

1

(1) 無理数 $x = a + b\sqrt{n}$ に対して,

$$(x - a)^2 = (b\sqrt{n})^2$$

$$\therefore x^2 - 2ax + (a^2 - b^2n) = 0$$

 $x^2 + px + q = 0$ と比べると

$$p = -2a, \quad q = a^2 - b^2n \quad (\text{答})$$

無理数 $x = a + b\sqrt{n}$ に対して,

$$x^2 + sx + t = 0$$

を満たす有理数 s, t があるとすれば,

$$x^2 + px + q = 0$$

と差をとって,

$$(s - p)x + t - q = 0$$

ここで, $s - p \neq 0$ であるとすれば,

$$x = \frac{q - t}{s - p} \text{ は有理数}$$

となって矛盾するから,

$$s - p = 0 \quad \text{このとき} \quad t - q = 0 \quad \therefore s = p, \quad t = q$$

よって, p, q は a, b, n に対して一意に定まる。 (証明おわり)(2) 無理数 $x = a + b\sqrt[3]{n}$ に対して,

$$(x - a)^3 = (b\sqrt[3]{n})^3$$

$$\therefore x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 - b^3n = 0$$

(1) と同様

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad \dots\dots ①$$

と比べると

$$p = -3a, \quad q = 3a^2, \quad r = -a^3 - b^3n \quad (\text{答})$$

無理数 $x = a + b\sqrt[3]{n}$ に対して,

$$x^3 + sx^2 + tx + u = 0 \quad \dots\dots ②$$

を満たす有理数 s, t, u があるとすれば, ② - ① より

$$(s - p)x^2 + (t - q)x + u - r = 0 \quad \dots\dots ③$$

ここで, $s - p \neq 0$ であるとすれば,

$$x^2 + cx + d = 0 \quad \left(c = \frac{t - q}{s - p}, \quad d = \frac{u - r}{s - p} \right) \quad \dots\dots ④$$

が得られ, x の恒等式

$$\begin{aligned} & x^3 + px^2 + qx + r \\ &= (x^2 + cx + d)(x - c + p) + (c^2 - cp - d + q)x + d(c - p) + r \\ & \dots\dots ⑤ \end{aligned}$$

が成り立つから, ①, ④ より

$$(c^2 - cp - d + q)x + d(c - p) + r = 0$$

$c^2 - cp - d + q$ および $d(c - p) + r$ は有理数であり、 x は無理数であるから、(1)と同様にして、

$$c^2 - cp - d + q = 0 \quad \text{かつ} \quad d(c - p) + r = 0$$

が導かれる。よって、⑤の恒等式は

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x^2 + cx + d)(x - c + p)$$

となって、①は $x = c - p$ を解に持つことになるが、①は $(x - a)^3 = b^3n$ を書き換えたものであるから、

$$(c - p - a)^3 = b^3n \quad (b \neq 0)$$

を満たす。ところが、これは n が有理数の 3 乗であることを表し、 $x = a + b\sqrt[3]{n}$ が無理数であることと矛盾する。ゆえに、

$$s = p$$

が成り立ち、③より

$$(t - q)x + u - r = 0$$

が得られる。このとき (1) と同様にして

$$t = q, \quad u = r$$

もいえるから、 p, q, r は a, b, n に対して一意に定まる。 (証明おわり)

(注) (1), (2) それぞれにおいて、前半の計算だけで一意性が示されたと誤解されるかもしれないが、それだけでは $x = a + b\sqrt{n}$ および $x = a + b\sqrt[3]{n}$ を代入して成り立つ (方程式の解である) ことを述べただけであり、 p, q, r が a, b, n から一意に定まるかどうかは考慮されていない。

論点さえわかれば、次のような別解も考えられる。 x が無理数となるような与えられた有理数 a, b, c に対して、 p, q, r についての方程式を (必要十分で) 解くだけで一意性も示されることになる。

