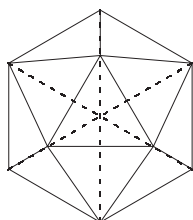
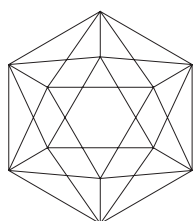


1

- (1) 20 枚の正三角形で多面体を作ると，1 つの頂点には 5 面が集まることになる。
 1 つの面に注目すると，その面に辺で隣接する面が 3 つあり，その隣接面の間にもとの面と 1 点のみ共有する面が 2 つずつある。以上の 10 面を初めに注目した面を含む平面に正射影すると，(正六角形にも注目して) 次図のようになる。



残りの 10 面は，正二十面体の外接球の中心に関して対称な位置にあるから，求める正射影図形 I' は次図のようになる。



(答)

- (2) $n = 2$ のとき， $F_1 = F_2$ となるのは，任意の F_1 に対して F_2 が F_1 と同じ面になるときと考えて，

$$P_0 = \frac{1}{20}$$

F_1 に対して辺で接する面は 3 つあるから，

$$P_1 = \frac{3}{20}$$

面の内部から面の内部へ 2 辺をまたぐのは，1 点のみを共有する 2 面に限られるから，

$$P_2 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

任意の面 F_1 に対して， $d(F_1, F) = 2$ となる面 F の隣接辺は $d(F_1, F) = 1, 2, 3$ となる面 F が 1 枚ずつあり， $d(F_1, F) = 3$ となる面 F は $d(F_1, F) = 2$ となる面 F と同数であるから， $P_3 = P_2$ である。

任意の面 F_1 に対して対面 F は $d(F_1, F) = 5$ を満たし，その対面の隣接辺 F' は $d(F_1, F') = 4$ を満たすから，

$$P_5 = \frac{1}{20}, \quad P_4 = \frac{3}{20}$$

以上をまとめて

$$P_0 = \frac{1}{20}, \quad P_1 = \frac{3}{20}, \quad P_2 = \frac{3}{10}, \quad P_3 = \frac{3}{10}, \quad P_4 = \frac{3}{20}, \quad P_5 = \frac{1}{20} \quad (\text{答})$$

(3) $n = 3$ のとき， $M \geq 3$ の余事象：

$$d(F_1, F_2) \leq 2 \text{ かつ } d(F_1, F_3) \leq 2 \text{ かつ } d(F_2, F_3) \leq 2$$

を考えることにする。 $d(F_1, F_2) \leq 2$ ， $d(F_1, F_3) \leq 2$ より， F_2 と F_3 は F_1 から見える側の面に限られる。

$F_1 = F_2$ のときは F_3 がこの 10 面のどの面でも $d(F_1, F_3) \leq 2$ ， $d(F_2, F_3) \leq 2$ を満たす。

$d(F_1, F_2) = 1$ を満たす F_2 に対して， $d(F_2, F_3) \leq 2$ となる面 F_3 は， F_1 の面， $d(F_1, F_3) = 1$ を満たす 3 枚すべて，および $d(F_1, F_3) = 2$ を満たす面が 4 枚ある。

$d(F_1, F_2) = 2$ を満たす F_2 に対して， $d(F_2, F_3) \leq 2$ となる面 F_3 は F_1 ，および $d(F_1, F_3) = 1$ を満たす面は 2 枚， $d(F_1, F_3) = 2$ を満たす面は (自身を含めて) 3 枚ある。

よって，

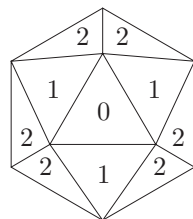
$$d(F_1, F_2) \leq 2 \text{ かつ } d(F_1, F_3) \leq 2 \text{ かつ } d(F_2, F_3) \leq 2$$

となる確率は，

$$\begin{aligned} & P_0(P_0 + P_1 + P_2) + P_1 \times \frac{1+3+4}{20} + P_2 \times \frac{1+2+3}{20} \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{10}{20} + \frac{3}{20} \times \frac{8}{20} + \frac{6}{20} \times \frac{6}{20} \\ &= \frac{10+24+36}{400} = \frac{7}{40} \end{aligned}$$

であり， $M \geq 3$ となる確率は

$$1 - \frac{7}{40} = \frac{33}{40} \quad (\text{答})$$



(4) $n \geq 3$ のとき， $m \geq 3$ であるとすれば $d(F_1, F_2) \geq 3$ ， $d(F_1, F_3) \geq 3$ であるから， F_2 と F_3 は F_1 から見えない側にある。

