $M \geq 3$  の余事象:

$$d(F_1, F_2) \leq 2 \text{ かつ } d(F_1, F_3) \leq 2 \text{ かつ } d(F_2, F_3) \leq 2$$

を考えることにする。 $d(F_1, F_2) \leq 2$ ,  $d(F_1, F_3) \leq 2$  より,  
 $F_2$  と  $F_3$  は  $F_1$  から見える側の面に限られる。

$F_1 = F_2$  のときは  $F_3$  がこの 10 面のどの面でも  $d(F_1, F_3) \leq 2$ ,  $d(F_2, F_3) \leq 2$  を満たす。

$d(F_1, F_2) = 1$  を満たす  $F_2$  に対して,  $d(F_2, F_3) \leq 2$  となる面  $F_3$  は,  $F_1$  の面,  $d(F_1, F_3) = 1$  を満たす 3 枚すべて, および  $d(F_1, F_3) = 2$  を満たす面が 4 枚ある。

$d(F_1, F_2) = 2$  を満たす  $F_2$  に対して,  $d(F_2, F_3) \leq 2$  となる面  $F_3$  は  $F_1$ , および  $d(F_1, F_3) = 1$  を満たす面は 2 枚,  $d(F_1, F_3) = 2$  を満たす面は (自身を含めて) 3 枚ある。

よって,

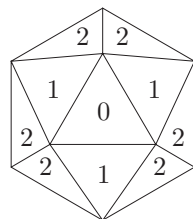
$$d(F_1, F_2) \leq 2 \text{ かつ } d(F_1, F_3) \leq 2 \text{ かつ } d(F_2, F_3) \leq 2$$

となる確率は,

$$\begin{aligned} & P_0(P_0 + P_1 + P_2) + P_1 \times \frac{1+3+4}{20} + P_2 \times \frac{1+2+3}{20} \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{10}{20} + \frac{3}{20} \times \frac{8}{20} + \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} \\ &= \frac{10+24+36}{400} = \frac{7}{40} \end{aligned}$$

であり,  $M \geq 3$  となる確率は

$$1 - \frac{7}{40} = \frac{33}{40} \quad (\text{答})$$



(4)  $n \geq 3$  のとき,  $m \geq 3$  であるとすれば  $d(F_1, F_2) \geq 3$ ,  $d(F_1, F_3) \geq 3$  であるから,  $F_2$  と  $F_3$  は  $F_1$  から見えない側にある。

(i)  $n = 3$  のとき,  $m \geq 3$  となるのは,

- $d(F_1, F_2) = 4$  となる  $F_2$  に対して,  $d(F_1, F_3) = 3$  となる面  $F_3$  のうち 2 枚ある。

- $d(F_1, F_2) = 3$  となる  $F_2$  に対して,

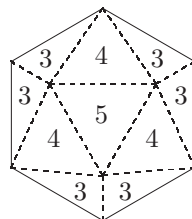
$d(F_1, F_3) = 4$ ,  $d(F_2, F_3) = 3$  となる  $F_3$  は 1 枚

$d(F_1, F_3) = 3$ ,  $d(F_2, F_3) = 3$  となる  $F_3$  は 2 枚

$d(F_1, F_3) = 3$ ,  $d(F_2, F_3) = 4$  となる  $F_3$  は 1 枚

であるから,  $m \geq 3$  となる確率は

$$\frac{3 \times 2 + 6 \times (1 + 2 + 1)}{20^2} = \frac{30}{20^2} = \frac{3}{40}$$



(ii)  $n = 4$  のとき,  $m \geq 3$  となるのは,  $d(F_1, F_2) = d(F_1, F_3) = d(F_1, F_4) = 3$  を満たす  $(F_2, F_3, F_4)$  の 2 組が条件を満たし, その順序も考えて, 確率は

$$\frac{3! \times 2}{20^3} = \frac{3}{2000}$$

(iii)  $n \geq 5$  のとき,  $m \geq 3$  を満たさない。

以上をまとめて,  $m \geq 3$  となる確率は

$$n = 3 \text{ のとき } \frac{3}{40}, \quad n = 4 \text{ のとき } \frac{3}{2000}, \quad n \geq 5 \text{ のとき } 0 \quad (\text{答})$$

(5)  $m \geq 1$  となるのは,  $F_1, F_2, \dots, F_n$  が相異なるときである。

$M \leq 4$  となるのは,  $d(F_i, F_j) = 5$  となる面  $F_i, F_j$  が存在しないときであり,  $F_1, F_2, \dots, F_n$  の中に正二十面体の対面となる 2 面を含まないときである。

$n = 10$  のとき  $1 \leq m \leq M \leq 4$  となるのは,  $F_1, F_2, \dots, F_n$  が 10 組の対面の一方ずつとなる場合であるから, その確率は

$$\frac{2^{10} \times 10!}{20^{10}} = \frac{9!}{10^9} = \frac{3 \times 3 \times 7 \times 9}{2^2 \times 5^8} = \frac{567}{1562500}$$

である。

$n \geq 11$  のとき,  $F_1, F_2, \dots, F_n$  の中に少なくとも 1 組正二十面体の対面を含むから,  $1 \leq m \leq M \leq 4$  とはならない。

よって,  $n \geq 10$  において  $1 \leq m \leq M \leq 4$  となる確率は

$$n = 10 \text{ のとき } \frac{567}{1562500}, \quad n \geq 11 \text{ のとき } 0 \quad (\text{答})$$

である。

2

$$(1) \quad \overrightarrow{OP} = m(2, 4) + n(3, 7) = (2m + 3n, 4m + 7n)$$

ここで,

$$\begin{cases} 2m + 3n = p & \dots\dots ① \\ 4m + 7n = q & \dots\dots ② \end{cases}$$