〔別解〕

(1) $x = a + b\sqrt{n}$ は無理数であるから、 $b \neq 0$ であり、 $\sqrt{n}$ は無理数である。

$$(a + b\sqrt{n})^2 + p(a + b\sqrt{n}) + q = 0$$

を p, q についての方程式として (必要十分で) 解くことにより、有理数 p, q が a, b, n から一意に定まることを示す。展開して $\sqrt{n}$ について整理すると

$$a^2 + 2ab\sqrt{n} + b^2n + p(a + b\sqrt{n}) + q = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2n + ap + q + b(2a + p)\sqrt{n} = 0$$

ここで $b(2a + p) \neq 0$ であるとすれば、 $\sqrt{n} = -\frac{a^2 + b^2n + ap + q}{b(2a + p)}$ が有理数となって矛盾するから、

$$b(2a + p) = 0 \quad \dots\dots ①$$

このとき

$$a^2 + b^2n + ap + q = 0 \quad \dots\dots ②$$

① および $b \neq 0$ より

$$p = -2a \quad (\text{答})$$

であり、有理数の条件を満たす。さらに、②より

$$q = -a^2 - b^2 n - a(-2a) = a^2 - b^2 n \quad (\text{答})$$

であり、 p, q は a, b, n に対して一意に定まる。 (証明おわり)

(2) $x = a + b\sqrt[3]{n}$ は無理数であるから、 $b \neq 0$ であり、 $\sqrt[3]{n}$ は無理数である。

$$(a + b\sqrt[3]{n})^3 + p(a + b\sqrt[3]{n})^2 + q(a + b\sqrt[3]{n}) + r = 0$$

を p, q, r についての方程式として (必要十分で) 解くことにより、有理数 p, q, r が a, b, n から一意に定まることを示す。展開、整理すると

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2bn^{\frac{1}{3}} + 3ab^2n^{\frac{2}{3}} + b^3n + p(a^2 + 2abn^{\frac{1}{3}} + b^2n^{\frac{2}{3}}) \\ + q(a + bn^{\frac{1}{3}}) + r = 0 \\ a^3 + pa^2 + qa + r + b^3n + b(3a^2 + 2ap + q)n^{\frac{1}{3}} \\ + b^2(3a + p)n^{\frac{2}{3}} = 0 \end{aligned}$$

ここで、

$$s = a^3 + pa^2 + qa + r + b^3n$$

$$t = b(3a^2 + 2ap + q)$$

$$u = b^2(3a + p)$$

とおくと、

$$s + tn^{\frac{1}{3}} + un^{\frac{2}{3}} = 0 \quad \dots\dots ①$$

両辺に $n^{\frac{1}{3}}$ をかけて

$$sn^{\frac{1}{3}} + tn^{\frac{2}{3}} + un = 0 \quad \dots\dots ②$$

① $\times t -$ ② $\times u$ より

$$st - u^2n + (t^2 - su)n^{\frac{1}{3}} = 0 \quad \dots\dots ③$$

ここで、 $t^2 - su \neq 0$ とすれば $n^{\frac{1}{3}} = \frac{u^2n - st}{t^2 - su}$ は有理数となって矛盾するから、

$$t^2 - su = 0 \quad \dots\dots ④$$

このとき、③より

$$st - u^2n = 0 \quad \dots\dots ⑤$$

④かつ⑤より

$$stu = t^3 = u^3n$$

ここで、 $u \neq 0$ とすると $\sqrt[3]{n} = tu^{-1}$ は有理数となって矛盾するから、

$$u = b^2(3a + p) = 0 \quad \dots\dots ⑥$$

このとき、④より

$$t = b(3a^2 + 2ap + q) = 0 \quad \dots\dots ⑦$$

であり、①より

$$s = a^3 + pa^2 + qa + r + b^3n = 0 \quad \dots\dots ⑧$$

$b \neq 0$ であるから、⑥より

$$p = -3a \quad (\text{答})$$

⑦に代入して, $b \neq 0$ も考えると

$$q = -3a^2 - 2a(-3a) = 3a^2 \quad (\text{答})$$

⑧より

$$r = -a^3 + 3a \cdot a^2 - 3a^2 \cdot a - b^3 n = -a^3 - b^3 n \quad (\text{答})$$

であり, p, q, r は a, b, n に対して一意に定まる。 (証明おわり)

