

1

(1) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ のとき

$$y = \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

であるから,

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x} \quad (\mathcal{P})$$

 $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2}{3}\pi$ のとき

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$$

であるから, $\beta = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ とおくと,

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \beta^2} > 0$$

加法定理より

$$\begin{aligned} y &= \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \alpha - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{1 - \beta^2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + \beta x \end{aligned}$$

$$\cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \text{ より}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{y^2 - 2\beta xy + \beta^2 x^2}{1 - \beta^2} = 1$$

$$\therefore \underbrace{\frac{1 + 3\beta^2}{4(1 - \beta^2)}}_{(\mathcal{I})} x^2 - \underbrace{\frac{2\beta}{1 - \beta^2}}_{(\mathcal{U})} xy + \underbrace{\frac{1}{1 - \beta^2}}_{(\mathcal{E})} y^2 = 1$$

(2) $z = a + bi$ (a, b は整数) のとき

$$|z|^2 = \boxed{a^2 + b^2} \quad (\mathcal{O})$$

 $\frac{5}{z} \in L$ のとき, $\frac{5}{z} \in L$ でもあるから,

$$\frac{5}{z} \cdot \frac{5}{\bar{z}} = \frac{25}{|z|^2} = \frac{25}{a^2 + b^2} \in L \quad \therefore a^2 + b^2 = 1, 5, 25$$

 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 1$, $\left|\frac{5}{z}\right| = \frac{5}{\sqrt{a^2 + b^2}} \neq 1$ のとき

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = \boxed{5} \quad (\text{カ})$$

a, b は整数であるから,

$$(a^2, b^2) = (1, 4), (4, 1)$$

$$\therefore (a, b) = (\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1) \quad (\text{複号任意})$$

よって, 集合 M の要素の個数 $n(M)$ は

$$n(M) = 2 \times 2^2 = \boxed{8} \quad (\text{キ})$$

a が最大, $b > 0$ となる $z = a + bi$ は

$$z = \boxed{2 + i} \quad (\text{ク})$$

(3) $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x) = e^{x^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(g(t)) = t$ の両辺を t で微分すると

$$f'(g(t))g'(t) = 1$$

①より

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))} = \frac{1}{e^{g(t)^2}} = e^{-g(t)^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

さらに, t で微分すると

$$g''(t) = e^{-g(t)^2} \cdot \frac{d}{dt} \{-g(t)^2\} = -2g(t)g'(t) \cdot e^{-g(t)^2}$$

②より

$$g''(t) = -2g(t)e^{-2g(t)^2}$$

$g''(t) = G(g(t))$ となる関数 $G(x)$ は

$$G(x) = \boxed{-2xe^{-2x^2}} \quad (\text{ケ})$$

2

(1) $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{10 \times 4 - (-2)^2} \\ &= \boxed{3} \quad (\text{ク}) \end{aligned}$$

 $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|^2 \\ |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 \\ r^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + r^2 &= 4 - 2 \times (-2) + 10 \\ \therefore \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= \boxed{r^2 - 9} \quad \dots\dots \text{①} \\ &\quad (\text{カ}) \end{aligned}$$

(2) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = 10$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2 &= 10 \\ r^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + r^2 &= 10 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= r^2 - 5 \quad \dots\dots \text{②} \end{aligned}$$

 $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|^2 = 4$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OA}|^2 &= 10 \\ r^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + r^2 &= 4 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= r^2 - 2 \quad \dots\dots \text{③} \end{aligned}$$

直線 OP と平面 α が直交するための条件は

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

であり, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = r^2$, および ①, ②, ③ を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= (-3\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= 3|\overrightarrow{OA}|^2 - (x+3)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + x|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &\quad + y\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - y\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= 3r^2 - (x+3)(r^2 - 5) + xr^2 + y(r^2 - 9) - y(r^2 - 2) \\ &= 5x - 7y + 15 = 0 \quad \dots\dots \text{④} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AC} &= (-3\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= 3|\overrightarrow{OA}|^2 - (y+3)\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + y|\overrightarrow{OC}|^2 \\ &\quad + x\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - x\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= 3r^2 - (y+3)(r^2 - 2) + yr^2 + x(r^2 - 9) - x(r^2 - 5) \\ &= -2(2x - y - 3) = 0 \quad \dots\dots \text{⑤} \end{aligned}$$

