

1

(1) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ の両辺を x^2 で割ると

$$x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

$y = x + \frac{1}{x}$ とおくと

$$\boxed{y^2 - 2y + 1} = 0$$

(ア)

$$(y - 1)^2 = 0$$

$$\therefore y = x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \therefore x = \boxed{\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}} \quad (イ)$$

(2) $x^3 + y^3 + xy - 3 = 0$ より

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) + xy - 3 = 0$$

$s = x + y$, $t = xy$ とおくと

$$s^3 - 3ts + t - 3 = 0$$

$$(3s - 1)t = s^3 - 3 \quad \therefore t = \boxed{\frac{s^3 - 3}{3s - 1}} \quad (ウ)$$

x, y を 2 解とする 2 次方程式

$$z^2 - sz + \frac{s^3 - 3}{3s - 1} = 0$$

が実数解をもつことより

$$(\text{判別式}) = s^2 - 4 \cdot \frac{s^3 - 3}{3s - 1} \geq 0$$

$$\frac{s^2(3s - 1) - 4(s^3 - 3)}{3s - 1} \geq 0$$

$$\frac{s^3 + s^2 - 12}{3s - 1} = \frac{(s - 2)(s^2 + 3s + 6)}{3s - 1} \leq 0$$

$$s^2 + 3s + 6 = \left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ より}$$

$$s - 2 = 0 \text{ または } (s - 2)(3s - 1) < 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{3} < s \leq 2} \quad (\text{エ})$$

(3) 3 で割った余りが 1 となる自然数 n に対し,

$$(x - 1)(x^{3n} - 1) = (x - 1)(x^n - 1)(x^{2n} + x^n + 1)$$

が

$$(x^3 - 1)(x^n - 1) = (x - 1)(x^n - 1)(x^2 + x + 1)$$

で割り切れることを証明するには, $x^{2n} + x^n + 1$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れることを証明すればよい。

方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の 1 つの解を ω とすると

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= x^2 + x + 1 - (\omega^2 + \omega + 1) \\ &= (x^2 - \omega^2) + (x - \omega) \\ &= (x - \omega)(x + \omega + 1) \\ &= (x - \omega)(x - \omega^2) \end{aligned}$$

$$\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \text{ より}$$

$$\omega^3 = 1$$

であるから, $n \equiv 1 \pmod{3}$ より

$$\omega^n = \omega$$

$P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ とおくと

$$P(\omega) = \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$P(\omega^2) = \omega^{4n} + \omega^{2n} + 1 = \omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$$

であるから, 因数定理より

$P(x)$ は $x - \omega$ および $x - \omega^2$ で割り切れる

が, $\omega \neq \omega^2$ より $x - \omega$ と $x - \omega^2$ は (多項式として) 互いに素であるから,

$$P(x) = x^{2n} + x^n + 1 \text{ は } x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2) \text{ で割り切れる。}$$

よって, 題意が証明された。

(おわり)

2

(1) 2回の移動で点Pの y 座標が0になるのは,

- 2回とも x 軸方向の移動
- $(0, 1)$ の移動と $(0, -1)$ の移動が1回ずつ

のいずれかの場合であるから, 確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (1+2) = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ (オ)}$$

(2) 3回の移動で点Pの x 座標と y 座標がともに0以下になるのは,

- 3回とも $(0, -1)$ の移動
- $(0, -1)$ の移動が2回, $(0, 1)$ の移動が1回

のいずれかの場合であるから, その余事象の確率を求めて

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times (1+3) = \boxed{\frac{23}{27}} \text{ (カ)}$$

(3) 4回の移動で点Pの x 座標が2以上になるのは, x 軸方向の移動が4回または3回または2回のとときと考えると, 確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times (1 + 2 \times 4 + 2^2 \times {}_4C_2) = \frac{33}{81} = \boxed{\frac{11}{27}} \text{ (キ)}$$

4回の移動で点 $P(x, y)$ が $x \geq 2$ かつ $y = 0$ となるのは,

- 4回とも $(1, 0)$ の移動
- $(1, 0)$ の移動が2回, $(0, 1)$ の移動が1回, $(0, -1)$ の移動が1回

のいずれかの場合であるから, 4回の試行において, 点 $P(x, y)$ が $x \geq 2$ のとき $y = 0$ である条件付き確率は

$$\frac{1 + 4 \times 3}{1 + 2 \times 4 + 2^2 \times {}_4C_2} = \boxed{\frac{13}{33}} \text{ (ク)}$$