2

(1) $1 \leq r \leq n-1$ をみたす整数 r に対して,

$$\begin{aligned}
{}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} \\
&= (n-1)! \times \frac{(n-r)+r}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= {}_nC_r \quad (\text{証明おわり})
\end{aligned}$$

(別法) 定性的に考えて, n 個のもののから r 個のものを取り出す場合の数 ${}_nC_r$ を, 特定の 1 個を r 個に含めない場合の ${}_{n-1}C_r$ 通りと含める場合の ${}_{n-1}C_{r-1}$ 通りをあわせたものと考えて,

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} \quad (\text{証明おわり})$$

前半で示した関係式を用いて

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^n k {}_nC_r &= {}_rC_r + \sum_{k=r+1}^n k {}_nC_r \\
&= 1 + \sum_{k=r+1}^n ({}_{k+1}C_{r+1} - {}_kC_{r+1}) \\
&= 1 + ({}_{n+1}C_{r+1} - {}_{r+1}C_{r+1}) \\
&= {}_{n+1}C_{r+1} \quad (\text{証明おわり})
\end{aligned}$$

(別法) 前半で示した関係式の使い方に気づかなかった場合は, 二項定理を用いて多項式の係数を比べてもよい。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^n k {}_nC_r &= {}_rC_r + {}_{r+1}C_r + \cdots + {}_nC_r \\
&= [(x+1)^r + (x+1)^{r+1} + \cdots + (x+1)^n \text{ の } x^r \text{ の係数}] \\
&= \left[\frac{(x+1)^r \{(x+1)^{n-r+1} - 1\}}{(x+1) - 1} \text{ の } x^r \text{ の係数} \right] \\
&= [(x+1)^{n+1} - (x+1)^r \text{ の } x^{r+1} \text{ の係数}] \\
&= {}_{n+1}C_{r+1} \quad (\text{証明おわり})
\end{aligned}$$

(2) $w = n - (x + y + z)$ とおくと,

$$x + y + z + w = n$$

を満たす正の整数 x, y, z, w の組の数を求めることと同じであるから, 見た目に区別のつかない n 個のものを一列に並べ, その隙間 $n-1$ ヶ所のうち 3ヶ所を選んで仕切りを置くと考えて,

$${}_{n-1}C_3 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \quad (\text{答})$$

(別解) 空間領域 $x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < n$ における格子点を数える
と考えるとよい。 z ($1 \leq z \leq n-3$) を固定して

$$x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq n - 1 - z$$

を満たす整数 x, y の組を数えると,

$$\sum_{k=1}^{n-2-z} k = \frac{1}{2}(n-2-z)(n-1-z)$$

次に, z について集計することにより, 求める格子点 (x, y, z) の個数は

$$\begin{aligned} & \sum_{z=1}^{n-3} \frac{1}{2}(n-2-z)(n-1-z) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-3} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-3} \frac{1}{3} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{6} \{(n-3)(n-2)(n-1) - 0 \cdot 1 \cdot 2\} \\ &= \frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $x + y + z = 3n$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) において $0 < x < y < z$ の余事象から数えていくことにする。

(i) $x = y = z$ のとき

$$(x, y, z) = (n, n, n); 1 \text{ 通り}$$

(ii) $x = y \neq z$ となる (x, y, z) を列挙すると, n が奇数のとき

$$(x, y, z) = (1, 1, 3n-2), (2, 2, 3n-4), \dots, \left(\frac{3n-1}{2}, \frac{3n-1}{2}, 1\right)$$

n が偶数のとき

$$(x, y, z) = (1, 1, 3n-2), (2, 2, 3n-4), \dots, \left(\frac{3n-2}{2}, \frac{3n-2}{2}, 2\right)$$

$y = z \neq x, z = x \neq y$ の場合も同様であるから, x, y, z のうちちょうど 2 つが等しくなるような (x, y, z) の個数は

$$\begin{cases} n \text{ が奇数のとき} & 3\left(\frac{3n-1}{2} - 1\right) = \frac{3(3n-3)}{2} \\ n \text{ が偶数のとき} & 3\left(\frac{3n-2}{2} - 1\right) = \frac{3(3n-4)}{2} \end{cases}$$