(i) $n = 3$ のとき， $m \geq 3$ となるのは，

- $d(F_1, F_2) = 4$ となる F_2 に対して， $d(F_1, F_3) = 3$ となる面 F_3 のうち 2 枚ある。

- $d(F_1, F_2) = 3$ となる F_2 に対して，

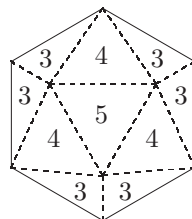
$d(F_1, F_3) = 4$ ， $d(F_2, F_3) = 3$ となる F_3 は 1 枚

$d(F_1, F_3) = 3$ ， $d(F_2, F_3) = 3$ となる F_3 は 2 枚

$d(F_1, F_3) = 3$ ， $d(F_2, F_3) = 4$ となる F_3 は 1 枚

であるから， $m \geq 3$ となる確率は

$$\frac{3 \times 2 + 6 \times (1 + 2 + 1)}{20^2} = \frac{30}{20^2} = \frac{3}{40}$$



(ii) $n = 4$ のとき， $m \geq 3$ となるのは， $d(F_1, F_2) = d(F_1, F_3) = d(F_1, F_4) = 3$ を満たす (F_2, F_3, F_4) の 2 組が条件を満たし，その順序も考えて，確率は

$$\frac{3! \times 2}{20^3} = \frac{3}{2000}$$

(iii) $n \geq 5$ のとき， $m \geq 3$ を満たさない。

以上をまとめて， $m \geq 3$ となる確率は

$$n = 3 \text{ のとき } \frac{3}{40}, \quad n = 4 \text{ のとき } \frac{3}{2000}, \quad n \geq 5 \text{ のとき } 0 \quad (\text{答})$$

(5) $m \geq 1$ となるのは， $F_1, F_2, \dots, F_n$ が相異なるときである。

$M \leq 4$ となるのは， $d(F_i, F_j) = 5$ となる面 F_i, F_j が存在しないときであり， $F_1, F_2, \dots, F_n$ の中に正二十面体の対面となる 2 面を含まないときである。

$n = 10$ のとき $1 \leq m \leq M \leq 4$ となるのは， $F_1, F_2, \dots, F_n$ が 10 組の対面の一方ずつとなる場合であるから，その確率は

$$\frac{2^{10} \times 10!}{20^{10}} = \frac{9!}{10^9} = \frac{3 \times 3 \times 7 \times 9}{2^2 \times 5^8} = \frac{567}{1562500}$$

である。

$n \geq 11$ のとき， $F_1, F_2, \dots, F_n$ の中に少なくとも 1 組正二十面体の対面を含むから， $1 \leq m \leq M \leq 4$ とはならない。

よって， $n \geq 10$ において $1 \leq m \leq M \leq 4$ となる確率は

$$n = 10 \text{ のとき } \frac{567}{1562500}, \quad n \geq 11 \text{ のとき } 0 \quad (\text{答})$$

である。

2

$$(1) \quad \overrightarrow{OP} = m(2, 4) + n(3, 7) = (2m + 3n, 4m + 7n)$$

ここで，

$$\begin{cases} 2m + 3n = p & \dots\dots ① \\ 4m + 7n = q & \dots\dots ② \end{cases}$$

とおくと，①×7－②×3 より

$$2m = 7p - 3q \quad \therefore m = \frac{7p - 3q}{2}$$

②－①×2 より

$$n = q - 2p$$

p, q がともに整数であるとき，点 $P(p, q)$ が L に属するための条件は $7p - 3q$ が偶数となることであり，

$$7p \equiv 3q \pmod{2}$$

であることと同値である。7 と 3 はともに奇数であるから，さらに

$$p \equiv q \pmod{2}$$

であることと同値である。したがって，

$$L = \{(p, q) \mid p, q \text{ は整数, } p \equiv q \pmod{2}\}$$

であるから，

$$P_1(1, 1) \in L, P_2(2, 1) \notin L, P_3(3, 1) \in L \quad (\text{答})$$

- (2) (1)の考察より $L = \{(p, q) \mid p, q \text{ は整数, } p \equiv q \pmod{2}\}$ であるから， x 軸上の点 P が L に属するとすれば x 座標は偶数である。よって，求める点の座標は $(2k, 0)$ (k は整数) (答)

- (3) (1)の考察より $L = \{(p, q) \mid p, q \text{ は整数, } p \equiv q \pmod{2}\}$ であるから， L に属する原点でない点 P に対して， $|\overrightarrow{OP}|$ は

$$(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1) \text{ のいずれかで最小値 } \sqrt{2}$$

