

1

(1) 三角形ができるための条件は

$$2x > 0 \text{ かつ } x + 6 > 0$$

のもとで、

$$|(x+6) - 6| < 2x < (x+6) + 6$$

$$\therefore 0 < x < 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

鋭角三角形となるための条件は

$$\begin{cases} (2x)^2 + (x+6)^2 > 6^2 & \dots\dots \textcircled{2} \\ (x+6)^2 + 6^2 > (2x)^2 & \dots\dots \textcircled{3} \\ 6^2 + (2x)^2 > (x+6)^2 & \dots\dots \textcircled{4} \end{cases}$$

②は $5x^2 + 12x > 0$ であり、①より既に成り立つ。

③より

$$3x^2 - 12x - 72 < 0$$

$$x^2 - 4x - 24 < 0 \quad \therefore 2 - 2\sqrt{7} < x < 2 + 2\sqrt{7}$$

④より

$$3x^2 - 12x > 0$$

$$3x(x-4) > 0 \quad \therefore (x < 0 \text{ または }) x > 4$$

鋭角三角形となるのは、①かつ②かつ③かつ④より、

$$\boxed{4} < x < \boxed{2} + \boxed{2}\sqrt{\boxed{7}} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

(ア) (イ) (ウ) (エ)

のときである。

$$(i) \frac{(2x)^2 + (x+6)^2 - 6^2}{2 \cdot 2x \cdot (x+6)} = \cos \frac{\pi}{3} \text{ となるとき}$$

$$5x^2 + 12x = 2x(x+6) \quad \therefore x = 0$$

⑤を満たす x は存在しない。

$$(ii) \frac{(x+6)^2 + 6^2 - (2x)^2}{2 \cdot (x+6) \cdot 6} = \cos \frac{\pi}{3} \text{ となるとき}$$

$$-3x^2 + 12x + 72 = 6(x+6)$$

$$3x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

⑤より

$$x = \boxed{1} + \sqrt{\boxed{13}}$$

(オ) (カキ)

$$(iii) \frac{6^2 + (2x)^2 - (x+6)^2}{2 \cdot 6 \cdot 2x} = \cos \frac{\pi}{3} \text{ となるとき}$$

$$3x - 12x = 12x$$

$$3x(x-8) = 0$$

⑤を満たす x は存在しない。

(2) 加法定理を用いて

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\pi}{6}(\sqrt{3} \sin x + \cos x) \\
 &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) \\
 &= \frac{\pi}{3} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{\pi}{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$

と表され,

$$\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$$

であるから, y のとり得る値の範囲は

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2} \\
 \therefore \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} \pi \leq y \leq \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} \pi
 \end{aligned}$$

(ク) (コ)
(ケ) (カ)

加法定理と 2 倍角の定理を用いて変形すると

$$\begin{aligned}
 \sin 3y - \sin y &= \sin(2y + y) - \sin(2y - y) = 2 \cos 2y \sin y \\
 z &= \sin 3y + \cos 2y - \sin y \\
 &= (1 + 2 \sin y) \cos 2y \\
 &= (1 + 2 \sin y)(1 - 2 \sin^2 y) \\
 &= -4 \sin^3 y - 2 \sin^2 y + 2 \sin y + 1
 \end{aligned}$$

 $\sin y = t$ とおくと

$$\sin \frac{\pi}{6} \leq t \leq \sin \frac{\pi}{3} \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり,

$$z = -4t^3 - 2t^2 + 2t + 1$$

これを $f(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= -12t^2 - 4t + 2 \\
 &= -12 \left(t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{6} \right) \\
 &= -12 \left\{ \left(t + \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{7}{36} \right\} \\
 f' \left(\frac{1}{2} \right) &= -12 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 = -3 < 0
 \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ でつねに } f'(t) < 0, \text{ } f(t) \text{ は減少関数}$$

であるから, z のとり得る値の範囲は

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq z \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

である。

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} - 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1$$

であるから, 求める範囲は

$$-\frac{\overset{(\text{シ})}{\boxed{1}}}{\underset{(\text{ス})}{\boxed{2}}} \sqrt{\overset{(\text{ソ})}{\boxed{3}}} - \frac{\overset{(\text{ソ})}{\boxed{1}}}{\underset{(\text{タ})}{\boxed{2}}} \leq z \leq \frac{\overset{(\text{チ})}{\boxed{1}}}{\underset{(\text{チ})}{\boxed{1}}}$$

(3) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

は奇数であるから, 前半3枚と後半3枚をそっくり入れ替えると大小は逆になることを考え, 前半3枚の数の和が後半より小さい並べ方は

$$6! \div 2 = \frac{\boxed{360}}{(\text{ツテト})} \text{通り}$$

1から6までのカードを1列に並べるとき, 偶数と奇数が交互に並ぶのは

$$2 \times 3! \times 3! = 72 \text{通り}$$

奇数が連続するまたは偶数が連続するのは, その余事象であるから,

$$6! - 72 = \frac{\boxed{648}}{(\text{ナニヌ})} \text{通り}$$

2

(1) \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} は互いに垂直であるから

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + t^2 = 0$$

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + t^2 = 0$$

$$\vec{OC} \cdot \vec{OA} = -\frac{1}{2} \times 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0 + t^2 = 0$$

$$\therefore t^2 = \frac{1}{2}$$

 $t > 0$ より

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{答})$$

(2) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OD}$, $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OE}$, $\vec{OC} + \vec{OA} = \vec{OF}$, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OG}$ とおくと, 立方体 OADB-CFGE ができる。O, A, B, C 以外の立方体の頂点は

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right), E(-1, 0, \sqrt{2}), F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right),$$

$$G\left(0, 0, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

(答)

(3)(i) $0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ における題意の立体は, 正三角形 ABC の外接円を周とする