である。ここで, $n \geq 4$ より

$$\frac{3n-2}{2} - n = \frac{n-2}{2} \geq 1$$

であるから, $x = y = z = n$ の場合を除外しなければならないことに注意する。

(iii) x, y, z が相異なる場合の個数は, n が奇数のとき

$$\begin{aligned}
 {}_{3n-1}C_2 - 1 - \frac{3(3n-3)}{2} &= \frac{(3n-1)(3n-2) - 2 - (9n-9)}{2} \\
 &= \frac{9n^2 - 18n + 9}{2}
 \end{aligned}$$

n が偶数のとき

$$\begin{aligned}
 {}_{3n-1}C_2 - 1 - \frac{3(3n-4)}{2} &= \frac{(3n-1)(3n-2) - 2 - (9n-12)}{2} \\
 &= \frac{9n^2 - 18n + 12}{2}
 \end{aligned}$$

(iv) $x + y + z = 3n$ かつ $0 < x < y < z$ となるのは, (iii) で求めた数を $3! = 6$ で割ったものであるから, 求める個数は

$$\begin{cases} n \text{ が奇数のとき} & \frac{3n^2 - 6n + 3}{4} \\ n \text{ が偶数のとき} & \frac{3n^2 - 6n + 4}{4} \end{cases} \quad (\text{答})$$

3

(1) AB の中点が C, AC の中点が P であるから, P は AB を 1 : 3 に内分する。

分点公式より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1+3} = \frac{3}{4}(a, 0) + \frac{1}{4}(0, b)$$

であるから,

$$P\left(\frac{3}{4}a, \frac{1}{4}b\right) \quad (\text{答})$$

 $\triangle OBC$ の外接円の方程式を, O, B を通る円として

$$x^2 + y(y-b) + kx = 0 \quad (k \text{ は定数}) \quad \dots\dots ①$$

とおき, 点 C を通ることより k の値を求めると

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b}{2}\left(\frac{b}{2} - b\right) + k \cdot \frac{a}{2} &= 0 \\ \frac{a}{2}k &= \frac{b^2 - a^2}{4} \quad \therefore k = \frac{b^2 - a^2}{2a} \end{aligned}$$

よって, $\triangle OBC$ の外接円の方程式は

$$x^2 - \frac{a^2 - b^2}{2a}x + y^2 - by = 0 \quad \dots\dots ②$$

この円の中心が Q であるから

$$Q\left(\frac{a^2 - b^2}{4a}, \frac{b}{2}\right) \quad (\text{答})$$

(注) ①の段階で 2 点以上を通ることを保証しているので, ②が円の方程式を表していることのチェックは不要である。

(2) $\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$ であるから, 点 R は PQ を直径とする円

$$\left(x - \frac{3}{4}a\right)\left(x - \frac{a^2 - b^2}{4a}\right) + \left(y - \frac{b}{4}\right)\left(y - \frac{b}{2}\right) = 0$$

と x 軸との交点である。 $y = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{3a^2 + a^2 - b^2}{4a}x + \frac{3(a^2 - b^2)}{16} + \frac{b^2}{8} &= 0 \\ x^2 - \frac{4a^2 - b^2}{4a}x + \frac{3a^2 - b^2}{16} &= 0 \\ \left(x - \frac{4a^2 - b^2}{8a}\right)^2 &= \left(\frac{4a^2 - b^2}{8a}\right)^2 - \frac{3a^2 - b^2}{16} \\ &= \frac{16a^4 - 8a^2b^2 + b^4 - 4a^2(3a^2 - b^2)}{64a^2} \\ &= \frac{4a^4 - 4a^2b^2 + b^4}{64a^2} \\ &= \left(\frac{2a^2 - b^2}{8a}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{4a^2 - b^2}{8a} \pm \frac{2a^2 - b^2}{8a} = \frac{3a^2 - b^2}{4a}, \frac{a}{4}$$

点 R の座標は

$$\left(\frac{3a^2 - b^2}{4a}, 0 \right) \text{ または } \left(\frac{a}{4}, 0 \right) \quad (\text{答})$$