(4) n 回目にはじめて点Pの x 座標が2となるのは, $n-1$ 回目までの1回と n 回目に x 軸方向に移動する場合であるから, 確率は

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-k} \cdot \frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{n-2}}{3^n} = \boxed{\frac{2^{n-2}(n-1)}{3^n}} \text{ (ケ)}$$

(5) 1回目から n 回目までに点Pが $x = 2$ 上の格子点を2つ以上通るのは, $n-1$ 回目までに x 軸方向に少なくとも2回移動し, x 軸方向に2回移動した直後は y 軸方向に移動する場合であるから, 求める確率を q とすると

$$q = \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} (k-1) \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \sum_{k=2}^{n-1} (k-1) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$\begin{aligned}
9q &= 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + (n-2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\
-) \quad 6q &= \quad \quad 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + (n-3) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + (n-2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
\hline
3q &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - (n-2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1 - \frac{2}{3}} - (n-2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= 2 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \right\} - (n-2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= 2 - (3+n-2) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
\therefore q &= \boxed{\frac{2}{3} - \frac{n+1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n} \quad (\square)
\end{aligned}$$

3

(1) $a_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は半径 1 の四分円の面積を表すから,

$$a_1 = \boxed{\frac{\pi}{4}} \quad (\text{サ})$$

部分積分法により, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 1 \cdot (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx \\ &= \left[x(1-x^2)^{\frac{n}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{n}{2} (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} (-2x) dx \\ &= 0 - n \int_0^1 (1-x^2-1)(1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} dx \\ &= -n(a_n - a_{n-2}) \end{aligned}$$

$$(n+1)a_n = na_{n-2} \quad \therefore a_n = \boxed{\frac{n}{n+1}} a_{n-2} \quad (\text{シ})$$

(2) (1)より

$$(n+1)a_n a_{n-1} = na_{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$(n+1)a_n a_{n-1}$ は定数であるから

$$(n+1)a_n a_{n-1} = 2a_1 a_0 = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 1$$

$$\therefore a_n a_{n-1} = \boxed{\frac{\pi}{2(n+1)}} \quad (\text{ス})$$

(3) $0 < x < 1$ において

$$0 < \sqrt{1-x^2} < 1$$

であるから,

$$0 < (1-x^2)^{\frac{n}{2}} < (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} < (1-x^2)^{\frac{n-2}{2}} < 1$$

よって, 定積分の性質より

$$0 < a_n < a_{n-1} < a_{n-2} < 1 \quad \therefore \frac{1}{a_{n-2}} < \frac{1}{a_{n-1}} < \frac{1}{a_n}$$

(1)を用いると

$$\frac{n}{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{a_n}{a_n} = 1$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$$

(証明おわり)

(4) (2)より

$$na_n^2 = na_n a_{n-1} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n\pi}{2(n+1)} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$\therefore \sqrt{n} a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ および (3)より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \text{ (㉔)}$$

4

(1) 内積の定義と図形 S の定義式より

$$\cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{|\vec{OB}|}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{1}{|\vec{OA}|} = \frac{1}{2}$$

より

$$\angle AOB = \boxed{\frac{\pi}{3}} \quad (\text{ウ})$$

点 B から直線 OA におろした垂線の足を H とすると

$$\vec{OH} = \left(|\vec{OB}| \cos \frac{\pi}{3} \right) \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \frac{3}{2} \vec{OA}$$

であるから、直線 OA に関する点 B の対称点を B' とすると、
点 A は $\triangle OBB'$ の重心

である。よって、点 C は AB を $1:3$ に外分する点であり、

$$\vec{OC} = \frac{-3\vec{OA} + \vec{OB}}{1-3} = \boxed{\frac{3}{2}} \vec{OA} + \boxed{-\frac{1}{2}} \vec{OB} \quad (\text{タ}) \quad (\text{チ})$$

$$\vec{OC} \cdot \vec{OD} = \left(\frac{3}{2} \vec{OA} - \frac{1}{2} \vec{OB} \right) \cdot \vec{OD} = \frac{3}{2} \vec{OA} \cdot \vec{OD} - \frac{1}{2} \vec{OB} \cdot \vec{OD}$$

