

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の 内のアからユにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。ただし、 は 2 桁の数を、 は 3 桁の数を表す。また、分数は既約分数として表すものとする。 (40 点)

(1) 正四面体 ABCD 上に 2 つの動点 P, Q がある。P, Q はともに頂点 A を出発し、次のルールに従って 1 秒ごとに各頂点を移動するものとする。

- P, Q が同じ頂点 X にあれば、その 1 秒後に P, Q は独立に、X 以外の 3 頂点のいずれかに確率 $\frac{1}{3}$ で移動する。
- P, Q が異なる 2 頂点 X, Y にあれば、その 1 秒後に P, Q は独立に、X, Y 以外の 2 頂点のいずれかに確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。

(a) 出発して 1 秒後に P, Q が同じ頂点にある確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

(b) 出発して 2 秒後に P, Q が同じ頂点にある確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。

(c) 出発して 3 秒後に P, Q が同じ頂点にある確率は $\frac{\text{オカ}}{\text{キク}}$ である。

(d) A を出発してから 3 秒経過したときに、P, Q のどちらも B, C, D の 3 頂点すべてに到達し終えている確率は $\frac{\text{ケコ}}{\text{サシス}}$ である。

(2) 正の実数 x に対して

$$g(x) = \int_1^2 |t - 3x| dt, \quad h(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt$$

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

と定める。

$$(a) \quad g(x) \text{ を計算すると, } g(x) = \begin{cases} -\boxed{\text{セ}}x + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} & (0 < x \leq \frac{1}{3}) \\ \boxed{\text{チ}}x^2 - \boxed{\text{ツ}}x + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} & (\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}) \\ \boxed{\text{ナ}}x - \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} & (x \geq \frac{2}{3}) \end{cases}$$

となる。

$$(b) \quad h(x) \text{ を計算すると, } h(x) = \begin{cases} \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}x^3 - x^2 + \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} & (0 < x \leq 1) \\ x^2 - \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} & (x \geq 1) \end{cases}$$

となる。

(c) 方程式 $f(x) = 0$ ($x > 0$) の実数解の個数は $\boxed{\text{ホ}}$ 個である。

(d) 方程式 $f(x) = k$ ($x > 0$) の実数解の個数が 1 個になるような実数 k の範囲は

$$k < \boxed{\text{マ}}, \quad \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{メ}}} < k < \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{モ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$$

である。

問題 2 の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 t は $0 < t < 2$ を満たす実数とする。座標平面において、楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ と直線 $y = t$ の交点のうち、第 1 象限にあるものを P、第 2 象限にあるものを Q とする。また、点 A(0, -2) に対し、三角形 APQ の面積を $S(t)$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。 (30 点)

- (1) $S(t)$ を求めよ。
- (2) $S(t)$ の導関数 $S'(t)$ を求めよ。
- (3) t が $0 < t < 2$ の範囲を動くとき、三角形 APQ の面積が最大になる点 P の座標を求めよ。
- (4) (3) で求めた点 P と点 A を通る直線の方程式は、実数 a を用いて $y = ax - 2$ と表される。また、連立不等式

$$y \geq 0, \quad y \leq ax - 2, \quad x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

の表す領域を D とする。このとき、 a の値と D の面積を求めよ。

- (5) (4) で定めた領域 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

問題 3 の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 次の問いに答えよ。

(30 点)

(1) $x^4 + 2x^3 + x + 2$ を因数分解せよ。

(2) a は正の実数とする。次の定積分を求めよ。

(a)
$$\int_0^a \frac{dx}{(x+a)(x+a+1)}$$

(b)
$$\int_0^a \frac{dx}{x^2 - ax + a^2}$$

(3) 定積分 $\int_0^1 \frac{4x+1}{x^4+2x^3+x+2} dx$ を求めよ。