

注意 問題1, 2, 3, 4, 5の解答を, 解答用紙の所定の欄に記入しなさい。空欄(ア)～(ミ)については, 分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの(数, 式など)を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

1

(1) α, ω は定数で, $\omega > 0$ とする。媒介変数 t で表された曲線

$$x = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \quad y = \sin(\omega t + \alpha)$$

について, t を消去して x, y の方程式を求める。 $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ のとき, 求める方程式は

である。また, $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2}{3}\pi$ のとき, $\beta = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ とおくと, 求める

方程式は

$$\text{(イ)} \quad x^2 - \text{(ウ)} \quad xy + \text{(エ)} \quad y^2 = 1$$

である。ただし, , , には β の式を書きなさい。

(2) i を虚数単位とし, 集合 L と M を

$$L = \{z \mid z \text{ は整数 } a, b \text{ を用いて } z = a + bi \text{ と表される複素数}\}$$

$$M = \left\{z \mid z \in L, \frac{5}{z} \in L, |z| \neq 1, \left|\frac{5}{z}\right| \neq 1\right\}$$

で定める。複素数 $z = a + bi$ に対して, $z \in L$ ならば $|z|^2 = \text{(オ)}$ は整数である。

また, $z \in M$ ならば $|z|^2 = \text{(カ)}$ であり, 集合 M の要素の個数 $n(M)$ は

である。集合 M の要素 z のうち, 実部が最も大きくかつ虚部が正となる z は

である。

(3) 関数 $f(x)$ を $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ と定め, $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を用いて関数 $g(t)$ を $g(t) = f^{-1}(t)$ と定める。このとき, 関数 $G(x) = \text{(ケ)}$ を用いて $g''(t) = G(g(t))$ と表すことができる。

2

点 O を中心とする半径 r の球面上に 3 点 A, B, C があり, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2$ であるとする。また, 3 点 A, B, C を通る平面を α とし, 点 O は平面 α 上にないとする。さらに, $\triangle ABC$ の重心を G とし, 直線 OG 上に点 D があり, 線分 DG の中点が点 O であるとする。

(1) $\triangle ABC$ の面積は であり, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} =$ である。

(2) 点 P の位置ベクトルは $\overrightarrow{OP} = -3\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$ (x, y は実数) と表され, かつ直線 OP は平面 α に直交しているとする。このとき, $x =$, $y =$ である。いま, t を実数とし, 点 H を $\overrightarrow{DH} = t\overrightarrow{OP}$ によって決まる点とすると, $\overrightarrow{AH} =$ $\overrightarrow{OA} +$ $\overrightarrow{OB} +$ \overrightarrow{OC} である。さらに, 点 H が平面 α 上にあるとすると, $t =$ である。

(3) 四面体 $ABCD$ の体積は である。

3

$f(x)$ を閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続な増加関数とし、 n を正の整数とする。また、 I_n , J_n を

$$I_n = \int_0^1 f(x) \sin((2n+1)\pi x) dx$$

$$J_n = \int_0^1 f(x) |\sin((2n+1)\pi x)| dx$$

で定める。

- (1) x についての方程式 $\sin((2n+1)\pi x) = 0$ の実数解で区間 $[0, 1]$ に属するものは $\boxed{\text{テ}}$ 個ある。それらを小さい順に $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ ($N = \boxed{\text{テ}} - 1$) と並べると、 $x_k = \boxed{\text{ト}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) である。

次に、 $k = 0, 1, 2, \dots, \boxed{\text{テ}} - 2$ に対して、 a_k を

$$a_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \sin((2n+1)\pi x) dx$$

で定める。このとき、次の (F1), (F2) が成り立つ。

$$(F1) \quad k \text{ が偶数のとき} \quad f(x_k) \frac{2}{(2n+1)\pi} \leq a_k \leq f(x_{k+1}) \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

$$(F2) \quad k \text{ が奇数のとき} \quad -f(x_{k+1}) \frac{2}{(2n+1)\pi} \leq a_k \leq -f(x_k) \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

- (2) (F1) が成り立つことを証明しなさい。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ が成り立つことを証明しなさい。必要であれば、(F1), (F2) を証明なしに用いてよい。

- (4) 数列 $\{J_n\}$ の極限は関数 $f(x)$ の定積分を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \boxed{\text{ナ}}$ と表すことができる。

4

数字の1が書かれたカードが1枚, 2が書かれたカードが2枚, 3が書かれたカードが3枚, 4が書かれたカードが4枚の合計10枚のカードが入った箱がある。この箱の中からカードを1枚取り出し, 書かれている数字を記録して箱の中に戻すという操作を繰り返す。

- (1) 操作を2回行ったとき, 記録されている2つの数の和がそれら2つの数の積より大きくなる確率は である。
- (2) 操作を4回行った時点で1, 2, 3, 4の全ての数が記録されている確率は である。また, 操作を4回行った時点で記録されている数のうち最大の数が3である確率は である。
- (3) 操作を n 回 ($n \geq 2$) 行った時点で記録されている数が2種類で, かつそのうちの1つが1である確率は である。また, 操作を n 回 ($n \geq 2$) 行った時点で記録されている数が2種類であったとき, そのうちの1つが1である条件付き確率を p_n とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n)^{\frac{1}{n}} =$ が成り立つ。
- (4) 操作を n 回 ($n \geq 2$) 行った時点で1と4の両方の数が記録されていて, かつ1が4より先に記録されている確率は である。

5

(1) α, β は定数で, $\alpha > 0, \beta > 0$ とする。 x の 3 次方程式

$$18x^3 - 6\alpha x + \beta = 0$$

がただ 1 つの実数解をもつための必要十分条件は $\beta > \boxed{\text{(フ)}}$ である。 $\beta = \boxed{\text{(フ)}}$ のとき, 曲線 $y = 18x^3 - 6\alpha x + \beta$ と x 軸で囲まれる部分の面積を α を用いて表すと $\boxed{\text{(ヘ)}}$ となる。

(2) 放物線 $C: y = 3x^2$ 上の点 $P(-a, 3a^2)$ ($a > 0$) における法線と C との交点で点 P と異なる点の x 座標を $X(a)$ とする。 $X(a) = \boxed{\text{(ホ)}}$ であり, $a > 0$ における $X(a)$ の最小値は $\boxed{\text{(マ)}}$ である。

次に, $x_0 > 0$ とし, 点 $Q(x_0, y_0)$ を放物線 C 上にない点とする。 C 上の点における法線で点 Q を通るものがただ 1 つであるための必要十分条件は, $x \geq 0$ で定義された連続関数 $f(x) = \boxed{\text{(ミ)}}$ に対して, $y_0 < f(x_0)$ が成り立つことである。