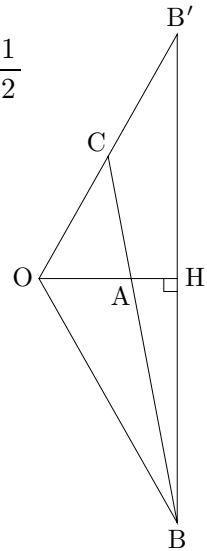
 $\vec{OC} \perp \vec{OD}$ より $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = 0$ であるから

$$\vec{OB} \cdot \vec{OD} = 3 \vec{OA} \cdot \vec{OD}$$

ここで、点 D は図形 S 上にあるから

$$\vec{OA} \cdot \vec{OD} = |\vec{OD}| = |\vec{OC}| = \frac{1}{2} |\vec{OB}'| = \frac{1}{2} |\vec{OB}| = 3$$

$$\therefore \vec{OB} \cdot \vec{OD} = 3 \vec{OA} \cdot \vec{OD} = 3 \times 3 = \boxed{9} \quad (\text{ツ})$$



(2) (1)の考察より

$$\begin{aligned} |\vec{OA}| &= 2, \quad |\vec{OB}| = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6, & \dots\dots \textcircled{1} \\ |\vec{OD}| &= \vec{OA} \cdot \vec{OD} = 3, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OD} = 9 \end{aligned}$$

点 Q は平面 ABD 上にあるから

$$\vec{OQ} = s\vec{OA} + t\vec{OB} + (1-s-t)\vec{OD} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

を満たす実数 s, t が存在し、

$$\begin{aligned} |\vec{OQ}|^2 &= s^2 |\vec{OA}|^2 + t^2 |\vec{OB}|^2 + (1-s-t)^2 |\vec{OD}|^2 + 2st \vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ &\quad + 2s(1-s-t) \vec{OA} \cdot \vec{OD} + 2t(1-s-t) \vec{OB} \cdot \vec{OD} \\ &= s^2 \times 2^2 + t^2 \times 6^2 + (1-s-t)^2 \times 3^2 + 2st \times 6 \\ &\quad + 2s(1-s-t) \times 3 + 2t(1-s-t) \times 9 \\ &= 4s^2 + 36t^2 + 9(1-s-t)(1-s-t+2t) + 6s(2t+1-s-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4s^2 + 36t^2 + (9 - 9s - 9t + 6s)(1 - s + t) \\
&= 7s^2 + 27t^2 + 6st - 12s + 9 \\
\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} &= s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - s - t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} \\
&= s \times 2^2 + t \times 6 + (1 - s - t) \times 3 \\
&= s + 3t + 3 \qquad \dots\dots ③
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{OQ}| &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \text{ より} \\
7s^2 + 27t^2 + 6st - 12s + 9 &= (s + 3t + 3)^2 \\
6s^2 + 18t^2 - 18s - 18t &= 0 \\
\therefore s^2 + \boxed{\begin{matrix} 3 \\ \text{(ア)} \end{matrix}} t^2 + \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \text{(イ)} \end{matrix}} st + \boxed{\begin{matrix} -3 \\ \text{(ウ)} \end{matrix}} s + \boxed{\begin{matrix} -3 \\ \text{(エ)} \end{matrix}} t &= \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \text{(オ)} \end{matrix}} \dots\dots ④
\end{aligned}$$

(3) 曲線 T 上の点 Q は ②かつ ④を満たす点であり, このとき ③より

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{OQ}| &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = s + 3t + 3 \\
q &= |\overrightarrow{OQ}| \text{ とおくと} \\
s &= -3t + q - 3 \qquad \dots\dots ⑤
\end{aligned}$$

④に代入して

$$\begin{aligned}
(-3t + q - 3)^2 + 3t^2 - 3(-3t + q - 3) - 3t &= 0 \\
12t^2 - 6(q - 3)t + (q - 3)^2 + 6t - 3(q - 3) &= 0 \\
12t^2 - 6(q - 4)t + (q - 3)(q - 6) &= 0 \qquad \dots\dots ⑥
\end{aligned}$$