(3) $R\left(\frac{a}{4}, 0\right)$ のとき,

$$\overrightarrow{RP} = \left(\frac{3}{4}a, \frac{1}{4}b \right) - \left(\frac{a}{4}, 0 \right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{4} \right)$$

$$\overrightarrow{RQ} = \left(\frac{a^2 - b^2}{4a}, \frac{b}{2} \right) - \left(\frac{a}{4}, 0 \right) = \left(-\frac{b^2}{4a}, \frac{b}{2} \right) = \frac{b}{a} \left(-\frac{b}{4}, \frac{a}{2} \right)$$

より

$$\angle PRQ = \frac{\pi}{2}, \quad |\overrightarrow{RQ}| = \frac{b}{a} |\overrightarrow{RP}|$$

であるから,

$$\triangle PQR \sim \triangle ABO$$

となる。

$R\left(\frac{3a^2 - b^2}{4a}, 0\right)$ のとき,

$$\overrightarrow{RP} = \left(\frac{3}{4}a, \frac{1}{4}b \right) - \left(\frac{3a^2 - b^2}{4a}, 0 \right) = \left(\frac{b^2}{4a}, \frac{b}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RQ} &= \left(\frac{a^2 - b^2}{4a}, \frac{b}{2} \right) - \left(\frac{3a^2 - b^2}{4a}, 0 \right) = \left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \\ &= \frac{2a}{b} \left(-\frac{b}{4}, \frac{b^2}{4a} \right) \end{aligned}$$

であり, $\triangle PQR \sim \triangle ABO$ でも $\triangle QPR \sim \triangle ABO$ でもない。

以上より, $\triangle PQR \sim \triangle ABO$, $\triangle QPR \sim \triangle ABO$ の少なくとも一方が成り立つのは

$$R\left(\frac{a}{4}, 0\right) \quad (\text{答})$$

のときだけである。

4

(1) 点 $e\left(\frac{n-1}{3}\pi\right)$ と点 $e\left(\frac{n}{3}\pi\right)$ を結ぶ線分の中点を表す複素数を μ_n とすると,

$$\begin{aligned}\mu_n &= \frac{1}{2} \left\{ e\left(\frac{n-1}{3}\pi\right) + e\left(\frac{n}{3}\pi\right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} e\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{3}\pi + \frac{n}{3}\pi\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)\end{aligned}$$

ℓ_n の方向ベクトルを表す複素数は, 図形的に考えて

$$e\left(\frac{n-1}{3}\pi\right) - e\left(\frac{n}{3}\pi\right) = e\left(\frac{n-1}{3}\pi\right) \cdot e\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e\left(\frac{n-2}{3}\pi\right)$$

であり, ℓ_n に関する対称移動は,

- $-\mu_n$ だけ平行移動
- 原点のまわりに $-\frac{n-2}{3}\pi$ だけ回転
- 実軸に関して対称移動
- 原点のまわりに $\frac{n-2}{3}\pi$ だけ回転
- $+\mu_n$ だけ平行移動

をこの順で合成したものであるから,

$$\begin{aligned}z &\longmapsto z - \mu_n \\ &\longmapsto (z - \mu_n) \cdot e\left(-\frac{n-2}{3}\pi\right) \\ &\longmapsto \overline{(z - \mu_n) \cdot e\left(-\frac{n-2}{3}\pi\right)} = (\bar{z} - \overline{\mu_n}) \cdot e\left(\frac{n-2}{3}\pi\right) \\ &\longmapsto (\bar{z} - \overline{\mu_n}) \cdot e\left(\frac{n-2}{3}\pi\right) \cdot e\left(\frac{n-2}{3}\pi\right) \\ &\longmapsto R_n(z) = (\bar{z} - \overline{\mu_n}) \cdot e\left(\frac{2n-4}{3}\pi\right) + \mu_n \\ &= e\left(\frac{2n-4}{3}\pi\right) \cdot \bar{z} - \frac{\sqrt{3}}{2} e\left(-\frac{2n-1}{6}\pi\right) \cdot e\left(\frac{2n-4}{3}\pi\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}e\left(-\frac{2n-1}{6}\pi\right) \cdot e\left(\frac{2n-4}{3}\pi\right) &= e\left(-\frac{2n-1}{6}\pi + \frac{2n-4}{3}\pi\right) \\ &= e\left(\frac{2n-7}{6}\pi\right) \\ &= e\left(\frac{2n-1}{6}\pi - \pi\right) \\ &= -e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)\end{aligned}$$

