

1

- (1)(a) 出発して1秒後にPもQも確率 $\frac{1}{3}$ でB, C, Dのいずれかに移動するから,
同じ頂点にある確率は

$$\frac{1}{3} \quad (\text{ア})$$

$$\frac{1}{3} \quad (\text{イ})$$

- (b) PとQが異なる頂点にあるとき,次に同じ頂点にある確率と異なる頂点にある確率は,どちらも $\frac{1}{2}$ である。

出発して1秒後にPとQが同じ頂点にあるか異なる頂点にあるかで分けて考えることにより,2秒後にPとQが同じ頂点にある確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1+3}{9} = \frac{4}{9} \quad (\text{ウ})$$

$$\frac{4}{9} \quad (\text{エ})$$

- (c) 出発して2秒後にPとQ同じ頂点にあるか異なる頂点にあるかで分けて考えることにより,3秒後にPとQが同じ頂点にある確率は

$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{8+15}{54} = \frac{23}{54} \quad (\text{オカ})$$

$$\frac{23}{54} \quad (\text{キク})$$

- (d) PがA → B → C → Dと移動するとき,QはA → B → DおよびA → Cとは移動できないから,3秒でB, C, Dのすべてに到達するのは,
A → B → C → D または A → D → C → B
と移動する場合に限られる。

Pが他の移動をする場合も同様であるから,求める確率は

$$\left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right\} \times 3!$$

$$= \frac{4+9}{2 \times 3^5}$$

$$= \frac{13}{486} \quad (\text{ケコ})$$

$$= \frac{13}{486} \quad (\text{サシス})$$

(2)

(a) $0 < x \leq \frac{1}{3}$ すなわち $3x \leq 1$ のとき

$$g(x) = \int_1^2 (t - 3x) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - 3xt \right]_1^2 = -\frac{\boxed{3}}{\text{(エ)}}x + \frac{\boxed{3}}{\frac{\boxed{2}}{\text{(オ)}}}$$

 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ すなわち $1 \leq 3x \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^{3x} (3x - t) dt + \int_{3x}^2 (t - 3x) dt \\ &= \left[3xt - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^{3x} + \left[\frac{1}{2}t^2 - 3xt \right]_{3x}^2 \\ &= 2\left(9x^2 - \frac{9}{2}x^2\right) - \left(3x - \frac{1}{2}\right) + 2 - 6x \\ &= \frac{\boxed{9}}{\text{(オ)}}x^2 - \frac{\boxed{9}}{\text{(イ)}}x + \frac{\boxed{5}}{\frac{\boxed{2}}{\text{(ト)}}} \end{aligned}$$

 $x \geq \frac{2}{3}$ すなわち $2 \leq 3x$ のとき

$$g(x) = \int_1^2 (3x - t) dt = \frac{\boxed{3}}{\text{(ナ)}}x - \frac{\boxed{3}}{\frac{\boxed{2}}{\text{(ヌ)}}}$$

(b) $t^2 - x^2 = (t+x)(t-x)$ に注意すると, $0 < x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt \\ &= \left[x^2t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x + \left[\frac{1}{3}t^3 - x^2t \right]_x^1 \\ &= 2\left(x^3 - \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{3} - x^2 \\ &= \frac{\boxed{4}}{\text{(ホ)}}x^3 - x^2 + \frac{\boxed{1}}{\frac{\boxed{3}}{\text{(ヘ)}}} \end{aligned}$$

 $x \geq 1$ のとき

$$h(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = \left[x^2t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = x^2 - \frac{\boxed{1}}{\frac{\boxed{3}}{\text{(ヘ)}}}$$

(c) $f(x) = g(x) - h(x)$ であるから, (a), (b) より

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{7}{6} & \left(0 < x \leq \frac{1}{3} \text{ のとき} \right) \\ -\frac{4}{3}x^3 + 10x^2 - 9x + \frac{13}{6} & \left(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \text{ のとき} \right) \\ -\frac{4}{3}x^3 + x^2 + 3x - \frac{11}{6} & \left(\frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ のとき} \right) \\ -x^2 + 3x - \frac{7}{6} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{12} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$0 < x < \frac{1}{3}$ において

$$f'(x) = -4x^2 + 2x - 3 = -4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{11}{4} < 0$$