実数 t が存在することより

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(\text{判別式}) &= 9(q - 4)^2 - 12(q - 3)(q - 6) \geq 0 \\
4(q - 3)(q - 6) - 3(q - 4)^2 &\leq 0 \\
q^2 - 12q + 24 &\leq 0 \\
\therefore 6 - 2\sqrt{3} &\leq q \leq 6 + 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$q = |\overrightarrow{OQ}|$ が最大するとき $Q = E$, $q = 6 + 2\sqrt{3}$ であり, ⑥, ⑤より

$$t = \frac{q - 4}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad s = -3 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + 6 + 2\sqrt{3} - 3 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

②に代入して

$$\overrightarrow{OE} = \boxed{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}} \overrightarrow{OA} + \boxed{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} \overrightarrow{OB} + \boxed{\frac{-1 - \sqrt{3}}{\text{(ハ)}}} \overrightarrow{OD}$$

$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$, $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}| = 3$ より $\triangle OCD$ は直角二等辺三角形であるから,

$$\triangle OCD \text{ の面積は } \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$$

点 E から平面 OCD におろした垂線の足を H とし,

$$\overrightarrow{OH} = \alpha \overrightarrow{OC} + \beta \overrightarrow{OD} \qquad \dots\dots ⑦$$

とおくと, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OE}$ は平面 OCD と垂直であるから,

$$(\vec{OH} - \vec{OE}) \cdot \vec{OC} = 0 \text{ かつ } (\vec{OH} - \vec{OE}) \cdot \vec{OD} = 0$$

$$\therefore \vec{OH} \cdot \vec{OC} = \vec{OE} \cdot \vec{OC} \text{ かつ } \vec{OH} \cdot \vec{OD} = \vec{OE} \cdot \vec{OD}$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{OC} = \vec{OE} \cdot \vec{OC} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \alpha |\vec{OC}|^2 + \beta \vec{OC} \cdot \vec{OD} &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{OB} \cdot \vec{OC} - (1 + \sqrt{3}) \vec{OC} \cdot \vec{OD} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} |\vec{OC}| + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} |\vec{OB}| |\vec{OC}| \cos \frac{2}{3}\pi - (1 + \sqrt{3}) \vec{OC} \cdot \vec{OD} \\ \alpha \times 3^2 + \beta \times 0 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \times 3 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \times 6 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 \\ &= -3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{OD} = \vec{OE} \cdot \vec{OD} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \alpha \vec{OC} \cdot \vec{OD} + \beta |\vec{OD}|^2 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \vec{OA} \cdot \vec{OD} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{OB} \cdot \vec{OD} - (1 + \sqrt{3}) |\vec{OD}|^2 \end{aligned}$$

①より

$$\begin{aligned} \alpha \times 0 + \beta \times 3^2 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \times 3 + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \times 9 - (1 + \sqrt{3}) \times 3^2 \\ \therefore \beta &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1 - \sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

⑦に代入して

$$\vec{OH} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{OC} + \vec{OD})$$

$\triangle OCD$ が $OC = OD = 3$ なる直角二等辺三角形であることより

$$|\vec{OH}| = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} EH &= \sqrt{OE^2 - OH^2} = \sqrt{(6 + 2\sqrt{3})^2 - 6} \\ &= \sqrt{6(7 + 4\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{6(2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{6}(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

四面体 OCDE の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times (2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) = \boxed{3\sqrt{6} + \frac{9}{\sqrt{2}}}$$

(ヒ)

5

(1) $OQ : AQ = 1 : v$ を満たす点 Q の軌跡 S は

OA を $1 : v$ に内分する点 $\left(\frac{1}{1+v}, 0\right)$ と

外分する点 $\left(\frac{1}{1-v}, 0\right)$ を直径の両端とする円

である。円 S の半径は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+v} - \frac{1}{1-v} \right) = \frac{(v-1) + (v+1)}{2(v+1)(v-1)} = \boxed{\frac{v}{v^2-1}} \quad (\text{フ})$$

円 S の中心の x 座標は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v} \right) = \frac{1}{1-v^2}$$

方べきの定理より

$$AB^2 = \left(1 - \frac{1}{1-v}\right) \left(1 - \frac{1}{1+v}\right) = \frac{v^2}{v^2-1}$$