④かつ⑤を解いて

$$x = \boxed{4}_{(シ)}, \quad y = \boxed{5}_{(ス)}$$

G は $\triangle ABC$ の重心であるから,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

DG の中点が O であるから,

$$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH}$$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + t(-3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC})$$

$$= \left(-3t - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA} + \left(4t - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OB} + \left(5t - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \left(\boxed{-3t - \frac{4}{3}}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\boxed{4t - \frac{1}{3}}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\boxed{5t - \frac{1}{3}}\right)\overrightarrow{OC}$$

(セ) (ソ) (タ)

点 H が平面 α (平面 ABC) 上にあるとすると

$$\left(-3t - \frac{1}{3}\right) + \left(4t - \frac{1}{3}\right) + \left(5t - \frac{1}{3}\right) = 1$$

$$6t - 1 = 1 \quad \therefore t = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ (チ)}$$

(3) (2)より, 点 H を $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$ により定めると, 点 H は D から α におろした垂線の足となる。 \overrightarrow{DH} の大きさを h とすると

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 | -3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} |^2 \\ &= \frac{1}{9} \left(9|\overrightarrow{OA}|^2 + 16|\overrightarrow{OB}|^2 + 25|\overrightarrow{OC}|^2 \right. \\ &\quad \left. - 24\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 40\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - 30\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \right) \\ &= \frac{9r^2 + 16r^2 + 25r^2 - 24(r^2 - 5) + 40(r^2 - 9) - 30(r^2 - 2)}{9} \\ &= \frac{36r^2 - 180}{9} \\ &= 4(r^2 - 5) \quad \therefore h = 2\sqrt{r^2 - 5} \end{aligned}$$

四面体 ABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{r^2 - 5} = \boxed{2\sqrt{r^2 - 5}} \text{ (ツ)}$$

3

(1) $\sin((2n+1)\pi x) = 0$ を満たす x の値 x_k は

$$(2n+1)\pi x_k = k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$\therefore x_k = \boxed{\frac{k}{2n+1}} \quad (\text{ト})$$

$0 \leq x \leq 1$ の範囲では

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2n+1 \text{ の } \boxed{2n+2} \text{ 個} \\ (\text{テ})$$

(2) k が偶数のとき,

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \text{ において } \sin((2n+1)\pi x) \geq 0$$

であるから, $f(x)$ が増加関数であることとあわせて,

$$f(x_k) \sin((2n+1)\pi x) \leq f(x) \sin((2n+1)\pi x) \leq f(x_{k+1}) \sin((2n+1)\pi x)$$

定積分が大小関係を保存する性質より

$$f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin((2n+1)\pi x) dx \leq a_k \leq f(x_{k+1}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin((2n+1)\pi x) dx$$

ここで,

$$\begin{aligned} & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin((2n+1)\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{(2n+1)\pi} \cos((2n+1)\pi x) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\ &= \frac{\cos((2n+1)\pi x_k) - \cos((2n+1)\pi x_{k+1})}{(2n+1)\pi} \\ &= \frac{(-1)^k - (-1)^{k+1}}{(2n+1)\pi} \\ &= \frac{1 - (-1)}{(2n+1)\pi} \\ &= \frac{2}{(2n+1)\pi} \end{aligned}$$

であるから, (F1) が成り立つ。

(証明おわり)

$$(3) \quad I_n = \sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^n a_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}$$

であるから, (F1), (F2) より

$$\begin{aligned} \frac{2}{(2n+1)\pi} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_{2k}) - f(x_{2k+2})\} + f(x_{2n}) \right) &\leq I_n \\ I_n &\leq \frac{2}{(2n+1)\pi} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_{2k+1}) - f(x_{2k+1})\} + f(x_{2n+1}) \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2f(x_0)}{(2n+1)\pi} \leq I_n \leq \frac{2f(x_{2n+1})}{(2n+1)\pi}$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

(証明おわり)