$\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ において

$$f'(x) = -4x^2 + 20x - 9 = -(2x - 1)(2x - 9)$$

$\frac{2}{3} < x < 1$ において

$$f'(x) = -4x^2 + 2x + 3 = -4x\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3 > -4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 1 > 0$$

であるから, $f(x)$ の増減は

x	(0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	(∞)			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\left(\frac{7}{6}\right)$	\searrow	極小	\nearrow	極大	\searrow	$(-\infty)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{2} - \frac{9}{2} + \frac{13}{6} = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{12}$$

方程式 $f(x) = 0$ の正の実数解は, $y = f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標であるから, 実数解の個数は 2 個である。

(ホ)

(d) 方程式 $f(x) = k$ の正の実数解は, $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ との共有点の x 座標であるから, 個数が 1 個となるのは

$$k < \underset{\text{(マ)}}{\boxed{0}} \text{ または } \underset{\text{(ミム)}}{\boxed{13}} < k < \underset{\text{(メモ)}}{\boxed{12}} < k < \underset{\text{(ヤ)}}{\boxed{7}} < k < \underset{\text{(ユ)}}{\boxed{6}}$$

のときである。

2

(1) $A(0, -2)$, $P\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}, t\right)$, $Q\left(-\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}, t\right)$ であるから, $\triangle APQ$ の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} \cdot (t+2) = \frac{1}{2}(2+t)\sqrt{4-t^2} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad S'(t) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 \cdot \sqrt{4-t^2} + (2+t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-t^2}}(-2t) \right\} \\ &= \frac{(4-t^2) - t(2+t)}{2\sqrt{4-t^2}} \\ &= \frac{2-t-t^2}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{(2+t)(1-t)}{\sqrt{4-t^2}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $0 < t < 2$ において $S'(t)$ は $1-t$ と符号変化が同じであるから, $S(t)$ の増減は

t	(0)	1	(2)
$S'(t)$	+	0	-
$S(t)$		↗ 極大 ↘	

$S(t)$ は $t=1$ のとき極大かつ最大であり, このとき点 P の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \quad (\text{答})$$

(4) a は(3)で求めた点 P と点 A を通る直線の傾きであるから,

$$a = \frac{1 - (-2)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0} = 2\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

領域 D を y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍すると

$$y \geq 0, \quad y \leq \sqrt{3}x - 1, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

であり, この領域の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{12}$$

であるから, 領域 D の面積は

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{12} \times 2 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{6} \quad (\text{答})$$

(5) D を x 軸の周りに回転させてできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \pi \cdot 4(1-x^2) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} \pi + 4\pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} \pi + 4\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \left(\frac{8}{3} + \frac{1-36+9}{18} \sqrt{3} \right) \pi \\ &= \frac{24-13\sqrt{3}}{9} \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x^4 + 2x^3 + x + 2 &= x^3(x+2) + (x+2) \\
 &= (x^3+1)(x+2) \\
 &= (x+1)(x^2-x+1)(x+2) \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2)(a) \quad \int_0^a \frac{dx}{(x+a)(x+a+1)} &= \int_0^a \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+a+1} \right) dx \\
 &= \left[\log \left| \frac{x+a}{x+a+1} \right| \right]_0^a \\
 &= \log \frac{2a}{2a+1} - \log \frac{a}{a+1} \\
 &= \log \frac{2a+2}{2a+1} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \int_0^a \frac{dx}{x^2 - ax + a^2} &= \int_0^a \frac{dx}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2} \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \tan \theta\right)^2 + \frac{3}{4}a^2} \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a \tan \theta\right)' d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{3a^2} \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}a} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) (1)を考えて

$$\frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2-x+1} \quad \dots\dots ①$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
 4x+1 &= a(x+2)(x^2-x+1) + b(x+1)(x^2-x+1) + (cx+d)(x+1)(x+2) \\
 &= a(x^3+x^2-x+2) + b(x^3+1) + c(x^3+3x^2+2x) + d(x^2+3x+2) \\
 &= (a+b+c)x^3 + (a+3c+d)x^2 + (-a+2c+3d)x + 2a+b+2d
 \end{aligned}$$

係数を比べると

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \dots\dots ② \\ a+3c+d=0 & \dots\dots ③ \\ -a+2c+3d=4 & \dots\dots ④ \\ 2a+b+2d=1 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

連立方程式として解くことにより

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad d = 1$$

これを①に代入して, (2)(a), (b)を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} dx &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right\} dx \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{4}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$