とおくと, ①  $\times 7 -$  ②  $\times 3$  より

$$2m = 7p - 3q \quad \therefore m = \frac{7p - 3q}{2}$$

②  $-$  ①  $\times 2$  より

$$n = q - 2p$$

$p, q$  がともに整数であるとき, 点  $P(p, q)$  が  $L$  に属するための条件は  $7p - 3q$  が偶数となることであり,

$$7p \equiv 3q \pmod{2}$$

であることと同値である。7 と 3 はともに奇数であるから, さらに

$$p \equiv q \pmod{2}$$

であることと同値である。したがって,

$$L = \{(p, q) \mid p, q \text{ は整数, } p \equiv q \pmod{2}\}$$

であるから,

$$P_1(1, 1) \in L, P_2(2, 1) \notin L, P_3(3, 1) \in L \quad (\text{答})$$

- (2) (1)の考察より  $L = \{(p, q) \mid p, q \text{ は整数, } p \equiv q \pmod{2}\}$  であるから,  $x$  軸上の点  $P$  が  $L$  に属するとすれば  $x$  座標は偶数である。よって, 求める点の座標は  $(2k, 0)$  ( $k$  は整数) (答)

- (3) (1)の考察より  $L = \{(p, q) \mid p, q \text{ は整数, } p \equiv q \pmod{2}\}$  であるから,  $L$  に属する原点でない点  $P$  に対して,  $|\overrightarrow{OP}|$  は

$$(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1) \text{ のいずれかで最小値 } \sqrt{2}$$

をとる。そのうちの 2 点  $A', B'$  に対して  $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}$  が  $L$  を張る場合を考えて,

$$\{A', B'\} = \{(1, 1), (-1, 1)\} \text{ または } \{(-1, 1), (-1, -1)\}$$

$$\text{または } \{(-1, -1), (1, -1)\} \text{ または } \{(1, -1), (1, 1)\}$$

のとき  $|\overrightarrow{OA'}| + |\overrightarrow{OB'}|$  は

$$\text{最小値 } 2\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

をとる。

- (4) (3)の考察より,  $L$  の任意の点  $P$  は

$$\overrightarrow{OP} = m(1, 1) + n(-1, 1) \quad (m, n \text{ は整数})$$

と表される。

$$P(x, y)$$

とおくと, 任意の整数  $m, n$  に対して

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = m(x + y) + n(-x + y) \text{ が整数}$$

となるのは,

$$x + y = a, \quad x - y = b \text{ がともに整数}$$

になるときであり,

$$x = \frac{a-b}{2}, \quad y = \frac{a+b}{2} \quad (a, b \text{ は整数})$$

このように表される点  $Q(x, y)$  の中で

$$|x| \leq 1 \text{ かつ } |y| \leq 1$$

であるものを求めると,

$$|a-b| \leq 2 \text{ かつ } |a+b| \leq 2 \quad (a, b \text{ は整数})$$

より

$$(a, b) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 2, 0), (0, \pm 2)$$

であり,  $M$  に属する点  $Q(x, y)$  のうち  $|x| \leq 1$  かつ  $|y| \leq 1$  を満たすものは

$$(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), (\pm 1, \pm 1) \quad (\text{複号任意})$$

(答)

3

(1)  $x = t$  における  $C_1$  の接線

$$y = a^t \log a(x - t) + a^t$$

が原点  $O$  を通るとすれば,

$$0 = a^t \log a(0 - t) + a^t$$

を満たし,  $a^t > 0$  より

$$0 = -t \log a + 1$$

$$\log a^t = 1 = \log e \quad \therefore a^t = e \quad \left( t = \frac{1}{\log a} \right)$$

よって, 原点から  $C_1$  に引いた接線の方程式および接点の座標は

$$y = (e \log a)x, \quad \left( \frac{1}{\log a}, e \right) \quad (\text{答})$$

 $k = e \log a$  のとき

$$\log a = \frac{k}{e} \quad \therefore a = e^{\frac{k}{e}} \quad (\text{答})$$

(2)  $C_1$  と  $C_2$  は直線  $y = x$  に関して対称であるから, (1) より, 原点から  $C_2$  に引いた接線の接点の座標は

$$\left( e, \frac{1}{\log a} \right) \quad (\text{答})$$

(3)  $\triangle OPQ$  が正三角形となるのは,

$$OP = OQ \text{ かつ } \angle POQ = 60^\circ$$

であることと同値であり, このとき  $P$  と  $Q$  は直線  $y = x$  に関して対称であるから, 直線  $OP, OQ$  の傾きは

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} \pm \tan \frac{\pi}{6}}{1 \mp \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \quad (\text{複号同順}) \\ &= \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 \mp 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3} \mp 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{3 - 1} \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\ell: y = (2 - \sqrt{3})x$ ,  $m: y = (2 + \sqrt{3})x$  とおくと,  $\ell$  と  $m$ ,  $C_1$  と  $C_2$  はそれぞれ直線  $y = x$  に関して対称であることに注意すれば,  $\triangle OPQ$  が正三角形となる  $P, Q$  の組の個数は  $C_1$  と  $\ell, m$  との共有点の個数に等しいことがわかる。その個数を原点から  $C_1$  に引いた接線の傾き  $k$  で分類すると,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < k < 2 - \sqrt{3} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ k = 2 - \sqrt{3} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 2 - \sqrt{3} < k < 2 + \sqrt{3} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ k = 2 + \sqrt{3} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ k > 2 + \sqrt{3} \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{array} \right.$$

(1) より  $a = e^{\frac{k}{e}}$  であるから,  $\triangle OPQ$  が正三角形となるような  $P, Q$  の組の個数は

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 < a < e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ a = e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} < a < e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a > e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{array} \right.$$

(答)