円板を底面として点 O を頂点とする直円錐である。

$$AB = BC = CA = \sqrt{2} \quad OA = \sqrt{3}$$

外接円の半径 R は, 正弦定理より

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = 1$$

正三角形 ABC の面積を S とすると

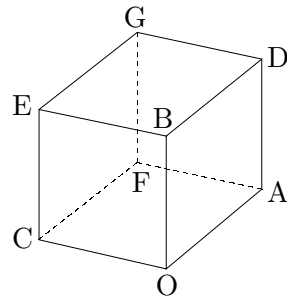
$$S = \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

点 O から平面 ABC におろした垂線の長さを h として, 四面体 OABC の体積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} \times h = \frac{1}{6} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad \therefore h = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

直円錐の体積 V_1 は

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \cdot 1^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$$



(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \sqrt{2}$ における題意の回転体の体積を V_2 とする。

平面 $z = \frac{1+a}{\sqrt{2}}$ ($0 \leq a \leq 1$) と辺 AD, BD との交点をそれぞれ A' , B' とすると,

$$AA' : A'D = BB' : B'D = a : (1-a)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\vec{OA'} &= (1-a)\vec{OA} + a\vec{OD} \\ &= (1-a)\left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1+a}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{OB'} &= (1-a)\vec{OB} + a\vec{OD} \\ &= (1-a)\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + a, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1+a}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - a + 1$$

辺 BE, CE との交点, および辺 CF, AF との交点についても同様であるから, 平面 $z = \frac{1+a}{\sqrt{2}}$ による回転体の断面は半径 $\sqrt{a^2 - a + 1}$ の円板である。

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}} = u \text{ とおくと}$$

$$a = \sqrt{2}u - 1$$

$$a^2 - a + 1 = 2\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1$$

であるから, 体積 V_2 は

$$\begin{aligned}V_2 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \pi \left\{ 2\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 \right\} du \\ &= \pi \left[\frac{2}{3}\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + u - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \\ &= \pi \left\{ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= \pi \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \pi \cdot \frac{2-3+6}{6\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{6\sqrt{2}} \pi\end{aligned}$$

(iii) $\sqrt{2} \leq z \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$ における回転体は, $0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の部分と合同であるから, 体積は $V_1 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ である。

(i), (ii), (iii) より, 求める回転体の体積 V は

$$V = 2V_1 + V_2 = \frac{2 \times 2 + 5}{6\sqrt{2}} \pi = \frac{3}{2\sqrt{2}} \pi \quad (\text{答})$$

3

$$(1) \quad f(x) = g(x) \iff (x+1)(x-1)(x-3) - 8x = a$$

であることを考えて,

$$F(x) = (x+1)(x-1)(x-3) - 8x = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$

とおくと,

$$F'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$$

の符号を調べることにより, $F(x)$ の増減は

x	$(-\infty)$		-1		3		(∞)
$F'(x)$		+	0	-	0	+	
$F(x)$	$(-\infty)$	↗	極大 8	↘	極小 -24	↗	(∞)

$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の個数は, $y = F(x)$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数に等しいから,

$$\begin{cases} a < -24 \text{ または } a > 8 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = -24 \text{ または } a = 8 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ -24 < a < 8 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases} \quad (\text{答})$$

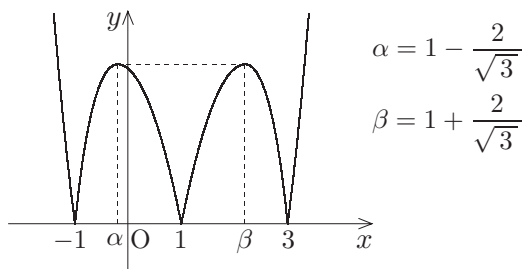
$$(2) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \text{ を微分して,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 1 \\ &= 3\left(x^2 - 2x - \frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(x - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

の符号を調べることにより, $f(x)$ の増減は

x		$1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$		$1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$y = f(x)$ のグラフは点 $(1, 0)$ を中心として点対称であることも考えて, $y = |f(x)|$ のグラフの概形は



$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \beta &= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(答)

(3) $x = t$ における $y = -f(x)$ の接線

$$y = (-3t^2 + 6t + 1)(x - t) - t^3 + 3t^2 + t - 3$$

が点 $(0, -3)$ を通るとすれば,

$$-3 = (-3t^2 + 6t + 1)(0 - t) - t^3 + 3t^2 + t - 3$$

$$2t^3 - 3t^2 = 0$$

$$2t^2\left(t - \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \therefore t = 0, \frac{3}{2}$$

$$-3 \times 0^2 + 6 \times 0 + 1 = 1$$

$$-3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 6 \times \frac{3}{2} + 1 = -\frac{27}{4} + 9 + 1 = \frac{13}{4}$$

点 $(0, -3)$ から曲線 $y = -f(x)$ に引いた接線の傾きは

$$1, \frac{13}{4} \quad (\text{答})$$

(4) $y = bx - 3$ が

点 $(-1, 0)$ を通るとき $b = -3$

点 $(1, 0)$ を通るとき $b = 3$

点 $(3, 0)$ を通るとき $b = 1$

接線の傾きについて

$$-f'(-1) = -3 - 6 + 1 = -8$$

$$f'(3) = 27 - 18 - 1 = 8$$

(3)より

$$-f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

であることと (2) のグラフを考えて, $y = |f(x)|$ と $y = bx - 3$ の共有点の個数は

$$\left\{ \begin{array}{ll} b < -3 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ b = -3 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ -3 < b < 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ b = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 1 < b < 3 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ b = 3 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 3 < b < \frac{13}{4} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ b = \frac{13}{4} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ b > \frac{13}{4} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{array} \right. \quad (\text{答})$$