であるから,

$$R_n(z) = e\left(\frac{2n-4}{3}\pi\right)\bar{z} + \sqrt{3}e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right)$$

よって, $R_n(z) = e(\theta_1)\bar{z} + \sqrt{3}e(\theta_2)$ をみたす θ_1, θ_2 は

$$\theta_1 = \frac{2n-4}{3}\pi + 2k_1\pi, \quad \theta_2 = \frac{2n-1}{6}\pi + 2k_2\pi \quad (k_1, k_2 \text{ は任意整数})$$

(答)

(2) (1) より

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= R_n(z_n) = e\left(\frac{2n-4}{3}\pi\right)\bar{z}_n + \sqrt{3}e\left(\frac{2n-1}{6}\pi\right) \\ z_{n+2} &= e\left(\frac{2n-2}{3}\pi\right)\overline{z_{n+1}} + \sqrt{3}e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right) \\ &= e\left(\frac{2n-2}{3}\pi\right)\left\{e\left(-\frac{2n-4}{3}\pi\right)z_n + \sqrt{3}e\left(-\frac{2n-1}{6}\pi\right)\right\} \\ &\quad + \sqrt{3}e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right) \\ &= e\left(\frac{2}{3}\pi\right)z_n + \sqrt{3}e\left(\frac{2n-3}{6}\pi\right) + \sqrt{3}e\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right) \\ &= \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2 z_n + \sqrt{3}\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n e\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n e\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2 z_n + \sqrt{3}\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n \left(-i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2 z_n + \sqrt{3}\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n e\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = e\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ とおくと,}$$

$$\frac{z_{n+2}}{\alpha^{n+2}} = \frac{z_n}{\alpha^n} + \sqrt{3}e\left(-\frac{2}{3}\pi\right)e\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{z_n}{\alpha^n} + \sqrt{3}e\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$$

(i) $n = 2m - 1$ (奇数) のとき, $\left\{\frac{z_n}{\alpha^n}\right\}$ は初項 $\frac{z_1}{\alpha}$, 公差 $\sqrt{3}e\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ の等差数列であるから,

$$\begin{aligned} \frac{z_n}{\alpha^n} &= \frac{z_1}{\alpha} + \sqrt{3}e\left(-\frac{5}{6}\pi\right)(m-1) \\ &= \frac{z_1}{\alpha} + \sqrt{3}e\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\frac{n-1}{2} \\ &= \frac{a+bi}{\alpha} + \sqrt{3} \cdot \frac{-i}{\alpha} \cdot \frac{n-1}{2} \\ \therefore z_n &= \alpha^{n-1} \left\{ a + bi - \frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)i \right\} \end{aligned}$$

(ii) $n = 2m$ (偶数) のとき, $n-1$ (奇数) に (i) を適用すると

$$z_{n-1} = \alpha^{n-2} \left\{ a + bi - \frac{\sqrt{3}}{2}(n-2)i \right\}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
 z_n &= R_{n-1}(z_{n-1}) \\
 &= e\left(\frac{2n-6}{3}\pi\right)\overline{z_{n-1}} + \sqrt{3} e\left(\frac{2n-3}{6}\pi\right) \\
 &= \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{2n} \cdot \left\{e\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-2} \left\{a - bi + \frac{\sqrt{3}}{2}(n-2)i\right\} \\
 &\quad + \sqrt{3} \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n \cdot e\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2} \left\{a - bi + \frac{\sqrt{3}}{2}(n-2)i + \sqrt{3} e\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2} \left\{a - bi + \frac{\sqrt{3}}{2}(n-2)i + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right\} \\
 &= \left\{e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n+2} \left\{a - \frac{3}{2} - bi + \frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)i\right\}
 \end{aligned}$$