をとる。そのうちの 2 点 A', B' に対して $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}$ が L を張る場合を考えて，

$$\{A', B'\} = \{(1, 1), (-1, 1)\} \text{ または } \{(-1, 1), (-1, -1)\}$$

$$\text{または } \{(-1, -1), (1, -1)\} \text{ または } \{(1, -1), (1, 1)\}$$

のとき $|\overrightarrow{OA'}| + |\overrightarrow{OB'}|$ は

$$\text{最小値 } 2\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

をとる。

- (4) (3)の考察より， L の任意の点 P は

$$\overrightarrow{OP} = m(1, 1) + n(-1, 1) \quad (m, n \text{ は整数})$$

と表される。

$$P(x, y)$$

とおくと，任意の整数 m, n に対して

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = m(x + y) + n(-x + y) \text{ が整数}$$

となるのは，

$$x + y = a, \quad x - y = b \text{ がともに整数}$$

になるときであり，

$$x = \frac{a-b}{2}, \quad y = \frac{a+b}{2} \quad (a, b \text{ は整数})$$

このように表される点 $Q(x, y)$ の中で

$$|x| \leq 1 \text{ かつ } |y| \leq 1$$

であるものを求めると，

$$|a-b| \leq 2 \text{ かつ } |a+b| \leq 2 \quad (a, b \text{ は整数})$$

より

$$(a, b) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 2, 0), (0, \pm 2)$$

であり， M に属する点 $Q(x, y)$ のうち $|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 1$ を満たすものは

$$(0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), (\pm 1, \pm 1) \quad (\text{複号任意})$$

(答)

3

(1) $x = t$ における C_1 の接線

$$y = a^t \log a(x - t) + a^t$$

が原点 O を通るとすれば，

$$0 = a^t \log a(0 - t) + a^t$$

を満たし， $a^t > 0$ より

$$0 = -t \log a + 1$$

$$\log a^t = 1 = \log e \quad \therefore a^t = e \quad \left(t = \frac{1}{\log a}\right)$$

よって，原点から C_1 に引いた接線の方程式および接点の座標は

$$y = (e \log a)x, \quad \left(\frac{1}{\log a}, e\right) \quad (\text{答})$$

 $k = e \log a$ のとき

$$\log a = \frac{k}{e} \quad \therefore a = e^{\frac{k}{e}} \quad (\text{答})$$

(2) C_1 と C_2 は直線 $y = x$ に関して対称であるから，(1)より，原点から C_2 に引いた接線の接点の座標は

$$\left(e, \frac{1}{\log a}\right) \quad (\text{答})$$

(3) $\triangle OPQ$ が正三角形となるのは，

$$OP = OQ \text{ かつ } \angle POQ = 60^\circ$$

であることと同値であり，このとき P と Q は直線 $y = x$ に関して対称であるから，直線 OP , OQ の傾きは

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} \pm \tan \frac{\pi}{6}}{1 \mp \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} \quad (\text{複号同順}) \\ &= \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 \mp 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3} \mp 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{3 - 1} \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\ell: y = (2 - \sqrt{3})x$, $m: y = (2 + \sqrt{3})x$ とおくと， ℓ と m , C_1 と C_2 はそれぞれ直線 $y = x$ に関して対称であることに注意すれば， $\triangle OPQ$ が正三角形となる P, Q の組の個数は C_1 と ℓ, m との共有点の個数に等しいことがわかる。その個数を原点から C_1 に引いた接線の傾き k で分類すると，

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < k < 2 - \sqrt{3} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ k = 2 - \sqrt{3} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 2 - \sqrt{3} < k < 2 + \sqrt{3} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ k = 2 + \sqrt{3} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ k > 2 + \sqrt{3} \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{array} \right.$$

(1) より $a = e^{\frac{k}{e}}$ であるから， $\triangle OPQ$ が正三角形となるような P, Q の組の個数は

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 < a < e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ a = e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} < a < e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a > e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{array} \right.$$

よって， P, Q をどのようにとっても $\triangle OPQ$ が正三角形とならないのは，

$$a > e^{\frac{2+\sqrt{3}}{e}} \quad (\text{答})$$

のときである。

(注) 上の解答は一見遠回りをしているかに見えるが，正三角形とならないための条件だけに絞って，その根拠を説明の方がかえって難しくなるので，すべての場合を尽くす転換法で説明する方が結果的には労力が少なくて済む。極限の収束条件を論じるときなどにも使えるので，覚えておきたい論法である。

(4) (3)の考察より， $\triangle OPQ$ が正三角形となるような P, Q の組がちょうど 3 個存在するのは

$$a = e^{\frac{2-\sqrt{3}}{e}} \quad (\text{答})$$

のときである。