(4) $f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で増加関数であるから, $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ において

$$f(x_k) |\sin((2n+1)\pi x)| \leq f(x) |\sin((2n+1)\pi x)| \leq f(x_{k+1}) |\sin((2n+1)\pi x)|$$

であり, 定積分により大小は変わらないから

$$\begin{aligned} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\sin((2n+1)\pi x)| dx \\ \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) |\sin((2n+1)\pi x)| dx \\ \leq f(x_{k+1}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\sin((2n+1)\pi x)| dx \end{aligned}$$

$x_k \leq x \leq x_{k+1}$ において $\sin((2n+1)\pi x)$ は符号を変えないから, (2)と同様にして

$$f(x_k) \frac{2}{(2n+1)\pi} \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) |\sin((2n+1)\pi x)| dx \leq f(x_{k+1}) \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, 2n$ について辺々加えると

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \leq J_n \leq \frac{2}{(2n+1)\pi} \sum_{k=0}^{2n} f(x_{k+1})$$

$f(x)$ は $[0, 1]$ で連続であるから, 区分求積法により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2n+1} f\left(\frac{k}{2n+1}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \sum_{k=0}^{2n} f(x_{k+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2n+1} f\left(\frac{k+1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \boxed{\frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx}$$

(ナ)

4

$$(1) \quad a + b > ab \iff (a-1)(b-1) < 1$$

であることに注意すると、2回の操作でカードの数の和が積より大きくなるのは、少なくとも1回1のカードを取り出すときであり、確率は

$$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \boxed{\frac{19}{100}} \quad (\text{二})$$

(2) 4回の操作で1, 2, 3, 4すべての数が記録されている確率は

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} \times 4! = \boxed{\frac{36}{625}} \quad (\text{又})$$

4回で記録された数の最大値が3となるのは、「4回とも3以下のカードを取り出す」場合から「4回とも2以下のカードを取り出す」場合を除いた事象であり、確率は

$$\left(\frac{1+2+3}{10}\right)^4 - \left(\frac{1+2}{10}\right)^4 = \boxed{\frac{243}{2000}} \quad (\text{ネ})$$

(3) n 回の操作で1と k ($= 2, 3, 4$)のちょうど2種類のカードが取り出される確率を q_k とすると、

$$q_k = \left(\frac{1+k}{10}\right)^n - \left(\frac{1}{10}\right)^n - \left(\frac{k}{10}\right)^n = \frac{(1+k)^n - 1 - k^n}{10^n}$$

記録されている数が1を含む2種類である確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^4 q_k &= \frac{3^n - 1 - 2^n}{10^n} + \frac{4^n - 1 - 3^n}{10^n} + \frac{5^n - 1 - 4^n}{10^n} \\ &= \boxed{\frac{5^n - 2^n - 3}{10^n}} \quad (\text{ノ}) \end{aligned}$$

2と3のちょうど2種類のカードを取り出す確率は

$$\frac{5^n - 2^n - 3^n}{10^n}$$

2と4のちょうど2種類のカードを取り出す確率は

$$\frac{6^n - 2^n - 4^n}{10^n}$$

3と4のちょうど2種類のカードを取り出す確率は

$$\frac{7^n - 3^n - 4^n}{10^n}$$

ちょうど2種類のカードを取り出す確率は

$$\begin{aligned} &\frac{5^n - 2^n - 3}{10^n} + \frac{5^n - 2^n - 3^n}{10^n} + \frac{6^n - 2^n - 4^n}{10^n} + \frac{7^n - 3^n - 4^n}{10^n} \\ &= \frac{7^n + 6^n + 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 4^n - 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n - 3}{10^n} \end{aligned}$$

であるから，条件付き確率 p_n は

$$p_n = \frac{5^n - 2^n - 3}{7^n + 6^n + 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 4^n - 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n - 3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{7} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{5^n}}{1 + \left(\frac{6}{7}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n - \frac{3}{7^n}} \right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \boxed{\frac{5}{7}} \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