点 B の x 座標を b とおくと、三平方の定理より

$$\left(\frac{v}{v^2-1}\right)^2 - \left(b - \frac{1}{1-v^2}\right)^2 = \frac{v^2}{v^2-1} - (1-b)^2$$

$$\left(\frac{v}{v^2-1}\right)^2 + \frac{2}{1-v^2}b - \left(\frac{1}{1-v^2}\right)^2 = \frac{v^2}{v^2-1} - 1 + 2b$$

$$2\left(1 - \frac{1}{1-v^2}\right)b = \left(\frac{v}{v^2-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-v^2}\right)^2 - \frac{v^2}{v^2-1} + 1 = 0$$

$$\therefore b = \boxed{0} \quad (\text{ヘ})$$

点 B の y 座標は

$$\sqrt{\left(\frac{v}{v^2-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-v^2}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}} \quad (\text{ホ})$$

(2) $C_1 : x = f(\theta) \cos \theta, y = f(\theta) \sin \theta$ とすると,

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta + f(\theta)(-\sin \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta$$

であるから,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \boxed{\sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}} \quad (\text{マ})$$

$B(f(\theta_0), \theta_0), R(f(\theta_1), \theta_1)$ とすると、点 A から点 B までの領域 E 内の最短経路の長さは

$$\begin{aligned}vf(\theta_1) &= AB + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta \\ &= \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta\end{aligned}$$

$f(\theta) = \beta e^{\alpha(\theta-\theta_0)}$ (α, β は正の定数) の形をしているとすれば,
 $f'(\theta) = \alpha\beta e^{\alpha(\theta-\theta_0)}$, $\sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} = \beta\sqrt{\alpha^2+1} e^{\alpha(\theta-\theta_0)}$
 であるから,

$$\begin{aligned}v\beta e^{\alpha(\theta_1-\theta_0)} &= \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} + \beta\sqrt{\alpha^2+1} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha(\theta-\theta_0)} \right]_{\theta_0}^{\theta_1} \\ &= \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} + \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2+1} (e^{\alpha(\theta_1-\theta_0)} - 1)\end{aligned}$$

$\theta_1 = \theta_0$ のときを考え,

$$v\beta = \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} + 0 \quad \therefore \beta = \frac{1}{\sqrt{v^2-1}}$$

このとき,

$$\begin{aligned}\frac{v}{\sqrt{v^2-1}} e^{\alpha(\theta_1-\theta_0)} &= \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha} (e^{\alpha(\theta_1-\theta_0)} - 1) \\ \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} (e^{\alpha(\theta_1-\theta_0)} - 1) &= \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha} (e^{\alpha(\theta_1-\theta_0)} - 1)\end{aligned}$$

任意の θ_1 で成り立つから

$$\begin{aligned}\frac{v}{\sqrt{v^2-1}} &= \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha} \\ v &= \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha} \\ \alpha^2 v^2 &= \alpha^2 + 1 \quad \therefore \alpha^2 = \frac{1}{v^2-1}\end{aligned}$$

$\alpha > 0$ より

$$\alpha = \boxed{\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}} \quad (\equiv)$$

$v = \sqrt{2}$ のとき

$$\alpha = \beta = 1, \text{ 円 } S \text{ の中心は } (-1, 0), \text{ 半径は } \sqrt{2}$$

曲線 C の $y \geq 0$ の部分 (の陰関数) を $y = g(x)$ とおくと, 曲線 C で囲まれた領域の面積 A は

$$A = 2 \int_a^{\sqrt{2}-1} g(x) dx \quad \left(a = -1 - e^{\pi-\frac{\pi}{2}} \right)$$

で求められる。ここで,

$$\begin{aligned}\int_a^0 g(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \left(r = e^{\theta - \frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{2\theta - \pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2\theta - \pi} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{e^{\pi} - 1}{4}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}-1} g(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

であるから，求める面積 A は

$$\begin{aligned}A &= 2 \int_a^{\sqrt{2}-1} g(x) dx \\ &= 2 \left(\int_a^0 g(x) dx + \int_0^{\sqrt{2}-1} g(x) dx \right) \\ &= 2 \left(\frac{e^{\pi} - 1}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \boxed{\frac{e^{\pi} + \pi - 3}{2}} \quad (\Delta)\end{aligned}$$