

1 (60 点)

関数 $f(x)$ を $x \geq 0$ に対して $f(x) = x \log(1 + x)$ と定める.

(1) 不定積分 $\int x \log(1 + x) dx$ を求めよ.

(2) $y = f(x)$ ($x \geq 0$) の逆関数を $y = g(x)$ ($x \geq 0$) とする. また a, b を $g(a) = 1, g(b) = 2$ となる実数とする. このとき定積分

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

の値を求めよ.

(3) 関数 $P(x)$ を $x \geq 0$ に対して $P(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f(t)} dt$ と定める.

このとき $y = P(x)$ について, 定義域を $x \geq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい. 関数 $R(x)$ を $x \geq 0$ に対して

$$R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)} dv$$

と定めるとき, $R(x)$ を求めよ.

2

(60 点)

空間の点 $(0, 0, 1)$ を通り $(1, -1, 0)$ を方向ベクトルとする直線を ℓ とし、
点 $(1, 0, 3)$ を通り $(0, 1, -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする。

(1) P を ℓ 上の点とし、 Q を m 上の点とする。また直線 PQ は直線 ℓ と直線 m に垂直であるとする。このとき P と Q の座標、および線分 PQ の長さを求めよ。

(2) ℓ 上に 2 点

$$A = (t, -t, 1)$$

$$B = (2 + t + \sin t, -2 - t - \sin t, 1)$$

があり、 m 上に 2 点

$$C = (1, t, 3 - 2t)$$

$$D = (1, 2 + t + \cos t, -1 - 2t - 2 \cos t)$$

があるとする。ただし、 t は実数とする。四面体 $ABCD$ の体積を $V(t)$ とする。 $V(0)$ を求めよ。

(3) t が $t \geq 0$ を動くとき、 $V(t)$ の最大値と最小値を求めよ。

3 (60 点)

$0 < p < 1$ とする. 表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1 - p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う.

- ゲームの開始段階で点数は 0 点.
- コインを投げ続け, 表が出るごとに 1 点加算し, 裏が出たときは点数はそのまま.
- 2 回続けて裏が出たらゲームは終了.

0 以上の整数 n に対し, ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする.

(1) Q_1, Q_2 を p を用いて表せ.

(2) Q_n を n と p を用いて表せ.

(3) $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

必要ならば $0 < x < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ であることを証明なしで使ってもよい.

(4) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ.

4

(60 点)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定め、数列 $\{b_n\}$ を

$$\tan b_n = \frac{1}{a_n}$$

により定める。ただし、 $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ であるものとする。

- (1) $n \geq 2$ に対して、 $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ を求めよ。
- (2) $m \geq 1$ (m は整数) に対して、 $a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$ を求めよ。
- (3) 無限級数 $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$ を求めよ。

5 (60 点)

(1) 関数

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3} \quad (t \neq 0)$$

の増減を調べ、グラフの概形をかけ.

(2) 実数 x, y, z が, 条件

$$\begin{cases} x < y < z \\ xyz \neq 0 \\ x^3 y^2 - x^3 = x^2 y^3 - y^3 \\ y^3 z^2 - y^3 = y^2 z^3 - z^3 \end{cases}$$

を満たしながら動くとき, x が取り得る値の範囲を求めよ.