(4) $k-1$ 回目まで 2 または 3 のカードを取り出し， k 回目に 1 のカードを取り出して，さらに $k+1$ 回目から n 回目までに少なくとも 1 回 4 のカードを取り出す確率を a_k とすると

$$\begin{aligned} a_k &= \left(\frac{2+3}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1+2+3}{10}\right)^{n-k}\right\} \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left\{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}\right\} \\ &= \frac{1}{10} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right\} \end{aligned}$$

求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{10} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{5} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} - \frac{3}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \boxed{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{3}{5}\right)^n} \quad (\text{E}) \end{aligned}$$

5

(1) $g(x) = 18x^3 - 6\alpha x + \beta$ とおくと,

$$g'(x) = 54x^2 - 6\alpha = 54\left(x^2 - \frac{\alpha}{9}\right)$$

$\alpha > 0$ を考えて,

$$g'(x) = 54\left(x + \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)$$

方程式 $g(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつための条件は,

「 $g(x)$ が単調増加」または「 $g(x)$ の極大値と極小値が同符号」となることであり, $\alpha > 0$ のもとでは

$$g\left(-\frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)g\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\right)\left(-\frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\right) > 0$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ より

$$\beta > \boxed{\frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha}} \quad (\varphi)$$

$\beta = \frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= 18x^3 - 6\alpha x + \frac{4}{3}\alpha\sqrt{\alpha} \\ &= 18\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^2\left(x + \frac{2}{3}\sqrt{\alpha}\right) \\ &= 18\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^3 + 18\sqrt{\alpha}\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

であるから, 曲線 $y = g(x)$ と x 軸で囲まれる部分は

$$-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha} \leq x \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{3}$$

であり, この範囲で $g(x) \geq 0$ であるから, 面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}} g(x) dx \\ &= \left[\frac{9}{2}\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^4 + 6\sqrt{\alpha}\left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{3}\right)^3 \right]_{-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}}^{\frac{\sqrt{\alpha}}{3}} \\ &= -\frac{9}{2}(-\sqrt{\alpha})^4 - 6\sqrt{\alpha}(-\sqrt{\alpha})^3 \\ &= \left(-\frac{9}{2} + 6\right)\alpha^2 \\ &= \boxed{\frac{3}{2}\alpha^2} \quad (\heartsuit) \end{aligned}$$

(2) $C: y = 3x^2$ 上の点 $P(-a, 3a^2)$ における法線の方程式は

$$1 \cdot (x + a) + 6(-a)(y - 3a^2) = 0$$

$$\therefore x - 6ay + 18a^3 + a = 0$$

$y = 3x^2$ と連立して y を消去すると

$$x - 6a \cdot 3x^2 + 18a^3 + a = 0$$

$$18ax^2 - x - 18a^3 - a = 0$$

$$18a(x+a) \left(x - a - \frac{1}{18a} \right) = 0$$

P と異なる交点の x 座標 $X(a)$ は

$$X(a) = \boxed{a + \frac{1}{18a}} \quad (\text{ホ})$$

$a > 0$ を考えて、相加・相乗平均の不等式より

$$X(a) \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{18a}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ここで、不等式の等号は

$$a = \frac{1}{18a} > 0 \quad \text{すなわち} \quad a = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

のとき成り立つから、

$$X(a) \text{ の最小値は } \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}} \quad (\text{マ})$$

$P(-a, 3a^2)$ における C の法線

$$x - 6ay + 18a^3 + a = 0$$

が点 $Q(x_0, y_0)$ を通るとすれば、

$$x_0 - 6ay_0 + 18a^3 + a = 0$$

$$\therefore 18a^3 - 6\left(y_0 - \frac{1}{6}\right)a + x_0 = 0$$

$\alpha = y_0 - \frac{1}{6}$, $\beta = x_0 (> 0)$ とおくと、条件を満たす点 Q がただ 1 つ存在するための

条件は、(1)の考察より

$$\alpha \leq 0 \quad \text{または} \quad \beta > \frac{4}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}$$

$$y_0 \leq \frac{1}{6} \quad \text{または} \quad x_0 > \frac{4}{3}\left(y_0 - \frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore y_0 < \left(\frac{3}{4}x_0\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}$$

求める連続関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \boxed{\left(\frac{3}{4}x\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}} \quad (\text{ニ})$$