以上をまとめて,

$$z_n = \begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1} \left\{a + bi - \frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)i\right\} & (n \text{ が奇数}) \\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n+2} \left\{a - \frac{3}{2} - bi + \frac{\sqrt{3}}{2}(n-1)i\right\} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

(答)

5

$$\begin{aligned}\int_0^{100} x^k e^{-x} \sin^2(nx) dx &= \int_0^{100} x^k e^{-x} \cdot \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{100} x^k e^{-x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{100} x^k e^{-x} \cos 2nx dx\end{aligned}$$

$$I_k = \frac{1}{2} \int_0^{100} x^k e^{-x} dx \text{ とおくと,}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{100} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \left[-e^{-x} \right]_0^{100} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^{100}} \right)$$

と定めることにより, $k \geq 1$ のとき, 部分積分法を用いて漸化式

$$\begin{aligned}I_k &= \frac{1}{2} \left[x^k (-e^{-x}) \right]_0^{100} - \frac{1}{2} \int_0^{100} kx^{k-1} (-e^{-x}) dx \\ &= -\frac{100^k}{2e^{100}} + kI_{k-1}\end{aligned}$$

が得られるから,

$$\begin{aligned}I_1 &= -\frac{100}{2e^{100}} + I_0 < I_0 < \frac{1}{2} \\ I_2 &= -\frac{100^2}{2e^{100}} + 2I_1 < 2I_1 < 1 \\ I_3 &= -\frac{100^3}{2e^{100}} + 3I_2 < 3I_2 < 3 \\ I_4 &= -\frac{100^4}{2e^{100}} + 4I_3 \\ &= -\frac{100^4}{2e^{100}} + 4 \left(-\frac{100^3}{2e^{100}} + 3I_2 \right) \\ &= -\frac{50 \cdot 100^3}{e^{100}} - \frac{2 \cdot 100^3}{e^{100}} + 12 \left(-\frac{5000}{e^{100}} + 2I_1 \right) \\ &= -\frac{52 \cdot 100^3}{e^{100}} + 12 \left(-\frac{5000}{e^{100}} - \frac{100}{e^{100}} + 2I_0 \right) \\ &= -\frac{52000000}{e^{100}} + 12 \left(-\frac{5100}{e^{100}} + 1 - \frac{1}{e^{100}} \right) \\ &= 12 - \frac{52061212}{e^{100}} > 12 - \frac{10^8}{e^{100}} \\ &> 12 - \frac{10^8}{2^{100}} = 12 - \frac{10^8}{1024^{10}} \\ &> 12 - \frac{10^8}{(10^3)^{10}} = 12 - 10^{-22}\end{aligned}$$

$$J_n = \int_0^{100} x^k e^{-x} \cos 2nx dx \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned}
J_n &= \left[x^k e^{-x} \cdot \frac{1}{2n} \sin 2nx \right]_0^{100} - \frac{1}{2n} \int_0^{100} (x^k e^{-x})' \sin 2nx \, dx \\
&= \frac{100^k e^{-100} \sin 2000n}{2n} - \frac{1}{2n} \int_0^{100} (x^k e^{-x})' \sin 2nx \, dx
\end{aligned}$$

三角不等式, 定積分の性質, および $|\sin \theta| \leq 1$ より

$$\begin{aligned}
|J_n| &\leq \frac{1}{2n} |100^k e^{-100} \sin 2000n| + \frac{1}{2n} \left| \int_0^{100} (x^k e^{-x})' \sin 2nx \, dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2n} |100^k e^{-100} \sin 2000n| + \frac{1}{2n} \int_0^{100} |(x^k e^{-x})' \sin 2nx| \, dx \\
&\leq \frac{100^k e^{-100}}{2n} + \frac{1}{2n} \int_0^{100} |(x^k e^{-x})'| \, dx \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{100} x^k e^{-x} \sin^2(nx) \, dx = I_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

であり, $I_1 < \frac{1}{2}$, $I_2 < 1$, $I_3 < 3$, $I_4 > 12 - 10^{-22} > 11$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{100} x^k e^{-x} \sin^2(nx) \, dx > 10$$

をみたす最小正の整数 k は

$$k = 4 \quad (\text{答})$$

である。